This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06644292 6

Schr

Lehrbuch

der

analytischen Optik

von

J. C. E. Schmidt

aufserordentlichem Professor der Mathematik zu Göttingen

nach des Verfassers Tode herausgegeben

von

Dr. C. W. B. Goldschmidt

Privatdocenten auf der Universität Göttingen.

Mit 4 Kupfertafeln.

Göttingen,

in der Dieterichschen Buchhandlung.

1834.

Vorrede.

Der Verfasser dieses Werks starb im Jahre 1832 in Tübingen, kurze Zeit nachdem er als Professor der Mathematik dorthin berufen war. In seinem Nachlasse fand sich das fast völlig zum Druck ausgearbeitete Manuscript eines Theils der analytischen Optik, und der Unterzeichnete glaubte durch die Beförderung desselben zum Druck dem mathematischen Publicum einen nicht ganz unangenehmen Dienst zu erweisen. Die vom Verfasser ausgearbeiteten Theile der optischen Wissenschaften beschränken sich auf die Optik, im engern Sinne des Worts, auf Katoptrik und Dioptrik, und diese Theile sind es, welche das gegenwärtige Lehrbuch umfasst; die Theorie der doppelten Strahlenbrechung, die weitere Ausführung der Lehre von der Beugung des Lichts, von welcher der Verfasser nur die Grundzüge gegeben hat, die Anwandlungen, die Polarisation und die Interferenz des Lichts sind noch zurück. Indessen bilden die hier abgehandelten Theile ein in sich abgeschlossenes Ganzes und enthalten namentlich für die Anwendung der Optik grade das Wichtigste. Sollte die hier gewählte Behandlungsart Beifall finden, so würde der

Unterzeichnete versuchen, in einem zweiten Ba
das Rückständige auf dieselbe Art behandelt h
auszugeben und zu gleicher Zeit einige Abschn
des gegenwärtigen Bandes weiter auszuführen. –

Der Herausgeber hielt es für seine Pflicht,
dem Abdrucke des Werks im Wesentlichen nic
zu ändern, nur in wenigen Fällen, wo es ihm u
umgänglich nöthig schien, hat er sich eine U
arbeitung der von Schmidt gewählten Darstellu
erlaubt. Nur der kleine Abschnitt über d
scheinbare Bahn der Körper, rührt ga
vom Herausgeber her, ebenso die wenigen unt
den Text gesetzten Anmerkungen. —

Göttingen, im August 1834.

C. W. B. Goldschmidt

NEW YORK
PUBLIC
LIBRARY

Inhaltsverzeichniss.

Vom Licht im Allgemeinen. . . Pag. 1.

§. 1. Erklärung des Lichts, selbstleuchtende und dunkle Körper. §. 2. 3. Ueber die Natur des Lichts. §. 4. Durchsichtige und undurchsichtige Körper. §. 5–12. Gradlinige Fortpflanzung des Lichts. Abweichung von der graden Linie beim Durchgange durch durchsichtige Körper. Die Lichtstrahlen stören sich beim Durchkreuzen nicht. §. 13–21. Beobachtungen in der Camera obscura und daraus gezogene Grundsätze der Optik. §. 22–38. Gleichungen der Bilder leuchtender Punkte oder Flächen, wenn die Strahlen durch Oeffnungen von gegebener Gestalt gehen, und auf einer gegebenen Ebene aufgefangen werden. §. 39. Ueber die Aehnlichkeit zwischen Object und Bild. §. 40–43. Ueber das Sehen. §. 44. Scheinbare Entfernung. §. 45. Aufrechterscheinen der gesehenen Objecte. §. 46. 47. Scheinbarer Durchmesser einer Kugel. §. 48–52. Grenzen der Sichtbarkeit eines Objects. §. 53–56. Bestimmung des Gesichtswinkels, unter dem eine gegebene grade Linie erscheint. §. 57. Scheinbare Entfernung, welche das Auge auf der Erde übersieht. §. 58. 59. Depression des Horizonts. §. 60. Wirkliche Entfernung, welche das Auge auf der Erde übersieht. §. 61. Verschiedenheit des Gesichtswinkels, bei dem wir Objecte noch wahrnehmen. §. 62–65. Wir sehen die Objecte nur nach zwei Dimensionen ausgedehnt. §. 66. 67. Die Entfernung der Objecte läfst sich durch blofses Sehen derselben nicht erkennen. §. 68–74. Erklärung des sogenannten Wasserziehens der Sonne. §. 75. Falsche Urtheile die vom Kleinerwerden des Gesichtswinkels entfernterer Objecte herrühren. §. 76–84. Scheinbare Gestalt des Himmelsgewölbes. §. 85. Erklärung des Phänomens, dafs Sonne und Mond am Horizonte gröfser erscheinen als bei bedeutenderer Höhe.

Von der Bewegung des Lichts und den daher rührenden Erscheinungen. . . Pag. 67.

§. 86. Bewegung des Lichts und Aberration. §. 87–90. Phänomene, welche die Bewegung des Lichts bei der Verfinsterung der Jupiterstrabanten hervorbringt. §. 91–115. Gesetze der Aberration des Lichts, Aberration der Sterne in Länge und Breite. §. 116. Aberrationsconstante. Geschwindigkeit des Lichts. §. 117. 118. Untersuchung der Curve in welcher sich ein Stern vermöge der Aberration zu bewegen scheint. §. 119–126. Formeln für die Aberration, wenn der Beobachter aufser der Bewegung um die Sonne noch eine andere Bewegung hat. §. 127. 128. Tägliche Aberration. §. 129–131. Aberration, wenn das beobachtete Object eine eigene Bewegung hat. §. 132. 133. Aberration bei terrestrischen Objecten. §. 134. Für das Emanationssystem ist die Aberrationsconstante bei dem Durchgange des Lichts durch verschiedene Mittel dieselbe, nicht so beim Vibrationssysteme.

Von der scheinbaren Bahn der Körper. Pag. 111.

§. 135. 136. Scheinbare Bahn und scheinbare Geschwindigkeit. §. 137–142. Bestimmung derselben.

Von der Parallaxe. . . . Pag. 115.

§. 143. Gröfse der Parallaxe. §. 144–146. Parallaxe bei terrestrischen Objecten. §. 147–149. Parallaxe der Himmelskörper.

Vom Schatten der Körper. . . Pag. 122.

§. 150. 151. Schlagschatten, Erleuchtungsgrenze, Kernschatten, Halbschatten. §. 152–156. Bestimmung der Erleuchtungsgrenze, wenn der leuchtende und der erleuchtete Körper Kugeln sind. §. 157–159. Schatten eines durch eine Kugel erleuchteten Parallelogramms. §. 160–162. Von der Curve, welche der Endpunkt des Schattens eines beleuchteten Stabes auf eine Ebene wirft. §. 163–165. Allgemeine Formeln für die Oberfläche des hinter einem dunklen Körper gebildeten Schattenkegels, und für die Erleuchtungsgrenze. §. 166. 167. Anwendung dieser Formeln auf die Erleuchtung eines elliptischen Sphäroids.

Von der Erleuchtung. . . . Pag. 143.

§. 168–173. Grundsätze für die Stärke der Erleuchtung. §. 174. Mittlere Dichtigkeit des Lichts auf einer erleuchteten Fläche. §. 182. 183. Lichtmenge und mittlere

Dichtigkeit des Lichts auf einer erleuchteten Kugel. §. 184–186. Lichtmenge eines Kreises. §. 187. Lichtmenge einer Ellipse. §. 188. 189. Helligkeit einer erleuchteten Fläche. §. 190–200. Lichtmenge bei der Erleuchtung durch eine Fläche. §. 201. Lichtmenge, welche ein gegebener Punkt der Erdoberfläche innerhalb eines Tages durch die Sonne erhält. §. 202. Die Lichtmenge, welche ein Element des leuchtenden Körpers auf einen dunklen wirft, ist derjenigen gleich, welche auf die Projection desselben auf eine um das dunkle Element beschriebene Kugelfläche fällt. §. 203–205. Beleuchtung durch einen Theil einer Kugel. §. 206. 207. Erleuchtung durch einen erleuchteten Körper. §. 208–212. Erleuchtung der Erde durch den Mond. §. 213–216. Scheinbarer Glanz der Körper. §. 217–219. Schwächung des Lichts in durchsichtigen Mitteln. §. 220–223. Schwächung des Lichts durch Reflexion an der Oberfläche des brechenden Mittels. §. 224–230. Lichtschwächung bei nicht gleichförmig dichten Mitteln, Schwächung des Lichts in der Atmosphäre. §. 231. Berücksichtigung des Umstandes, dafs, aufser der Schwächung im durchsichtigen Mittel, das Licht auch wegen gröfserer Entfernung des leuchtenden Körpers schwächer wird.

Catoptrik. . . . . Pag. 216.

§. 232–235. Gesetze der Zurückwerfung des Lichts. §. 236–238. Ableitung dieser Gesetze aus dem Principe der kleinsten Wirkung. §. 239–243. Hypothesen zur Erklärung der Zurückwerfung des Lichts. §. 244. 245. Reflection von einer Ebene. §. 246–248. Bestimmung der Flächen, welche aufser der Ebene die Eigenschaft haben, das von einem Punkte ausgegangene Licht nach einem Punkte zurückzuwerfen. §. 249. 250. Catacaustica. §. 251–255. Aufgaben in Bezug auf die Reflection des Lichts von ebenen Spiegeln. §. 256. Glasspiegel. §. 257. Schwächung des Lichts bei der Reflection. §. 258–261. Vervielfältigte Reflection durch zwei ebene Spiegel. §. 262. 263. Sphärischer Hohlspiegel. §. 264. 265. Abweichung der Strahlen wegen der Kugelgestalt des Spiegels. §. 266–270. Kleinster Sammlungskreis. §. 271. 272. Brennpunkt und Brennweite des Hohlspiegels. §. 273. Kleinster Sammlungskreis, wenn der leuchtende Punkt im Brennpunkte liegt. §. 274. Formeln für den erhabenen Kugelspiegel. §. 275–277. Ort des Bildes, wenn der leuchtende Punkt nicht in der Axe des Spiegels liegt. §. 278–286. Stärke der durch einen Kugel-

spiegel hervorgebrachten Erleuchtung, wenn das selbstleuchtende Object ein Punkt ist. §. 287–294. Ueber Kater's Beobachtung der Schwächung des reflectirten Lichts nach seinem Durchgange durch den Brennpunkt. §. 295–302. Stärke der durch einen Kugelspiegel hervorgebrachten Beleuchtung, wenn das selbstleuchtende Object eine Fläche ist. §. 303. Brennspiegel. §. 304–307. Scheinbare Helligkeit des Bildes. §. 308–320. Kegelförmige und cylindrische Spiegel, anamorphotische Zeichnungen.

Dioptrik. . . . . Pag. 309.

§. 321–326. Gesetze der Brechung des Lichts. §. 327–334. Ableitung dieser Gesetze nach dem Emanationssysteme. §. 335. 336. Ableitung derselben nach dem Vibrationssysteme. §. 337. 338. Ableitung aus dem Principe der kleinsten Wirkung. §. 339. Bestimmung des Ortes des Bildes eines lenchtenden Punkts der in einem brechenden Mittel von ebener Oberfläche liegt. §. 340. Diacaustica. §. 341. 342. Brechung des Lichts, wenn die Grenzflächen des durchsichtigen Mittels parallele Ebenen sind. §. 343. Reflection von belegten Glasspiegeln mit Berücksichtigung der Brechung. §. 344–348. Brechung, wenn der Lichtstrahl das durchsichtige Mittel an einer krummen Fläche trifft. §. 349. 350. Bestimmung derjenigen brechenden Curve, welche alle gebrochenen Strahlen in Einem Punkte vereinigt. §. 351. Brechungscoëfficient beim Uebergange aus einem brechenden Mittel in ein anderes. §. 352. Einfluſs der Temperatur auf die Brechungskraft der Mittel. §. 353. Brechung eines Strahls der durch mehrere durch parallele Ebenen begrenzte Mittel geht. §. 354–364. Brechung des Lichts in Prismen. §. 365–367. Bestimmung des Brechungsverhältnisses der Flüssigkeiten durch Prismen. §. 368–371. Reflection von belegten sphärischen Glasspiegeln.

Brechung des Lichts in Glaslinsen. Pag. 366.

§. 372. 373. Verschiedene Arten von Glaslinsen. §. 374–389. Brechung des von einem in der Axe liegenden Punkte ausgehenden Lichts in einer biconvexen Linse. §. 390–392. Brennweite der übrigen Glaslinsen. §. 393–402. Brechung der Lichtstrahlen die nicht von einem in der Axe liegenden Punkte ausgehen. §. 403–409. Untersuchung des Weges eines Lichtstrahls, der durch mehrere Glaslinsen geht. §. 410–416. Ueber das Sehen durch Glaslinsen, Vergröſserung, Brillen. §. 417. 418. Entfernung des letz-

Glases, wenn das Auge durch eine Verbindung von reren Glaslinsen deutlich sehen soll. §. 419–423. Helit der Bilder. §. 424. Die bisherigen allgemeinen Forn sind nur als Näherungsformeln zu betrachten.

n der Farbenzerstreuung. . . Pag. 418.

§. 425–427. Farbenzerstreuung in einem Prisma. §. 428–3. Erklärung der Farbenzerstreuung nach dem Emanans- und Vibrationssysteme. §. 434–441. Achromatihes Prisma. §. 442. Zerstreuungsverhältnifs. §. 443–457. heorie des Regenbogens.

Von den achromatischen Glaslinsen. Pag. 444.

§. 458–460. Abweichung der Strahlen wegen der Farnzerstreuung bei einer Linse. §. 461. 462. Abweichung ei mehreren Linsen. §. 463–470. Aufhebung der Abweichung wegen der Farbenzerstreuung, achromatische Glaslinse. §. 471. 472. Maafs der Undeutlichkeit wegen der Farbenzerstreuung.

Abweichung der Strahlen wegen der Kugelgestalt. . . . . Pag. 465.

§. 473–483. Abweichung wegen der Kugelgestalt bei iner Linse. §. 484–487. Abweichung beim Durchgange durch mehrere Glaslinsen. §. 488–508. Aufhebung dieser Abweichung. Vollständige Berechnung eines achromatischen, aplanatischen Objectivs. §. 509–515. Bestimmung des zweckmäfsigsten Punkts für den die Abweichung wegen der Kugelgestalt aufgehoben werden mufs.

Von den Fernröhren. . . . Pag. 522.

§. 516–518. Fernrohr aus zwei Glaslinsen. §. 519–522. Galiläisches Fernrohr; Vergröfserung, Gesichtsfeld, Undeutlichkeit der durch dasselbe hervorgebrachten Bilder. §. 523–530. Kepplersches Fernrohr, Gesichtsfeld, Vergröfserung, Helligkeit der Bilder. Undeutlichkeit wegen der Farbenzerstreuung. §. 531–538. Collectivglas. §. 539–544. Farbenzerstreuung die durch das Ocular hervorgebracht wird. §. 545–547. Anwendung mehrerer Oculare. §. 548–549. Terrestrisches Fernrohr.

Von den Spiegeltelescopen. . . Pag. 556.

§. 550. Zweck und Einrichtung der Spiegelteleskope. §. 551. Bestimmung der Entfernung des Punktes, in wel-

chem die von einem Hohlspiegel zurückgeworfenen Strahlen die Axe schneiden, von der Mitte desselben. §. 552–555. Reflection von einem Hohlspiegel auf einen andern. §. 556. 557. Verschiedene Arten der Spiegeltelescope.

Von den Mikroskopen. . . Pag. 565.

§. 558–561. Zweck der Mikroskope. Loupen. Vergrößerung derselben. §. 562–565. Abweichung wegen der Kugelgestalt. §. 566. 567. Helligkeit der durch eine Loupe gesehenen Objecte. §. 568–570. Achromatische Loupe. §. 571–573. Zusammengesetztes Mikroskop.

Von der Bewegung des Lichts in der Atmosphäre. . . . . Pag. 577.

§. 574–586. Bahn eines Lichtstrahls der durch ein durchsichtiges Mittel geht, welches aus unendlich dünnen Schichten von ungleicher Dichtigkeit, die durch parallele Ebenen getrennt sind, geht. Terrestrische Strahlenbrechung. §. 587–590. Strahlenbrechung, wenn das Gesetz der Abnahme der Dichtigkeit der Luft ein anderes als das in den vorigen Paragraphen angenommene ist. §. 591–594. Doppelte, durch terrestrische Refraction hervorgebrachte Bilder, Luftspiegelung. §. 595–606. Astronomische Strahlenbrechung. §. 607–611. Schwächung des Lichts beim Durchgange durch die Atmosphäre.

Von den Höfen und Nebensonnen. Pag. 611.

§. 612. Verschiedene Arten von Höfen. §. 613–620. Theorie der Höfe größerer Art. §. 621. 622. Inflexion des Lichts. §. 623. 624. Theorie der Höfe kleinerer Art. §. 625–627. Verticale Nebensonnen. §. 628–630. Horizontale Nebensonnen.

Vom Licht im Allgemeinen.

§. 1.

Die uns umgebenden Gegenstände bringen zu manchen Zeiten eine Empfindung in unserm Auge hervor, durch welche wir von ihrem Daseyn in Kenntnifs gesetzt werden, während zu andern Zeiten, obgleich das Auge gegen die äufsern Gegenstände dieselbe Lage besitzt, dieser Eindruck mangelt. Im erstern Fall sagen wir, die Gegenstände seyen sichtbar, im letztern unsichtbar, und diese beiden Zustände werden durch die Ausdrücke Helligkeit und Finsternifs unterschieden. Aufser dem Auge und den äufsern Gegenständen mufs daher noch ein Drittes vorhanden seyn, welches die Verbindung zwischen dem Auge und den gesehenen Gegenständen hervorbringt, indem das Daseyn desselben die Helligkeit, die Abwesenheit hingegen die Finsternifs bedingt, und dieses Dritte ist es, was wir Licht nennen.

Die Körper, welche Eindrücke in unserm Auge hervorbringen können, theilt man in dieser Rücksicht in selbstleuchtende und dunkle; die ersten sind an sich sichtbar und können als die Quellen des Lichts betrachtet werden, wie z. B. die Sonne, die Fixsterne, die Flamme angezündeter Körper; die letztern hingegen erfordern zu ihrer Sichtbarkeit die Gegenwart eines selbstleuchtenden Körpers, der eine genugsame Helligkeit hervorzubringen im Stande ist. Dafs sich manche dunkle Körper in selbstleuchtende verwandeln können,

ist eine bekannte Thatsache: vegetabilische und anim
lische Substanzen fangen an, zu leuchten, sobald sie
Fäulnifs gerathen; eben so zeigen mehrere Körpe
wenn sie gerieben, gedrückt oder geschlagen werde
Lichterscheinungen; andere Körper, die sogenannte
Lichtsauger, leuchten im Dunkeln, wenn sie vorher de
Sonnenlicht ausgesetzt waren.

§. 2.

Man hat sich von jeher mit der Auflösung de
Frage beschäftigt, auf welche Weise das Licht die Ver
bindung zwischen dem Auge und dem gesehenen Gegen
stand hervorbringe, und was es seiner Natur nach sey,
allein trotz aller Bemühungen und Beobachtungen übe
die Eigenschaften des Lichts, ist die Auflösung dieser
Frage noch sehr im Dunkeln. Wir werden hier blos
ganz kurz die Hauptmeinungen über die Natur des
Lichts anführen, welches um so eher angeht, da alle
Untersuchungen über das Licht, die im vorliegenden
Werk angestellt werden, sich ohne irgend eine Hypo
these, weder über die Art der Verbindung zwischen
dem Auge und dem gesehenen Gegenstand, noch übe
die Natur des Lichts, ausführen lassen.

§. 3.

Bei den Alten glaubten Mehrere, das Sehen ge
schähe durch eine Art von Ausfluſs aus dem Auge nach
dem gesehenen Gegenstande hin; in diesem Fall wäre
also die Sichtbarkeit der Körper blos von dem Zustande
unsers Auges abhängig, und man könnte sich dann recht
gut die Möglichkeit denken, daſs wir auch im Finstern
sehen könnten, und daſs uns im Gegentheil zuweilen der
hellste Sonnenschein unsichtbar wäre, wenn sich das Auge
gerade nicht in dem Zustande befände, in welchem ein
Ausfluſs aus demselben nach den Gegenständen hin
vorhanden wäre; Descartes war der Meinung, es sey
eine feine Materie im ganzen Weltraum verbreitet, die
von dem leuchtenden Körper gestoſsen wird, und auf

diese Weise dem Auge einen Eindruck mittheilt. Da sich Descartes hierbei die Fortpflanzung des Lichts als augenblicklich dachte, so dafs, wenn das entfernteste Theilchen einen Stofs erhielt, derselbe sich sogleich bei allen übrigen äufserte, so mufste diese Hypothese fallen, sobald die Erfahrung lehrte, dafs das Licht zu seiner Fortpflanzung eine dem zu durchlaufenden Raum proportionale Zeit anwendet. Huygens nahm ebenfalls eine im ganzen Weltraum verbreitete Materie von grofser Feinheit an, die sich aber von der des Descartes darin unterschied, dafs sie die Eigenschaft der Elasticität besitzen sollte. Er nannte dieselbe Aether, und legte aufserdem diesem Aether eine Eigenschaft bei, vermöge welcher die leuchtenden Körper denselben in eine zitternde Bewegung zu versetzen im Stande sind, welche Schwingungen der Aethertheilchen sich dann bis in das Auge fortpflanzen, und in demselben die Empfindung des Sehens hervorbringen. Diese Hypothese wurde auch von Euler angenommen, und weiter bearbeitet, und ist unter dem Namen der Vibrationstheorie oder der Undulationstheorie bekannt. Durch dieselbe erklären sich im Allgemeinen die Erscheinungen des Lichts auf eine ähnliche Weise, wie die Erscheinungen des Schalles. Bei der Entstehung des Schalles wird ebenfalls eine elastische Materie erfordert, die zu seiner Fortpflanzung dient (gewöhnlich die Luft), und die in derselben hervorgebrachte zitternde Bewegung nach und nach in unser Ohr bringt, woselbst sie auf den Gehörnerven wirkt.

Aus den Angaben, welche Newton in seinen optischen Schriften darstellte, sieht man, dafs er die Idee des sogenannten Emanationssystems hatte. Bei dieser Hypothese wird das Licht als eine aus dem leuchtenden Körper nach allen Seiten grädlinig fortgehende Materie angenommen, die in unserm Auge durch einen Stofs die Empfindung des Sehens hervorbringt. Zwischen diesen beiden letzten Hypothesen sind

die Meinungen der Physiker jetzt getheilt, und wir übergehen die aufser diesen beiden noch von Andern aufgestellten Meinungen über die Natur des Lichts, als zu unserm Zweck nicht gehörig, so wie nicht minder die verschiedenen Einwürfe, welche die Anhänger des Undulationssystems und die des Emanationssystems einander gegenseitig gemacht haben.

§. 4.

Man theilt die dunkeln Körper in zwei Klassen, die sich durch die Beziehungen bestimmen, welche sie zum Licht haben, in durchsichtige und undurchsichtige. Durchsichtig heifst ein Körper, wenn er das von einem Gegenstande zum Auge fliefsende Licht durch seine Dazwischenkunft nicht aufhält, sondern es wenigstens zum Theil durchläfst, wie z. B. Glas, Wasser, Luft u. s. w.; undurchsichtig wird ein Körper dann genannt, wenn er dem Auge durch sein Dazwischentreten den Anblick eines andern Gegenstandes entzieht. Wenn ein Körper alles Licht durchliefse, so würde man ihm eine vollkommene Durchsichtigkeit beilegen müssen; solche vollkommen durchsichtige Körper giebt es aber in der Natur nicht, so weit wir dieselben bis jetzt kennen, wenigstens würden wir uns von ihrem Daseyn blofs durch das Gefühl überzeugen können, da das Auge, indem der Körper eben wegen seiner vollkommenen Durchsichtigkeit alles Licht durchgehen läfst, keinen Eindruck von demselben erhalten könnte, und zum Sehen eines Gegenstandes durchaus erforderlich ist, dafs von ihm Licht zurückgeworfen werde. Es scheint zwar Anfangs, als ob die Luft vollkommen durchsichtig wäre, allein wenn man einen weit entfernten irdischen Gegenstand betrachtet, der in der Nähe sehr hellglänzend ist, so bemerkt man sogleich, dafs er in der Entfernung bei weitem nicht mit dem Glanz erscheint, als in der Nähe, welches blofs daher kommt, dafs das Licht auf seinem Wege durch die Atmosphäre nicht völlig

hgelassen wird. Dasselbe bemerkt man auch an Himmelskörpern, wenn sich dieselben nahe am izont befinden, denn in dieser Stellung müssen die ihnen ausströmenden Lichtstrahlen einen viel gröfsern g in der Atmosphäre zurücklegen, als wenn diese per in einer bedeutenden Höhe über dem Horizont en. Obgleich nun freilich diese Verminderung der htstärke, bei einem sehr kurzen Weg in der Luft, erklich ist, so mufs man doch aus einer Vermindeg in grofsen Luftmassen auf eine proportionale minderung auch in kleinen Luftmassen schliefsen, ist die Luft kein vollkommen durchsichtiger Körper. e Körper, die bei gewöhnlicher Dicke undurchsichtig , können durchsichtig werden, wenn man sie zu nen Blättchen macht, oder auch mit andern Materien Berührung setzt, wie z. B. sehr dünne Goldblättchen, r in Oel getauchtes Papier; nur bei denjenigen allen, die eine weifse Farbe haben, hat es noch t gelingen wollen, so dünn auch die aus ihnen gegenen Blättchen waren, sie zum Durchlassen des hts zu bringen.

§. 5.

Die erste Untersuchung, welche wir zu machen n, besteht darin, dafs wir bestimmen, nach welcher htung das Licht vom leuchtenden Gegenstande aus das Auge wirkt. Es ist eine bekannte Erfahrung, , wenn ein undurchsichtiger Körper zwischen dem e und dem Gegenstand sich so befindet, dafs die le Linie, welche das Auge mit dem zu sehenden genstande verbindet, durch den dazwischenliegenden per geht, dieser Gegenstand verdeckt und dem e unsichtbar wird. Das Licht kann also vom Object t in das Auge gelangen, indem es von dem undurchigen Körper auf seinem Wege aufgefangen wird, da der Erfahrung zufolge das Auge mit den beiandern Körpern in grader Linie liegen mufs, wenn

auch im leeren Raum auch gerader Linie geschähe, wie doch bei den Beobachtungen der Himmelskörper, deren Licht, ehe es zur Erdatmosphäre gelangt, den leeren Raum durchläuft, vorausgesetzt wird. Man muſs aber wohl bemerken, daſs das Licht während seiner Fortpflanzung von einem irdischen Object zum Auge durch gemeine Luft von gleichförmiger Dichtigkeit durchläuft, und überhaupt, wie in der Dioptrik gezeigt werden wird, findet die Erscheinung Statt, daſs ein Lichttheilchen, so lange es sich in einem und demselben durchsichtigen Mittel von gleichförmiger Dichtigkeit bewegt, seine gradlinige Bewegung beibehält, und erst dann von dieser Richtung abgelenkt wird, wenn es in ein Mittel von anderer Dichtigkeit tritt. Da nun, so lange das Lichttheilchen sich im leeren Raume bewegt, keine Ursache vorhanden ist, aus welcher es seine einmal erhaltene gradlinige Bewegung verlassen sollte, so wird es dieselbe beibehalten müssen, und dies wird auch durch die Uebereinstimmung der berechneten und beobachteten Resultate der Verfinsterung und der Bedeckung der Himmelskörper bestätigt.

§. 10.

Die Feinheit der Lichttheilchen, aus denen die Lichtstrahlen bestehen, ergiebt sich aus der Beobachtung, daſs unendlich viel Lichtstrahlen einander durchschneiden können, ohne daſs dadurch ein Hinderniſs in ihrer anfänglichen Bewegung hervorgebracht wird. Bringt man z. B. in einem Stück Papier vermittelst eines Nadelstichs eine feine Oeffnung an, so kann man durch dieselbe, wenn das Papier dem Auge nur nahe genug gebracht wird, eine ganze Gegend übersehen, ohne daſs die Gegenstände verwirrt erscheinen. Diese Deutlichkeit könnte nicht bestehen, wenn die Lichttheilchen nicht so klein wären, daſs sie trotz ihrer Menge, da von allen Punkten der gesehenen Gegenstände Licht ausflieſsen

weifse Tafel der Oeffnung gehalten wird, aber zugleich um so kleiner. Entfernt man die weifse Tafel von der Oeffnung, so nimmt die Gröfse der Bilder zwar zu, aber ihre scharfe Begrenzung nimmt ab. Je gröfser die Oeffnung ist, durch welche man die Lichtstrahlen in das verdunkelte Zimmer fallen läfst, desto verwaschener zeigen sich die Bilder, bis endlich, wenn die Oeffnung sehr grofs wird, sich blos ein weifslichtes Bild ohne Abwechselung von Farben zeigt. So bildet sich in Zimmern an derjenigen Wand, die den Fenstern gegenübersteht, immer eine gröfsere Helligkeit, welche nichts anderes ist, als ein verworrenes Bild der Gegenstände, die aufserhalb des Zimmers ihr Licht durch die Fenster werfen.

§. 14.

Die im vorigen §. auseinandergesetzten Beobachtungen lassen sich leicht folgendermafsen erklären, wenn man annimmt, dafs jeder Lichtstrahl das Bild des Punktes, von welchem er ausgeht, mit sich führt; dann wird einleuchtend, dafs, sobald man diesen Lichtstrahl auf eine weifse Tafel fallen läfst, auf derselben dem Auge ein Bild oder eine Farbe, die der Lichtstrahl selbst hat, erscheinen mufs. Die Tafel, welche man zu diesem Versuche wählt, mufs deswegen weifs seyn, damit die eigene Farbe der Tafel sich nicht mit der des auffallenden Lichtstrahls vermische.

§. 15.

Es sey *ABCD* (Fig. 1.) irgend eins der Objecte, dessen Form wir hier, der Deutlichkeit wegen, als ein Parallelogramm annehmen, *MN* die Wand, in welcher sich die Oeffnung *G* befindet, die wir als einen Punkt betrachten. Da ein jeder Punkt der Fläche *ABCD* Strahlen nach allen Richtungen ausschickt, so wird einer derselben eine solche Richtung besitzen, dafs er durch die Oeffnung *G* geht; es werden daher von allen Punkten der Fläche *ABCD* Strahlen durch die Oeff-

nung in das verdunkelte Zimmer fallen, und alle diese Lichtstrahlen werden in dem pyramidalischen Raum *ABCDG* eingeschlossen seyn.

Verlängert man die Seitenlinien *AG*, *BG*, *CG*, *DG* dieser Pyramide willkürlich nach α, β, γ, δ, so bildet sich hinter der Wand eine zweite Strahlenpyramide, die mit der erstern ganz identisch ist. Gesetzt nun, man bringt die besagte weifse Tafel durch die Strahlenpyramide in eine solche Stellung, dafs sie dieselbe in der Ebene *abcd* durchschneidet, so wird dieser Durchschnitt das Bild des Gegenstandes *ABCD* seyn, und ihm völlig ähnlich werden, wenn die Tafel in *abcd* mit dem Gegenstande *ABCD* parallel gehalten wird.

§. 16.

Entfernt man die Tafel weiter von der Oeffnung *G*, so dafs ein neuer Durchschnitt der Strahlenpyramide entsteht, den wir durch *a' b' c' d'* bezeichnen, so wird sich ein neues Bild zeigen, das, wie sich aus der Geometrie ergiebt, gröfser seyn mufs, als das erste *abcd*. Da nun aber in beiden Fällen einerlei Lichtmenge auf das Bild verwendet wird, so ist einleuchtend, dafs bei dem gröfsern Bilde das Licht sich mehr zertheilt, und eine schwächere Färbung entstehen mufs, als bei dem kleinen, wo das Licht sich mehr concentrirt erhält. Auf diese Art würde im Allgemeinen erklärt seyn, warum bei zunehmender Entfernung der Tafel von der Oeffnung die Helligkeit des Bildes abnimmt.

§. 17.

Man kann sehr leicht das Verhältnifs finden, in welchem die Helligkeit des Bildes zu der Entfernung desselben von der Oeffnung steht. Es seyen *H* und *H'* die Helligkeiten der Bilder *abcd*, *a' b' c' d'*, deren Flächenräume wir durch *F* und *F'* bezeichnen wollen. Da beide Bilder gleiche Lichtmenge erhalten, so müssen die Helligkeiten derselben sich umgekehrt wie ihre Flä-

chenräume verhalten, folglich hat man

$$H : H' = F' : F.$$

Da ferner die Figuren des Bildes als Parallelogramme angenommen sind, so wird

$$F = cb \,.\, cd, \quad F' = c'b' \,.\, c'd';$$

also auch, wenn man diese Werthe von F und F' in voriger Proportion substituirt,

$$H' : H = cb \,.\, cd : c'b' \,.\, c'd'.$$

Nun ist aber, wie man aus den in der Figur vorhandenen ähnlichen Dreiecken leicht sieht,

$$Gc : Gc' = cb : c'b'$$
$$Gc : Gc' = cd : c'd'$$

$$Gc^2 : Gc'^2 = cb \,.\, cd : c'b' \,.\, c'd'$$
$$H' : H = cb \,.\, cd : c'b' \,.\, c'd'$$

$$Gc^2 : Gc'^2 = H' : H.$$

Man fälle von der Spitze G der Pyramide ein Perpendikel Gm auf die erste Lage der Tafel, so wird dasselbe auch die zweite Lage in m' senkrecht treffen. Setzt man

$$Gm = e, \quad Gm' = e',$$

so wird

$$Gc : Gc' = e : e';$$

folglich hat man auch

$$ee : e'e' = H' : H,$$

und aus dieser Proportion sieht man, dafs die Helligkeiten dieser Bilder sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Oeffnung verhalten.

§. 18.

Es bleibt noch zu erklären übrig, warum bei gröfsern Oeffnungen die Bilder sich so undeutlich zeigen, und zuletzt völlig verschwinden. Zu diesem Zweck sey MN (Fig. 2.) die Mauer, HG die Oeffnung, welche wir jetzt nicht mehr als einen blofsen Punkt betrachten dürfen, sondern welcher wir eine endliche Ausdehnung beilegen müssen. L und L' seyen zwei beliebige, einander nahe liegende Punkte eines Gegenstandes, der gegen die

Oeffnung eine solche Lage hat, dafs er Licht in das verdunkelte Zimmer werfen kann. AB sey die hinter der Oeffnung aufgestellte weifse Tafel, der wir eine mit der Mauer MN parallele Lage geben. Bei der frühern Erklärung nahmen wir an, dafs von jedem Punkte des Gegenstandes nur ein einziger Lichtstrahl durch die Oeffnung geht, welche Annahme aber eine blofse Näherung und nur in so fern zulässig ist, als die Oeffnung als unendlich klein betrachtet wird. In der Wirklichkeit wird immer ein Strahlenkegel oder eine Strahlenpyramide durch die Oeffnung gehen, da das Licht von jedem Punkt nach allen Seiten ausströmt.

§. 19.

Es sey daher aLb der Strahlenkegel, welchen der Punkt L und $a'L'b'$ der Strahlenkegel, welchen der Punkt L' auf die Tafel wirft. Man sieht, dafs in dem Raume ab' die Strahlen von beiden Punkten sich vermischen. So lange die Punkte L und L' Licht von einerlei Farbe ausströmen, wird durch diese Vermischung keine Farbenänderung des Bildes entstehen; allein sobald beide Punkte verschiedene Farben zeigen, mufs die Vereinigung zweier verschiedenen Arten von Lichtstrahlen eine dritte Farbe hervorbringen, die aus beiden zusammengesetzt ist. Dies findet nun vorzüglich an den Grenzen der verschiedenen Objecte Statt, und deswegen müssen sich die Grenzen ihrer Bilder mit verwaschenen unbestimmten Farben zeigen. Wird nun die Oeffnung HG so grofs, dafs die von ganz verschiedenen Objecten herkommenden Strahlenkegel auf einander fallen können, so ist es natürlich, dafs ein Gemisch von allen Arten von Farben entsteht, welches wie in der Dioptrik gezeigt werden wird, immer eine weifslichte Farbe hervorbringt.

§. 20.

Aus dieser Darstellung sieht man, dafs, genau genommen, das Bild, welches hinter einer Oeffnung in

einem verdunkelten Zimmer entsteht, nie ganz rein seyn kann, da jeder Punkt des Gegenstandes, vermöge des Strahlenkegels, welchen er durch die Oeffnung schickt, sich als eine ausgedehnte Figur auf der weifsen Tafel darstellt. Man kann aber diesen Uebelstand dadurch vermeiden, dafs man in der Oeffnung ein Linsenglas aufstellt, welches die Eigenschaft hat, alle von einem Punkt herkommende Strahlen wieder in einen Punkt zu vereinigen.

§. 21.

Die in den vorigen §§. dargestellten Beobachtungen, und die aus denselben abgeleiteten Sätze, nämlich:

1. Dafs das Licht sich in grader Linie fortpflanzt, so lange es sich im leeren Raume oder in einem durchsichtigen Mittel von gleichförmiger Dichtigkeit bewegt.
2. Dafs das Licht von einem Punkt nach allen Seiten hin ausströmt.
3. Dafs unendlich viel Lichtstrahlen ohne Störung ihrer Bewegung sich durchkreuzen können.
4. Dafs jeder Lichtstrahl ein Bild desjenigen Punktes giebt, von welchem er herkommt,

machen die Grundlage der Optik im engern Sinne aus, in welcher man blos die Erscheinungen des Lichts untersucht, die ohne eine Zurückwerfung oder Brechung der Lichtstrahlen Statt finden. Da diese Sätze vermittelst ganz einfacher Betrachtungen ohne Hinzuziehung irgend einer Hypothese entwickelt wurden, so kann ihre Wahrheit nicht bezweifelt werden.

Man dürfte zwar durch den oftmaligen Gebrauch des Ausdrucks: Ausströmen des Lichts auf den Gedanken kommen, als ob die Idee des Emanationssystems sich bei diesen Erklärungen einmischte, allein dieser Ausdruck ist blofs eine Abkürzung, und soll nichts weiter bedeuten, als eine Verbindung des gesehenen Punktes mit dem Auge vermittelst

des Lichts, es mag nun diese Verbindung durch wirkliches Ausströmen des Lichts, oder durch eine zitternde Bewegung des Aethers, oder auf irgend eine andere Art geschehen.

§. 22.

Bezeichnet man die Coordinaten irgend eines Punkts der Oberfläche eines leuchtenden Körpers durch ξ, η, ζ, welche auf beliebige drei im Raume sich rechtwinklig durchschneidende Coordinatenaxen bezogen sind, die Coordinaten irgend eines Punktes in der Peripherie der auffangenden Fläche, oder der in einer unbegrenzten Oberfläche angebrachten Oeffnung durch $\alpha, 6, \gamma$ auf dieselben Axen bezogen, endlich die Coordinaten jedes beliebigen Punktes der graden Linie, die durch diese beiden gegebenen Punkte geht, durch x, y, z, so sind bekanntlich die Gleichungen dieser graden Linie

$$y - \eta = \frac{\eta - 6}{\xi - \alpha}(x - \xi);$$

$$z - \zeta = \frac{\zeta - \gamma}{\xi - \alpha}(x - \xi);$$

welche zugleich die Gleichungen desjenigen Lichtstrahls darstellen, der durch die besagten beiden Punkte geht.

§. 23.

Die Grenzen einer auffangenden Fläche oder einer Oeffnung bilden im Allgemeinen eine Linie doppelter Krümmung, und wie aus der analytischen Geometrie bekannt ist, wird die Natur einer solchen Curve immer durch zwei Gleichungen zwischen den Coordinaten derselben dargestellt. Man hat also, da wir die Coordinaten der auf der Grenze der Oeffnung gelegenen Punkte durch $\alpha, 6, \gamma$ bezeichnet haben, im vorliegenden Fall zwei Gleichungen zwischen $\alpha, 6, \gamma$, die wir durch

$$\gamma = f\alpha, \quad 6 = \varphi\alpha,$$

darstellen wollen, wo f und φ, zwei willkürliche Functionszeichen angeben, deren Natur in jedem besondern

all durch die Beschaffenheit der die Oeffnung begrenden Curve gegeben ist.

§. 24.

Eliminiren wir aus den vier Gleichungen

$$1)\ y - \eta = \frac{\eta - \beta}{\xi - \alpha}(x - \xi),$$

$$2)\ z - \zeta = \frac{\zeta - \gamma}{\xi - \alpha}(x - \xi),$$

$$3)\ \gamma = f\alpha, \quad 4)\ \beta = \varphi\alpha$$

die drei Gröfsen α, β, γ, so erhalten wir eine Gleichung zwischen den veränderlichen Coordinaten x, y, z und den bestimmten ξ, η, ζ; und diese Gleichung wird nothwendigerweise die einer Oberfläche seyn, da sie nur Eine Relation zwischen den Coordinaten x, y, z darbietet.

Aus der analytischen Bildung der Gleichung dieser Oberfläche sieht man, dafs auf derselben alle grade Linien liegen müssen, die durch den festen Punkt, dessen Coordinaten ξ, η, ζ sind, und durch jeden beliebigen Punkt in der Grenze der Oeffnung gezogen werden können. Sie ist also die Gleichung einer Kegeloberfläche, und im optischen Sinne die Gleichung der Oberfläche des Strahlenkegels, der von dem leuchtenden Punkt durch die gegebene Oeffnung strömt.

§. 25.

Um die allgemeine Gleichung dieser Kegelfläche darzustellen, hat man aus den Gleichungen (1) und (2)

$$\frac{\eta - \beta}{\xi - \alpha} = \frac{y - \eta}{x - \xi},$$

$$\frac{\zeta - \gamma}{\xi - \alpha} = \frac{z - \zeta}{x - \xi}.$$

Nun sind aber β und γ Functionen von α; ξ, η, ζ hingegen constante Gröfsen; die Brüche

$$\frac{\eta - \beta}{\xi - \alpha}, \quad \frac{\zeta - \gamma}{\xi - \alpha}$$

werden daher ebenfalls als Functionen von α zu trachten seyn, d. h. der eine Bruch ist eine Fun des andern. Es wird daher

$$\frac{\zeta-\gamma}{\xi-\alpha}=\psi\left(\frac{\tau-6}{\xi-\alpha}\right),$$

wo ψ irgend ein Functionszeichen bedeutet. Setzt hierin statt

$$\frac{\zeta-\gamma}{\xi-\alpha},\ \frac{\eta-6}{\xi-\alpha}$$

ihre angegebenen Werthe

$$\frac{z-\zeta}{x-\xi},\ \frac{y-\eta}{x-\xi},$$

so erhält man die verlangte Gleichung der Kegelfläche

$$\frac{z-\zeta}{x-\xi}=\psi\left(\frac{y-\eta}{x-\xi}\right).$$

§. 26.

Nimmt man der Kürze wegen

$$\frac{y-\eta}{x-\xi}=u,$$

so läfst sich vorige Gleichung auch so schreiben:

$$\frac{z-\zeta}{x-\xi}=\psi u,$$

und wenn man differentiirt, und das Differential ψu durch $\psi' u\,.\,du$ bezeichnet,

$$\frac{dz\,(x-\xi)-dx\,(z-\zeta)}{(x-\xi)^2}=\psi' u\,.\,d$$

Da nun aber $u=\frac{y-\eta}{x-\xi}$ war, so erhält man auc

$$du=\frac{dy\,(x-\xi)-dx\,(y-\eta)}{(x-\xi)^2}.$$

Substituirt man diesen Werth von du in die v Gleichung

$$\psi' u\,.\,du=\frac{dz\,(x-\xi)-dx\,(z-}{(x-\xi)^2}$$

... Divisor $(x-\xi)^2$ weg,

$$- dx\,(z-\zeta)$$
$$-\xi) - dx\,(y-\eta)].$$

... die beiden partiellen Differential-

$$\frac{z-\zeta}{x-\xi} - \frac{y-\eta}{x-\xi}\cdot\psi' u$$
$$= \psi' u.$$

... man aus diesen beiden Gleichungen die ... $\psi' u$, so kommt, indem man zugleich ... chung mit $x-\xi$ multiplicirt,

$$-\xi)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (y-\eta)\left(\frac{dz}{dy}\right) = z-\zeta,$$

... Differentialgleichung der in Rede stehenden ...fläche ist.

§. 27.

... kann bei der Aufsuchung der allgemeinen ...ung der Kegeloberfläche auch auf umgekehrte ...erfahren, indem man von der Differentialglei- ... derselben ausgeht, und durch Integration zur ...chen Gleichung gelangt. Bezeichnet man nämlich ... allgemeinen Coordinaten der Berührungsebene einer ...mmen Oberfläche durch X, Y, Z, die Coordinaten ... Berührungspunktes durch x, y, z, so ist die Glei- ...ung der Berührungsebene

$$(x-X)\left(\frac{dz}{dx}\right) + (y-Y)\left(\frac{dz}{dy}\right) = z-Z.$$

...se Gleichung gilt allgemein, welche Beschaffenheit ...h die krumme Oberfläche haben mag, an welche Berührungsebene gelegt werden soll.

In so fern nun aber die Ebene eine Kegeloberfläche ...ühren soll, mufs man eine besondere Eigenschaft Berührung in Betracht ziehen, die der Kegeloberfläche eigenthümlich ist. Man sieht nämlich leicht, dafs,

werde
trac
des

... einer Kegeloberfläche
... die Oberfläche in der
... sie geht also eben-
... Kegels. Bezeichnen wir
... Coordinaten des Scheitels des
... die obige Gleichung für
... gemeinen auch dann noch
... statt der Coordinaten
... Größen ξ, η, ζ setzt; es
... der Kegeloberfläche

$$\ldots \left(\frac{dz}{dy}\right) = z - \zeta,$$

... integriren, bemerke man,
... und y bezeichnet,
... immer durch die

$$\ldots = dz$$

... diese mit der zu

$$\ldots \left(\frac{dz}{dy}\right) = z - \zeta,$$

... Differentialcoefficien-
... man

$$\ldots \left(\frac{dz}{dy}\right)$$

$$\ldots z - \zeta).$$

... Differentialcoefficient
... um diese Gleichung
... der Nenner sowohl,

$$\left(\frac{dz}{dy}\right) = \frac{dz\,(x-\xi) - dx\,(z-\zeta)}{dy\,(x-\xi) - dx\,(y-\eta)}$$

ull gesetzt werden müssen, so dafs die Differential-eichungen

$$dz\,(x-\xi) = dx\,(z-\zeta),$$
$$dy\,(x-\xi) = dx\,(y-\eta)$$

att finden. Ihre Integrale sind

$$\frac{z-\zeta}{x-\xi} = c, \quad \frac{y-\eta}{x-\xi} = c',$$

c und c' zwei Constanten ausdrücken. Sieht man n die Constante c' als Function von c an, so dafs ra $c' = \psi c$, so erhält man durch Elimination von c Gleichung

$$\frac{z-\zeta}{x-\xi} = \psi\left(\frac{y-\eta}{x-\xi}\right),$$

lche das Integral der vorgelegten partiellen Differen-gleichung ist.

§. 29.

Um die auf die Gleichung der Strahlenkegel zu ndenden Rechnungen nicht zu verwickelt zu machen, len wir annehmen, die Oeffnung befinde sich in einer ene, die mit der der Coordinaten x und y selbst ammenfällt, und aufserdem kann man noch voraus-en, dafs der Anfangspunkt der Coordinaten sehr e an der Grenze der Oeffnung liegt. Dann ist die ve, durch welche die Seitenlinien des Kegels hin-chgehen, in einer Ebene befindlich, und die §. 24. emein angenommenen Gleichungen

$$\gamma = f\alpha, \quad 6 = \varphi\alpha$$

andeln sich in diese

$$\gamma = o, \quad 6 = \varphi\alpha.$$

Gleichungen (1) und (2) desselben Paragraphen n dann

$$y - \eta = \left(\frac{\eta - 6}{\xi - \alpha}\right)(x - \xi)$$
$$z - \zeta = \left(\frac{\zeta}{\xi - \alpha}\right)(x - \xi).$$

Hieraus folgt

$$\alpha = \frac{z\xi - x\zeta}{z - \zeta}$$

$$\beta = \frac{z\eta - y\zeta}{z - \zeta}$$

folglich auch, da $\beta = \varphi\alpha$,

$$\frac{z\eta - y\zeta}{z - \zeta} = \varphi\left(\frac{z\xi - x\zeta}{z - \zeta}\right),$$

welches die Gleichung des Strahlenkegels ist, der durch eine ebene Oeffnung fällt, deren Begrenzung durch die krumme Linie $\beta = \varphi\alpha$ angegeben wird.

§. 30.

Wir zählen hierbei die positiven Werthe von z von der Oeffnung aus nach dem leuchtenden Körper hin. Legt man nun eine Ebene parallel mit derjenigen Ebene, auf welcher die Oeffnung sich befindet, in der Entfernung k hinter die Oeffnung, so ist die Gleichung dieser Ebene

$$z + k = o,$$

und wenn man den hieraus sich ergebenden Werth von z in die Gleichung des Strahlenkegels

$$\frac{z\eta - y\zeta}{z - \zeta} = \varphi\left(\frac{z\xi - x\zeta}{z - \zeta}\right)$$

substituirt, so kommt

$$\frac{k\eta + y\zeta}{k + \zeta} = \varphi\left(\frac{k\xi + x\zeta}{k + \zeta}\right)$$

für die Gleichung derjenigen krummen Linie, welche durch den Durchschnitt dieses Strahlenkegels mit der auffangenden Ebene entsteht. Die Fläche, welche von dieser Curve eingeschlossen wird, enthält nach den früher gegebenen Erklärungen das Bild des Punktes, von dem der Strahlenkegel ausgeht.

§. 31.

Gesetzt nun, die leuchtende Oberfläche sey eine Ebene, die durch eine ihrer Natur nach gegeben

krumme Linie begrenzt wird, und diese leuchtende Ebene sey aufserdem mit der Ebene der x und y parallel, so sind die Coordinaten ξ, η, ζ der leuchtenden Punkte gewissen Bedingungen unterworfen, indem eines Theils $\zeta = l$ wird, wo l eine constante Gröfse, nämlich die Entfernung der leuchtenden Ebene von der mit einer Oeffnung versehenen, bedeutet, und andern Theils an den Grenzen der leuchtenden Fläche eine Relation zwischen ξ und η Statt findet, die wir durch

$$\eta = f\xi$$

bezeichnen wollen, wo f ein willkürliches Functionszeichen ist, und diese Gleichung die Natur der die leuchtende Fläche begrenzenden Curve ausdrückt.

Setzt man also in der Gleichung

$$\frac{k\eta + y\zeta}{k + \zeta} = \varphi\left(\frac{k\xi + x\zeta}{k + \zeta}\right)$$

statt ζ, und $f\xi$ statt η, so wird

$$\frac{kf\xi + yl}{k + l} = \varphi\left(\frac{k\xi + xl}{k + l}\right)$$

die Gleichung des Bildes eines Punktes, der an den Rändern der leuchtenden Fläche liegt.

§. 32.

Substituirt man in dieser Gleichung statt ξ, $\xi + d\xi$, so erhält man die Gleichung eines Bildes, das von einem Punkt entsteht, der dem ersten unendlich nahe liegt. Man erhält dann vermittelst der gewöhnlichen Bezeichnungsart, für die Differentiation einer Function die Gleichung dieses zweiten Bildes

$$\frac{kf\xi + yl}{k + l} + \frac{kf'\xi . d\xi}{k + l} = \varphi\left(\frac{k\xi + xl}{k + l}\right) + \varphi'\left(\frac{k\xi + xl}{k + l}\right) \cdot \frac{kd\xi}{k + l}$$

oder da die ersten Glieder vor und hinter dem Gleichheitszeichen sich von selbst aufheben, und bei den übrigen Gliedern der Factor $\frac{kd\xi}{k + l}$ weggelassen werden

kann, so erhält man auch

$$f\xi = \varphi'\left(\frac{k\xi + xl}{k + l}\right)$$

§. 33.

Aus dieser Gleichung und der ursprünglichen

$$\frac{kf\xi + yl}{k + l} = \varphi\left(\frac{k\xi + xl}{k + l}\right)$$

lassen sich die Gröfsen x und y als Functionen von bestimmen, sobald die Formen der Functionen f und gegeben werden, und man erhielte auf diese Art d Coordinaten des Durchschnittspunktes der Begrenzung zweier Bilder, die von zwei unendlich nahe liegend Punkten der Begrenzung der leuchtenden Fläche he kommen.

Würde man aus den beiden Gleichungen

$$\frac{kf\xi + yl}{k + l} = \varphi\left(\frac{k\xi + xl}{k + l}\right)$$

$$f'\xi = \varphi'\left(\frac{k\xi + xl}{k + l}\right)$$

die Gröfse ξ eliminiren, so würde man eine Gleichu zwischen den veränderlichen x und y und den consta ten Gröfsen k und l erhalten, welche die Natur d jenigen Curve giebt, auf welcher alle Durchschnit punkte der Bilder aller auf einander folgenden Punk der Begrenzung der leuchtenden Fläche liegen. Die Curve ist aber in optischer Rücksicht nichts ander als das Bild der ganzen leuchtenden Fläche.

§. 34.

Da in den zu behandelnden Gleichungen sowohl Function φ, als auch die Function f vorkommt, v denen die erste die Natur der Oeffnung, die zweite Beschaffenheit der Begrenzung der leuchtenden Flä angiebt, so sieht man, dafs die Gestalt des Bildes v beiden zugleich abhängen wird, und es kommt je darauf an, zu zeigen, wie die genaue Aehnlichkeit

s mit dem Object selbst durch die Beschaffenheit Oeffnung, durch welche die Strahlenkegel hindurch-n, modificirt wird. Hierzu müssen wir zuerst den betrachten, wo die Beschaffenheit der Oeffnung vollständige Aehnlichkeit des Bildes und des Objects bt, welches natürlich dann Statt findet, wenn die ung sich in einen Punkt zusammenzieht.

§. 35.

Ein Punkt kann als ein Kreis angesehen werden, n Halbmesser Null ist; legen wir daher diesen t in den Anfang der Coordinaten, so giebt die hung $6 = \varphi a$ (§. 29.) in vorliegendem Fall

$$66 + aa = o$$

auch $6 = a\sqrt{-1}$. Hierdurch ist die Form der tion φ bestimmt, und die allgemeine Gleichung

$$\frac{kf\xi + yl}{k + l} = \varphi\left(\frac{k\xi + xl}{k + l}\right).$$

in diese über

$$\frac{kf\xi + yl}{k + l} = \frac{k\xi + xl}{k + l}\sqrt{-1}.$$

ie Gröfsen y, x, ξ, k, l insgesammt reell sind, so diese Gleichung nicht bestehen, wenn nicht jeder l, der reelle sowohl als der imaginäre, für sich ist; man hat also die beiden Gleichungen

$$kf\xi + yl = o$$
$$k\xi + xl = o$$

aus ergiebt sich

$$f\xi = -\frac{yl}{k}, \quad \xi = -\frac{xl}{k}$$

ich durch Elimination von ξ

$$-\frac{yl}{k} = f\left(-\frac{xl}{k}\right),$$

hes die Gleichung des Bildes ist, das durch die itende Ebene, deren Gleichung $\eta = f\xi$ ist, ent-t, und man sieht sogleich, dafs beide Figuren ein-r entgegengesetzt ähnlich sind, indem das Ver-

hältnifs der Linien des Bildes zu denen des Objects das von $k : l$ ist *).

§. 36.

Wir wollen nun als besondern Fall annehmen, der leuchtende Körper sey eine grade Linie, die mit der Axe der x parallel geht, und die Begrenzung der Oeffnung ein Kreis vom Halbmesser a. Dann ist die Gleichung der Oeffnung

$$\alpha\alpha + 6\beta = aa,$$

die Gleichung des leuchtenden Körpers

$$y = o,$$

und da wir früher für diese Gleichungen im Allgemeinen die Functionen

$$\beta = \varphi\alpha, \quad \eta = f\xi$$

angenommen hatten, so kommt

$$\varphi\alpha = \sqrt{aa - \alpha\alpha}, \quad f\xi = o.$$

Substituirt man die Werthe dieser Functionen in den Ausdruck (§. 33.)

$$\frac{kf\xi + yl}{k + l} = \varphi\left(\frac{k\xi + xl}{k + l}\right),$$

so erhält man sogleich

$$\frac{yl}{k + l} = \sqrt{aa - \left(\frac{k\xi + xl}{k + l}\right)^2}.$$

Differentiirt man diesen Ausdruck nach ξ, so kommt

$$\frac{k\xi + xl}{\sqrt{aa - \left(\frac{k\xi + xl}{k + l}\right)^2}} = o.$$

Hieraus findet sich $k\xi + xl = o$, und wenn man aus dieser Gleichung und der ersten ξ eliminirt, so bleibt

$$\frac{yl}{k + l} = \pm a \quad .$$

*) Die Annahme $\alpha\alpha + 6\beta = o$ ist etwas willkürlich, man kann viele andere Gleichungen angeben, denen von reellen Werthen ebenfalls nur $\alpha = o$, $\beta = o$ entsprechen; eine andere Ableitung unseres Satzes s. §. 39. G.

l,
en
die

m der
ung

reell sind, so
nn nicht jeder
näre, für sich
chungen

$$\frac{xl}{b}$$

),
ides ist, das durch die
eichung $\eta = f\xi$ ist, ent-
h, dafs beide Figuren ein-
lich sind, indem das Ver-

$$\frac{k\sqrt{rr-\xi\xi}+yl}{k+l}=\sqrt{aa-\left(\frac{k\xi+xl}{k+l}\right)^2}.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach ξ, so kommt

$$\frac{\xi}{\sqrt{rr-\xi\xi}}=\frac{k\xi+xl}{\sqrt{aa-\left(\frac{k\xi+xl}{k+l}\right)^2}}\cdot\frac{1}{k+l},$$

und man sieht sogleich, dafs dieser letztern Gleichung durch die Annahme

$$\frac{\xi}{r}=\frac{k\xi+xl}{a(k+l)}$$

Genüge geleistet wird. Durch Substitution des hieraus sich ergebenden Werthes von $\frac{k\xi+xl}{k+l}$ in die erste Gleichung erhält man

$$\frac{k\sqrt{rr-\xi\xi}+yl}{k+l}=\frac{a}{r}\sqrt{rr-\xi\xi}$$

$$\frac{l}{k+l}\cdot y=\left(\frac{a}{r}-\frac{k}{k+l}\right)\sqrt{rr-\xi\xi}.$$

Hieraus folgt

$$\xi=\pm\sqrt{rr-\left(\frac{rl}{a(k+l)-rk}\right)^2yy}.$$

Aus der Gleichung

$$\frac{\xi}{r}=\frac{k\xi+xl}{a(k+l)}$$

ergiebt sich aber auch

$$\xi=\frac{rlx}{a(k+l)-rk},$$

folglich, wenn man aus dieser und der vorigen Gleichung ξ eliminirt, so kommt, indem man der Kürze wegen den Coefficienten

$$\frac{rl}{a(k+l)-rk}=\mu$$

setzt, die Gleichung

$$\mu x=\pm\sqrt{rr-\mu\mu yy},$$

welche die des Bildes ist, und man sieht aus dersel-

, dafs das Bild ein Kreis vom Halbmesser $\frac{r}{\mu}$ oder
$\frac{(k+l)-rk}{l}$ ist.

Man kann aber noch eine zweite Auflösung finden, ebenfalls auf einen Kreis führt; denn quadrirt man Gleichung

$$\frac{\xi}{\sqrt{rr-\xi\xi}} = \frac{k\xi+lx}{\sqrt{aa-\left(\frac{k\xi+xl}{k+l}\right)^2}} \cdot \frac{1}{k+l}$$

d läfst die sich aufhebenden Glieder weg, so bleibt

$$\xi^2\left(\frac{1}{rr}-\frac{kk}{aa(k+l)^2}\right) = \frac{x^2l^2+2lkx\xi}{aa(k+l)^2}$$

d aus dieser Gleichung erhält man zwei Werthe, von nen der eine der vorhin für ξ angegebene ist. Der dere wird

$$\xi = -\frac{xlr}{a(k+l)+kr}.$$

eraus ergiebt sich

$$\frac{k\xi+xl}{k+l} = \frac{axl}{a(k+l)+kr}.$$

tzt man nun

$$\frac{rl}{a(k+l)+kr} = \mu',$$

geht die Gleichung

$$\frac{k\sqrt{rr-\xi\xi}+yl}{k+l} = \sqrt{aa-\left(\frac{k\xi+xl}{k+l}\right)^2}$$

diese andere über, wenn man statt ξ, $\frac{k\xi+xl}{k+l}$ ihre rthe setzt

$$\frac{k\sqrt{rr-\mu'\mu'xx}+yl}{k+l} = \frac{a}{r}\sqrt{rr-\mu'\mu'xx}$$

d man sieht leicht, dafs diese Gleichung ebenfalls der auf einen Kreis vom Halbmesser $\frac{r}{\mu'}$ oder

$\frac{a(k+l)+kr}{l}$ führt, der also gröfser ist, als der vorhin gefundene *).

§. 38.

Ist das Object, wie im vorigen Beispiel, ein Kreis, die Oeffnung hingegen eine grade Linie, die parallel mit der Axe der x in der Entfernung h gezogen ist, so hat man

$$\varphi\alpha = h, \quad f\xi = \sqrt{rr - \xi\xi},$$

wo, wie vorher, r den Halbmesser des Objects bedeutet. Substituirt man diese beiden Functionen in die Gleichung

$$\frac{kf\xi + yl}{k+l} = \varphi\left(\frac{k\xi + xl}{k+l}\right),$$

so kommt

$$\frac{k\sqrt{rr - \xi\xi} + yl}{k+l} = h.$$

Dies giebt differentiirt

$$\frac{\xi}{\sqrt{rr - \xi\xi}} = o.$$

Es bleibt also die Gleichung des Bildes, da der letztern Gleichung durch den Werth $\xi = o$ Genüge geleistet wird

$$\frac{\pm kr + yl}{k+l} = h.$$

Der leuchtende Theil des Bildes wird also von zwei graden Linien eingeschlossen, deren Abstände von der Axe der x durch die Ausdrücke

*) Der Kreis, dessen Halbmesser $\frac{a(k+l)-rk}{l}$ ist, enthält diejenigen Punkte, welche von allen Punkten der leuchtenden Fläche Licht erhalten; der Kreis, dessen Halbmesser $\frac{a(k+l)+rk}{l}$ ist, begrenzt den Theil der Tafel, auf welchen überhaupt Strahlen fallen, der Ring zwischen beiden Kreisen enthält also den Halbschatten. G.

$$\frac{h(k+l)+kr}{l}$$

$$\frac{h(k+l)-kr}{l}$$

geben werden.

§. 39.

Die beiden Gleichungen, welche (§. 22.) die grade angeben, die ein Lichtstrahl einnimmt, der von Punkt des Objects, dessen Coordinaten ξ, η, ζ durch einen Punkt der Oeffnung, dessen Coordi- durch α, 6, γ ausgedrückt werden, hindurchgeht, sich auch so schreiben:

$$y - 6 = \frac{\eta - 6}{\xi - \alpha}(x - \alpha),$$

$$z - \gamma = \frac{\zeta - \gamma}{\xi - \alpha}(x - \alpha),$$

man erhält aus denselben

$$\xi = \alpha + \frac{\zeta - \gamma}{z - \gamma}(x - \alpha),$$

$$\eta = 6 + \frac{\zeta - \gamma}{z - \gamma}(y - 6).$$

nen wir nun an, dafs die Oeffnung in der Ebene xy liegt, und die Punkte ihres Umfangs nahe an Anfangspunkte der Coordinaten, so hat man $\gamma = o$. t ferner der Gegenstand, der die Lichtstrahlen aus- kt, in einer Ebene parallel mit der Ebene der xy, bezeichnet man ihre Entfernung von der letztern e durch l, so wird $\zeta = l$. Ist endlich die auf- nde Fläche eine Ebene, deren Abstand hinter der ung durch k bezeichnet wird, so hat man $z = -k$, durch diese Substitutionen erhalten vorige zwei chungen diese Gestalt:

$$\xi = \alpha - \frac{l}{k}(x - \alpha),$$

$$\eta = 6 - \frac{l}{k}(y - 6).$$

etzt man nun der Kürze wegen

$$-\frac{lx}{k} = X, \quad -\frac{ly}{k} = Y,$$

$$\frac{l+k}{k} = \mu,$$

o erhält man

$$\xi = X + \mu . \alpha;$$
$$\eta = Y + \mu . 6.$$

st die Gleichung des Umfangs der leuchtenden Fläche $\eta = f\xi$, so ergiebt sich hieraus

$$Y + \mu 6 = f(X + \mu\alpha),$$

der wenn man die hinter dem Gleichheitszeichen stehende Function vermittelst des Taylorschen Lehrsatzes entwickelt,

$$Y + \mu 6 = fX + \mu\alpha . f'X + \frac{\mu^2\alpha^2}{1.2} f''X + \ldots.$$

Aus dieser Entwickelung sieht man, dafs, wenn 6 und α Null sind, das Bild die Gleichung $Y = fX$ giebt, also ist dasselbe dann dem Objecte völlig ähnlich, und dies findet dann Statt, wenn die Oeffnung ein blofser Punkt ist. Ist aber die Oeffnung eine ausgedehnte Fläche, so findet im Allgemeinen keine Aehnlichkeit Statt; die Unähnlichkeit wird aber desto geringer, je kleiner die Dimensionen α, 6 der Oeffnung sind. Was den hierbei noch in Betracht kommenden Coefficienten μ betrifft, der, wie man leicht sieht, das Verhältnifs der Entfernung des Objects vom Bilde, zu der des Bildes von der Oeffnung angiebt, so wird derselbe desto kleiner, je gröfser die Entfernung des Bildes von der Oeffnung ausfällt. Man wird also rücksichtlich der Aehnlichkeit des Bildes und des Objects gewinnen, je kleiner man die Oeffnung macht und je gröfser man die Entfernung der auffangenden Ebene von der Oeffnung nimmt.

§. 40.

Wenn das Licht von einem strahlenden Punkte ins Auge fällt, so entsteht in diesem ebenfalls ein Bild

es Punktes; allein mit diesem Bilde verhält es sich anders, als mit demjenigen, welches sich zeigt, wenn man das Licht dieses Punktes durch eine Oeffnung in ein verdunkeltes Zimmer fallen läfst, und mit einer weifsen Tafel auffängt. Die Empfindung des Sehens entsteht auf der im Auge hinten liegenden Netzhaut, zu welcher das Licht aber nicht anders gelangen kann, als wenn es vorher die durchsichtigen Materien, mit denen das Auge angefüllt ist, durchlaufen hat.

Man bemerkt auf der äufsern Seite des Auges eine kleine kreisförmige schwarze Fläche, die der **Stern** oder die **Pupille** des Auges genannt wird, und an dieser Stelle allein kann das Licht ins Auge gelangen, da dasselbe aufserdem nur von undurchsichtigen Häuten umschlossen ist. Es wird daher von jedem leuchtenden Punkt ein Strahlenkegel in das Auge gelangen, dessen Grundfläche durch die Gröfse der Pupille bestimmt wird, welche man in diesem Fall als die schon früher erwähnte Oeffnung betrachten kann.

§. 41.

Die in diesem Strahlenkegel enthaltenen einzelnen Lichtstrahlen gehen aber innerhalb des Auges nicht in ihrer ersten Richtung fort, sondern werden mehreremal an den Grenzen der im Auge enthaltenen verschiedenen durchsichtigen Materien gebrochen, und zwar sind diese Materien so geordnet, dafs bei einem gut gebauten Auge die von einem nicht zu nahen Punkt herkommenden Strahlen von ihrem ursprünglichen Wege innerhalb des Auges so abgelenkt werden, dafs sie sich auf der Netzhaut wieder in einem Punkt vereinigen. Bei weitsichtigen Personen wird diese Vereinigung im Allgemeinen erst hinter der Netzhaut, bei kurzsichtigen schon vor der Netzhaut geschehen, so dafs also bei beiden Arten von Augen das Bild eines Punktes kein Punkt, sondern eine kleine Fläche wird. Das Weitere über die genaue Berechnung der Brechung

der Strahlen im Auge kann erst in der Lehre von den gebrochenen Lichtstrahlen oder der Dioptrik auseinander gesetzt werden.

§. 42.

Es sey MN die vordere Fläche des Auges (Fig. 3.), DE die Pupille, C die Mitte derselben, $A'B'$ die Netzhaut, A irgend ein leuchtender Punkt, welcher den Strahlenkegel EAD auf die Pupille wirft. Nehmen wir hier der Kürze wegen an, dafs das ganze Auge mit einerlei Flüssigkeit angefüllt sey, da übrigens die verschiedenen im Auge enthaltenen brechenden Materien eine unter sich nur wenig abweichende Brechungskraft besitzen, so wird der Strahlenkegel $EA'D$ innerhalb des Auges alle diejenigen Strahlen enthalten, welche vom Punkt A ins Auge kommen, und seine auf der Netzhaut liegende Spitze A' wird das Bild des Punktes A angeben.

§. 43.

Errichtet man in der Mitte C der Pupille ein Perpendikel CF, welches man auch rückwärts in das Auge verlängert annehmen kann, so heifst dies die Gesichtsaxe, und man weifs aus Erfahrung, dafs der Punkt eines Gegenstandes dem Auge desto deutlicher erscheint, je kleiner der Winkel ist, welchen die Axe des Strahlenkegels, der von demselben auf die Pupille geworfen wird, mit der Gesichtsaxe macht.

Gewöhnlich nimmt man an, dafs alle diejenigen Gegenstände noch mit ziemlicher Deutlichkeit übersehen werden können, bei denen die Axen der Strahlenkegel einen Winkel mit der Gesichtsaxe machen, der kleiner als 45° ist, und alle Objecte, die man zu gleicher Zeit mit hinlänglicher Deutlichkeit sehen kann, sind in einen rechtwinkligen Kegel eingeschlossen, dessen Axe mit der Gesichtsaxe zusammenfällt, und dessen Spitze in der Mitte der Pupille liegt.

Die Axe eines jeden Strahlenkegels, d. h. der Strahl, welcher durch die Mitte der Pupille geht, heifst die nach dem gesehenen Punkt gehende Gesichtslinie, oder auch der Gesichtsstrahl, und statt des ganzen auf die Pupille fallenden Strahlenkegels, ist es bei den optischen Untersuchungen meistentheils hinlänglich, nur diesen einzelnen, gleichsam mittlern Strahl zu betrachten, da in demselben immer das Bild desjenigen Punkts sich befindet, von welchem dieser Strahl ausgeht.

§. 44.

Erhält das Auge zu gleicher Zeit von zwei strahlenden Punkten A und B Strahlenkegel, so bilden die Axen derselben einen gewissen Winkel mit einander, den man die scheinbare Entfernung beider Punkte von einander nennt. Dieser Winkel ABC hat eben dieselbe Gröfse, als der sich auf die Bilder dieser Punkte beziehende Winkel $A'CB'$.

Uebrigens sieht man aus der Figur, dafs diese Bilder, gegen die Objecte genommen, auf der Netzhaut des Auges eine verkehrte Lage haben, eben so wie dies der Fall bei Betrachtung der in einem verfinsterten Zimmer entstandenen Bilder war.

§. 45.

Woher es komme, dafs die Vorstellungen rücksichtlich der Lage der Gegenstände, die wir durch das Gesicht bekommen, trotz der verkehrten Lage des Bildes, mit denjenigen, die uns das Gefühl giebt, übereinstimmen, ist auf verschiedene Weise zu erklären versucht worden. Kepler z. B. erklärte es auf folgende Art: Wir geben jedem Punkt die Lage, die ihm der Richtung des Lichts gemäfs, welches von ihm in unser Auge strömt, zukommt; nun gehören die Strahlen, welche die Bilder auf dem untern Theil der Netzhaut geben, denjenigen Punkten zu, die aufserhalb des Auges über der Gesichtsaxe liegen, folglich scheint der Punkt,

Allein der Gegenstand bleibt für das Auge nicht bei jedem Gesichtswinkel wirklich sichtbar, denn wenn derselbe bis auf eine gewisse Gröfse abgenommen hat, so wird das auf der Netzhaut entstehende Bild des Objectes zu klein, als dafs der Eindruck merklich seyn könnte. Diese Grenze der Sichtbarkeit mufs aber natürlicherweise für verschiedene Augen selbst verschieden ausfallen, da hierbei viel auf die Empfindlichkeit der Nerven, und auf die mehr oder minder deutliche Darstellung des Bildes auf der Netzhaut ankommen mufs.

§. 50.

Man hat gefunden, dafs bei gutem Auge und heller Erleuchtung eines irdischen Gegenstandes, die Grenze der Sichtbarkeit desselben dann Statt findet, wenn der Gesichtswinkel 40 Secunden beträgt.

Es ergiebt sich aus dieser Beobachtung leicht, dafs dieser Gesichtswinkel dann Statt finden mufs, sobald die Entfernung des Gegenstandes seinen auf der Gesichtsaxe senkrecht stehenden Durchmesser ungefähr 5000 mal übertrifft. In diesem Fall wird das Bild des Gegenstandes auf der Netzhaut so klein werden, dafs der Eindruck verschwindet, und um so mehr mufs dies bei Gegenständen geschehen, die unter noch kleinern Gesichtswinkeln erscheinen.

§. 51.

Um in Zahlen zu berechnen, wie grofs das im Auge entstehende Bild eines solchen Gegenstandes ist, sey O (Fig. 5.) der Mittelpunkt der Pupille, FG die Gesichtsaxe, AB eine auf FG senkrecht stehende Linie, die den Durchmesser des Objects darstellen soll, und in F halbirt ist. Die Entfernung dieses Gegenstandes sey so grofs, dafs der Winkel, den die beiden nach den Endpunkten der Linie gezogenen Gesichtslinien AO, OB einschliefsen, 40 Secunden beträgt.

Nun ist früher erwähnt worden, dafs die Bilder der Punkte eines Objects immer in der Verlängerung der

§. 47.

Zieht man OC, so halbirt diese den Winkel AOB, und AOC oder COB wird der scheinbare Halbmesser genannt. Setzt man die Entfernung des Mittelpunkts der Kugel vom Auge $OC = e$, den wirklichen Halbmesser derselben $AC = r$, den scheinbaren Halbmesser $AOC = \omega$, so wird in dem bei A rechtwinkligen Dreieck AOC

$$AC = CO \cdot \sin AOC,$$

oder mit Einführung unserer Bezeichnungen

$$r = e \cdot \sin \omega.$$

Sind daher zwei der Gröfsen r, e, ω bekannt, so wird man vermittelst dieser Gleichung die dritte finden.

§. 48.

In dem Viereck $ACBO$, welches bei A und B rechte Winkel hat, wird

$$ACB + AOB = 2R$$

und da ACB den Bogen angiebt, welchen das Auge übersehen kann, so folgt hieraus, dafs man nie auf einmal die Halbkugel sieht, sondern immer nur ein Segment derselben, welches von der Halbkugel um den scheinbaren Durchmesser der Kugel verschieden ist.

Dieser scheinbare Durchmesser kann aber in zwei Fällen verschwinden; denn da hierfür erforderlich ist, dafs $\omega = o$ sey, so wird auch $\sin \omega = o$, d. h. $\frac{r}{e} = o$, folglich entweder $r = o$, oder $e = \infty$. Ersterer Fall findet Statt, wenn die Kugel sich in einen Punkt verwandelt, der zweite, wenn die Entfernung des Auges vom Mittelpunkt der Kugel unendlich grofs ist.

§. 49.

Ein Gegenstand mag noch so weit entfernt, und so klein seyn, als er will, so entspricht demselben doch immer ein gewisser Gesichtswinkel, der sich aus der gegebenen Lage desselben gegen das Auge immer berechnen läfst.

dessen Bild oben auf der Netzhaut
liegen.

So passend diese Erklärung zu
man nur einen einzigen Strahl, näm
strahl, des gesehenen Punktes betr
dagegen einzuwenden, dafs bei eine
Strahlenkegel diese Ansicht nicht
kann. Das Bild *A'* des Punktes
Vereinigung aller im Kegel *DA'E*
von denen jeder eine andere Richt
das Auge den Punkt *A* statt in de
so gut in der Richtung *A'a'* und
in jeder andern dazwischen liege
men, da kein Lichtstrahl vor d
Vorzug besitzt. Denn dafs die
die Idee einer mittlern Richtung
wohl anzunehmen. Ueberhaup
den Richtungen der Lichtstrah
Bildes gar keinen Begriff au
die Gröfse und Lage der Bi
und es ist gewifs, dafs die
griffe, die wir durch das Ge
erst durch die Uebung und
beider Arten von Empfindun

§

Denkt man sich vom
Berührungslinien gezog
durch beide Linien g
Mittelpunkt der Kugel
beide Linien mit ein
Durchmesser der
die Kugel in einem
dessen Mittelpunkt
Befindet sich
die besagten Be
AOB der schein

Allein der Gegenstand bleibt für
bei jedem Gesichtswinkel wirklich sicht
derselbe bis auf eine gewisse Gröfse
so wird das auf der Netzhaut ents
Objectes zu klein, als dafs der Eind
könnte. Diese Grenze der Sich
natürlicherweise für verschiedene Ar
den ausfallen, da hierbei viel auf
der Nerven, und auf die mehr o
Darstellung des Bildes auf der Ne

§. 59.

Man hat gefunden, dafs bei
Erleuchtung eines irdischen G
der Sichtbarkeit desselben dan
Gesichtswinkel 40 Secunden

Es ergiebt sich aus diese
dieser Gesichtswinkel dann
die Entfernung des Gegen
sichtsaxe senkrecht stehe
5000 mal übertrifft. In
Gegenstandes auf der N
der Eindruck verschwind
bei Gegenständen gesch
Gesichtswinkeln erschei

Um in Zahlen zu
entstehende Bild eine
(Fig. 5.) der Mittelp
axe, AB eine auf
den Durchmesser d
halbirt ist. Die E
grofs, dafs der W
punkten der Lin
einschliefsen, 4

Nun ist fr
Punkte eines

— AOC)

ie der Tan-

$\overline{ab}$

indet zweimal, in-
gesetzt wird. Es
h geben, für wel-

en, differentiire man den

$\overline{aa + ab}$
betrachtet wird, und setze das
, so erhält man
$+ ab = hh$,
Werth von
$= \sqrt{aa + ab}$,
ck CD der Linie AB unter dem mög-
esichtswinkel zu sehen, muſs die Höhe
über der Linie AC die mittlere geome-
rtionallinie, zwischen den Linien AC und
Es wird also jedenfalls AO gröſser als AC,
als AD werden.
tuirt man diesen Werth von h in die Gleichung

$$\text{tang } COD = \frac{bh}{hh + aa + ab},$$

ält man

$$\text{tang } COD = \tfrac{1}{2} \frac{b}{\sqrt{aa + ab}}.$$

§. 56.

Nimmt man an, daſs der Punkt D unendlich weit von C entfernt liegt, so daſs die nach dem Punkt D

§. 59.

Nach der Formel des vorigen Paragraphen läfst sich diese Depression berechnen, sobald die Höhe des Auges des Beobachters über der Meeresfläche bekannt ist, und da selbige gegen den Erdhalbmesser immer sehr klein ausfällt, so wird man ohne merklichen Fehler

$$\sin \tfrac{1}{2} OCB = \sqrt{\frac{h}{2r}}$$

setzen können, oder wenn man bedenkt, dafs bei einem so kleinen Winkel der Bogen mit seinem Sinus verwechselt werden kann, so ergiebt sich

$$OCB = \sqrt{\frac{2h}{r}}.$$

Will man diesen Winkel in Secunden haben, so mufs dieser Ausdruck noch mit 206264,8 multiplicirt werden. Setzt man hierin

$$r = 3265600 \text{ Toisen},$$

so erhält man den Ausdruck der Depression

$$= 161'',42 \sqrt{h},$$

wo h jedesmal in Toisen ausgedrückt werden mufs.

§. 60.

Multiplicirt man in dem Ausdruck

$$OCB = \sqrt{\frac{2h}{r}}$$

den Bogen, der zu einem mit der Maafseinheit beschriebenen Kreise gehört, noch mit dem Halbmesser der Erde r, so erhält man die wirkliche Entfernung des Gesichtskreises vom Auge auf der kugelförmigen Erde $= \sqrt{2rh}$.

So lange also die Höhen h des Auges über der Erdoberfläche noch klein sind, verhalten sich die Entfernungen, die das Auge von dieser Erhöhung übersehen kann, wie die Quadratwurzeln aus diesen Höhen.

Für die als Ebene angenommene Erde hatte man die Entfernung mit Berücksichtigung des kleinsten Gesichtswinkels, unter welchem ein Gegenstand noch sicht-

ar bleibt $= 5000\,h$ gefunden, folglich verhielten sich ann die Entfernungen wie die Höhen selbst.

Setzt man $h = 5$ Fufs, welches die Höhe des uges ungefähr dann ist, wenn der Mensch aufrecht uf dem Erdboden steht, so ergiebt sich auf der ebenen rde die Weite der Aussicht zu 25000 Fufs, während ie auf der kugelförmigen Erde ungefähr 14000 Fufs eträgt.

§. 61.

Wir haben schon bemerkt, dafs die Gröfse des esichtswinkels, unter welchem die Gegenstände auf- ören sichtbar zu seyn, und den wir in unsern Beispielen = 40 Secunden gesetzt haben, sehr von der Beschaf- enheit des Auges des Beobachters, so wie auch von er der Erleuchtung abhängt; allein man kann doch llen Versuchen zufolge annehmen, dafs für sehr gute ugen, bei gewöhnlicher Beleuchtung nicht glänzender egenstände durch das Sonnenlicht, der angegebene inkel die äufserste Grenze ausmacht. Bei bedecktem immel dürfte man denselben zwei oder dreimal so rofs annehmen. Glänzende Gegenstände bleiben unter el kleinern Gesichtswinkeln sichtbar. So kann man B. einen Silberdrath noch sehr gut sehen, wenn sein cheinbarer Durchmesser nur zwei Secunden beträgt. elbstleuchtende Objecte, wie z. B. die Sterne, lassen er, so weit unsere Beobachtungen reichen, gar keine renze des Gesichtswinkels zu, da es bis jetzt noch cht gelungen ist, einen merklichen Durchmesser dieser egenstände zu beobachten.

§. 62.

Wir können von den Körpern nichts sehen als ihre erflächen, und diese stellen sich dem Auge als Ebenen r, so dafs in der That der blofse Sinn des Gesichts s nicht den Begriff von körperlicher Ausdehnung ver- haffen kann.

§. 59.

Nach der Formel des vorigen Paragrap
diese Depression berechnen, sobald die Höh
des Beobachters über der Meeresfläche beka
da selbige gegen den Erdhalbmesser imme
ausfällt, so wird man ohne merklichen Feh

$$\sin \tfrac{1}{2} OCB = \sqrt{\frac{h}{2r}}$$

setzen können, oder wenn man bedenkt,
so kleinen Winkel der Bogen mit sei
wechselt werden kann, so ergiebt sich

$$OCB = \sqrt{\frac{2h}{r}}.$$

Will man diesen Winkel in Secunde
dieser Ausdruck noch mit 206264,8
Setzt man hierin

$$r = 3265600 \text{ Toisen},$$

so erhält man den Ausdruck der D

$$= 161'',42 \sqrt{h},$$

wo h jedesmal in Toisen ausgedr

§. 60.

Multiplicirt man in dem Au

$$OCB = \sqrt{\frac{2h}{r}}$$

den Bogen, der zu einem
schriebenen Kreise gehört,
der Erde r, so erhält man
des Gesichtskreises vom Au
Erde $= \sqrt{2rh}$.

So lange also die Hö
Erdoberfläche noch klein
fernungen, die das Auge
sehen kann, wie die Qua

Für die als Ebene
die Entfernung mit Ber
sichtswinkels, unter welc

…gesehenen
…er weni-

…r
…gen
…ganze
…ährend
…lige Ab-
… von Kör-
…rfläche eine
…len besitzt.

das Gefühl uns
…er plötzliche Ab-
…ner Oberfläche dar-
…egentheil eine durch
…rleuchtung einem an
eingeschlossenen Körper
. Erblickung von Gegen-
…e dieser gemachten Erfah-
…, ob derselbe eckig oder

§. 65.

…tufung aber in bedeutenden Ent-
…sichtbar bleibt, so ist einleuchtend,
… eines Körpers richtig beurtheilen
… nicht gar zu weit vom Auge ent-
und es erklärt sich daraus zugleich,
…atheils alle weit entfernte Gegenstände
…en, indem bei einem weit entfernten
. die Lichtabstufung nicht mehr als
…ochen, sondern in einander laufend er-

Betrachtet

eine eckig, der

krummen Ober

und Cylinder,

dieselben

schlossen,

gramm, Py

man durch

der runde

Sind

eingeschlo

freilich bei

kennen

und Krüm

Auge unb

Der

wir verg

d. h. ke

Raums

rung

Stande

vom

Allein

eigen

allein

bewu

einz

mitt

star

wer

geg

hab

Sti

Fl

sen

andere Farben waren, desto angenehmer waren
n; aber das erstemal als er Schwarz sah, erschrak
loch gewöhnte er sich bald daran. Vorzüglich
ihm ein Neger, den er einige Monate nach der
tion sah, grofsen Schrecken ein. Als er sein Gesicht
en hatte, konnte er keinesweges die Entfernungen
cheiden, und er glaubte, dafs alle Objecte seine
berührten. Polirte und regelmäfsige Gegenstände
die meiste Annehmlichkeit für ihn, obgleich er
ihre Gestalt kein Urtheil fällen, und auch nicht
en konnte, worin das Angenehme derselben be-
. Er kannte keine Gestalt, und konnte keinen
r von dem andern unterscheiden, obgleich dieselben
der Gröfse als der Gestalt nach sehr verschieden
; sagte man ihm aber, welches die Objecte wären,
er früher durch das Gefühl gekannt hatte, so
er sie ein andermal wieder zu erkennen; da er
so viele Gegenstände kennen zu lernen hatte, so
s er immer den Unterschied zwischen ihnen. Er
hr erstaunt, dafs diejenigen Sachen, welche ihm
die besten geschienen hatten, nicht auch seinem
am angenehmsten vorkamen, und er erwartete,
ie Personen, welche er am meisten liebte, auch

§. 66.

So wenig wir im Stande sind, ... war er nicht ... flächen der Körper durch das Gesi... Gemälde nicht ... wenig können wir auch die Entfern... ...nde, welche sie ... Auge angeben, und alles, was wir ... beiden Sinnen, ... blicks von Gegenständen über ihre ... wäre. Als er ... beruht blofs auf der Erinnerung ...blickte, wollte er ... nungen von Gegenständen, deren ...nte er die Aehn... ...wirklich durch Messung ausgemi... ...chts desto weniger ... jetzt bei andern Körpern zur Ver... ...er nicht begreifen ... Sind die Entfernungen so ... ...in einen so kleinen ... über alle unsere Erfahrungen hi... ...ndem er sagte, daſs ... auch gar nicht im Stande, di... ...als eine Tonne voll ... wie es z. B. bei den Himmelskö... ...bringen.“ ... nur durch ein dunkles Gefühl ... ...enig Licht, und alles ... die kleinen Sterne für entfernte... ...s zu seyn, auch war es ... hauptsächlich wohl der Unter... ...gedehnteres zu denken ... beitragen mag. ...te, daſs das Zimmer, in ... ...n Theil des Hauses aus...

§. 67 ...nicht begreifen, daſs da...

Es dürfte nicht überflüs... ...llte als das Zimmer. ... führen, aus denen sich die... ...rgenommen war, glaubt ... ergiebt, daſs die Entfernung ...des Gesichts ihm so groſs ... Gesicht allein nicht bestimmt ... um sich deswegen diese ... Zuerst soll die Erfahrun... ...genommen, daſs er da... England an einem jungen ... werden würde, zu lese... welcher blind geboren war, ...laubte, er würde bei der ... von Chesselden durch ...le nicht mehr Vergnüge... das Gesicht gegeben wu... ...hm dasselbe bequem un... Smith in seinem Werk ...r, daſs, so lange er blin... *Opticks* §. 132—134.) e...be, zur Nachtzeit übera... daſs die meisten mit der ... die Sehenden nicht i... bei hellem Sonnenlichte e...se Fähigkeit nicht sogleich ... züglich weiſs und roth, ... war, und er hatte lang... ...m des Nachts im Haus...

*) Bei sehr nahen Gegen... in der Richtung der b... Aufschluſs.

...enschen hatte Chesselde... ...ert, und sie lernten alle a...

…ieser; merkwürdig bleibt es …einer im Stande war, seine …dern Gegenstand zu richten; …ger Uebung bald diese Fähig-

§. 68.

…einfache Erfahrung giebt uns …n die Hand, welche man ge… …ehen der Sonne nennt. Ist die …n angefüllt, und schickt die Sonne …die Oeffnungen einer dunkeln Wolke, …in der Luft vorhandenen Dünste …gente Streifen, deren Vereinigungs… …zu liegen scheint.

…g der Sonne von uns ist so grofs, …n Punkt ihrer Oberfläche ausgehenden …in der ganzen Ausdehnung der Erde, …nen Winkel von 17 bis 18 Secunden …nen, welcher ganz unmerklich ist. Man …ne Fehler annehmen, dafs die Sonnen… …einander parallel sind, und die Abwei… …en bei dem sogenannten Wasserziehen …mus ist daher nicht wirklich, sondern

§. 69.

…nämlich nicht unterscheiden können, wie …Entfernung der verschiedenen Theile dieser …ten vom Auge ist, und wir keinen Grund in …sehen finden, warum wir einen Theil derselben …ntfernt setzen sollten, als den andern, so neh… …alle als von gleicher Entfernung an, oder …n sie wohl auch auf die Fläche der scheinbaren …kugel.

…rachtet man nun zwei solche neben einander …Streifen, so werden dieselben der vorigen …zufolge parallel seyn, d. h. ihre gegenseitige

wirkliche Entfernung ist in allen Punkten di
Da nun im Allgemeinen die Wolke gegen die
bei dieser Erscheinung eine solche Lage hat, da
durch die Oeffnung gehenden Strahlen mit der
in ihrer ganzen Ausdehnung auf derselben Seite
Beobachter aus sich befinden, so folgt, dafs die u
Theile dieser Lichtstreifen uns näher liegen, al
oben bei der Wolke befindlichen.

§. 70.

Nun ergiebt sich aber aus den frühern Bet
tungen über den scheinbaren Durchmesser und
scheinbare Entfernung zweier Punkte, dafs, wenn
Punkte immer dieselbe wirkliche Entfernung von ein
haben, ihre scheinbare Entfernung desto gröfser
je näher sie dem Auge liegen.

Hieraus folgt, dafs die untern Theile zweier n
einander laufenden Lichtstreifen eine gröfsere schei
Entfernung von einander haben, als die obern, un
wir allen Theilen eine gleiche Entfernung vom A
beilegen, so glauben wir, dafs die untern Theile
sich weiter von einander entfernt sind, als die ober

Könnten wir durch andere Erfahrungen die
scheinbare Entfernung vom Auge schätzen, so wü
uns gewifs auch die Streifen als parallellaufend
scheinen, wie z. B. bei einem langen parallelepipedis
Balken, vor dessen schmalem Ende wir stehen, wir
uns nicht den obern Theil für schmäler halten, als
einen, obgleich hier ganz derselbe Fall rücksich
der scheinbaren Breite eintritt, als bei den
Lichtstreifen.

§. 71.

Es kann durch folgende Betrachtungen leicht
gesehen, wie grofs die scheinbare Entfernung zw
Lichtstreifen an einer gegebenen Stelle ist. Es
AB (Fig. 8.) die Oberfläche der Erde, welche wir
geringen Ausdehnung desjenigen Theils, welcher hie

Betracht kommt, als eben annehmen können; SC ein Sonnenstrahl, welcher mit der Horizontalebene n Winkel $SCB = H$ macht, der der Höhe der Sonne r Zeit des Phänomens gleich ist; in D sey die effnung der Wolke, durch welche der Sonnenstrahl ht, und die Entfernung derselben von der Erde, $E = h$; in O befinde sich der Beobachter, und der inkel DOE, welchen die nach der Oeffnung der olke gezogene Gesichtslinie mit der Horizontallinie acht, werde durch α bezeichnet; W sey ein beliebiger unkt in dem Strahlencylinder, und die nach ihm geogene Gesichtslinie OW mache mit der Horizontalinie den Winkel $WOC = \varphi$.

Man hat nun im Dreieck DOW die Proportion:

$$DO : WO = \sin OWD : \sin ODW.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} DO &= DE \operatorname{cosec} DOE = h \,.\, \operatorname{cosec} \alpha \\ ODW &= DCE - DOE = H - \alpha \\ OWD &= 180^0 - DOW - DCE + DOE \\ &= 180^0 - \alpha + \varphi - H + \alpha \\ &= 180^0 - H + \varphi, \end{aligned}$$

folglich wenn man diese Werthe in vorige Proportion substituirt

$$h \operatorname{cosec} \alpha : WO = \sin (H - \varphi) : \sin (H - \alpha)$$

und hieraus

$$WO = \frac{h \,.\, \sin (H - \alpha)}{\sin \alpha \,.\, \sin (H - \varphi)}$$

§. 72.

Dieser Ausdruck gilt eigentlich blofs für denjenigen Strahl, der eine solche Lage hat, dafs die durch ihn und das Auge gelegte Ebene senkrecht auf der Horizontalebene steht. Allein da es bei einer Untersuchung dieser Art nicht weiter auf völlig genaue Werthe, sondern auf eine blofse Näherung ankommt, so kann man diese Ausdrücke für alle diejenigen Strahlen gebrauchen, die nicht zu weit von der durch das Auge und die

Sonne gelegten, auf dem Horizont senkrecht stehenden Ebene entfernt sind.

§. 73.

Nimmt man nun einen zweiten Lichtstreifen, der dem ersten in der Entfernung $= e$ parallel läuft, so wird die Entfernung desjenigen Theils desselben, der eben die Höhe über der Oberfläche der Erde hat, als der Punkt W, vom Auge auch $= WO$ seyn. Die scheinbare Entfernung dieser beiden Punkte von einander bezeichne man durch ω, so hat man ein gleichschenkliges Dreieck zu betrachten, in welchem die drei Seiten gegeben sind, und der der Basis gegenüberliegende Winkel ω, welcher die scheinbare Entfernung dieser Punkte ausmacht, gesucht wird. Man hat demnach

$$e = 2\,WO \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\omega,$$

also wenn man den vorhin gefundenen Werth von WO hierin substituirt

$$\sin \tfrac{1}{2}\omega = \frac{e}{2h} \cdot \frac{\sin (H - \varphi) \,.\, \sin \alpha}{\sin (H - \alpha)}.$$

Bezeichnet man den an der Wolke Statt findenden Werth von ω durch ω', so ist daselbst $\varphi = \alpha$, also auch

$$\sin \tfrac{1}{2}\omega' = \frac{e}{2h} \cdot \sin \alpha.$$

Ferner sey der Werth von ω, welcher an der Oberfläche der Erde Statt findet $= \omega''$, so erhält man

$$\sin \tfrac{1}{2}\omega'' = \frac{e}{2h} \cdot \frac{\sin H \,.\, \sin \alpha}{\sin (H - \alpha)},$$

indem daselbst $\varphi = o$ wird. Hieraus ergiebt sich, indem die Werthe von $\sin \frac{1}{2}\omega'$, $\sin \frac{1}{2}\omega''$ mit einander multiplicirt werden

$$\sin \tfrac{1}{2}\omega' \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\omega'' = \frac{ee}{4hh} \cdot \frac{\sin \alpha^2 \,.\, \sin H}{\sin (H - \alpha)}.$$

Sucht man hieraus den Werth von $\frac{e}{2h}$, und substituirt ihn in die Gleichung

$$\sin \tfrac{1}{2}\omega = \frac{e}{2h} \cdot \frac{\sin (H - \varphi) \,.\, \sin \alpha}{\sin (H - \alpha)},$$

rhält man

$$\sin \tfrac{1}{2}\omega = \sin (H - \varphi) \sqrt{\frac{\sin \tfrac{1}{2}\omega' . \sin \tfrac{1}{2}\omega''}{\sin H . \sin (H - \alpha)}}.$$

dieser Gleichung sind alle Gröfsen, welche die unannte ω ausdrücken, meſsbar, so daſs für jeden rth von φ der correspondirende Werth von ω geden werden kann.

§. 74.

Zuweilen zeigt sich die Erscheinung des Wassereens der Sonne so, daſs die angegebenen Lichtifen nicht in der Sonne, sondern in einem derselben enüber liegenden Punkt ihren Vereinigungspunkt zu en scheinen. Diese Erscheinung, welche freilich, en die erste genommen, sehr selten vorkommt, läſst auf gleiche Weise als die vorige erklären; nur ist hierbei nöthig, daſs die Lichtstreifen über dem bachter weggehen, und er sich also zwischen der ne und demjenigen Punkt der Erdoberfläche beet, wo die Strahlen selbige treffen. Unter dieselbe egorie gehört auch die scheinbare Convergenz der hlen gegen das Zenith bei dem Nordlicht.

§. 75.

Das Phänomen, daſs jede ausgedehnte Fläche in Entfernung zu steigen scheint, wie z. B. die Oberhe des Meers, weit in grader Linie fortlaufende usseen, läſst sich ebenfalls vermittelst des Gesichtskels erklären. Wir vergleichen nämlich jede andere ie ihrer Lage nach, mit einer durch das Auge h unserer Schätzung gelegten Horizontallinie. Da die Entfernung einer andern, unter dieser liegenden rizontallinie von der ersten scheinbar immer abnimmt, glauben wir, die untere Linie nähere sich der ersten lich, und steige daher in der Entfernung aufwärts. einem gleichen Grunde scheinen hohe senkrechte ern, denen man sehr nahe steht, oben überzugen, indem ihre scheinbare Entfernung von der

durch das Auge gelegten Verticallinie in der Höhe abnimmt.

§. 76.

Eine sonderbare optische Erscheinung ist die Gestalt des Himmels, der uns im Scheitelpunkt viel näher zu seyn scheint, als im Horizont.

Leicht zu erklären würde diese Erscheinung seyn, wenn sie blofs bei einem mit Wolken bedeckten Himmel Statt fände, denn dann sind die im Horizont befindlichen Wolken wirklich viel weiter von uns entfernt, als die im Scheitel stehenden. Es seyen AB, DE (Fig. 10.) zwei aus dem Mittelpunkt C beschriebene concentrische Kreisringe, von denen der innere AB die Oberfläche der Erde, der äufsere DE die über derselben befindliche Wolkendecke bezeichnet. In G sey der Beobachter, so giebt der nach F verlängerte Halbmesser, für G den Scheitelpunkt oder das Zenith an, und FG ist die Entfernung der daselbst befindlichen Wolken.

Zieht man an G die Berührungslinie GH, welche in H die Wolkendecke schneidet, so wird HG die Entfernung der im Horizont befindlichen Wolken vom Beobachter seyn. Man setze $FG = h$, $HG = x$, den Halbmesser der Erde $GC = a$, so ist bekanntlich

$$h : x = x : 2a - h.$$

Hieraus wird mit Vernachlässigung der höhern Potenzen von h,

$$x = \sqrt{2ah},$$

oder auch

$$h : x = 1 : \sqrt{\frac{2a}{h}}.$$

§. 77.

Wir wollen nun die senkrechte Höhe der Wolken über der Erde zu einer halben Meile annehmen, welches wohl bei ganz bedecktem Himmel das Maximum ist, und da a ungefähr 860 Meilen beträgt, so hat man

$$h : x = 1 : \sqrt{3440},$$

Sonne gelegten, auf dem Horizont sen
Ebene entfernt sind.

§. 73.

Nimmt man nun einen zweiten L
dem ersten in der Entfernung $= e$ l
wird die Entfernung desjenigen Theil
eben die Höhe über der Oberfläche d
der Punkt W, vom Auge auch $=$
scheinbare Entfernung dieser beiden Pu
bezeichne man durch ω, so hat man
liges Dreieck zu betrachten, in
Seiten gegeben sind, und der der
gende Winkel ω, welcher die scheinb
ser Punkte ausmacht, gesucht wird

$$e = 2\,WO \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\omega,$$

also wenn man den vorhin gefund
hierin substituirt

$$\sin \tfrac{1}{2}\omega = \frac{e}{2h} \cdot \frac{\sin (H -$$
$$\sin ($$

Bezeichnet man den an der Woll
von ω durch ω', so ist daselbst

$$\sin \tfrac{1}{2}\omega' = \frac{e}{2h} \cdot \sin \alpha.$$

Ferner sey der Werth von
fläche der Erde Statt findet

$$\sin \tfrac{1}{2}\omega'' = \frac{e}{2h} \cdot \frac{\sin}{\sin}$$

indem daselbst $\varphi = o$ wir
dem die Werthe von sin
multiplicirt werden

$$\sin \tfrac{1}{2}\omega' \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\omega''$$

§. 77.

Sucht man hieraus den
ihn in die Gleichung

$$\sin \tfrac{1}{2}\omega = \frac{e}{2h}$$

mal
die
wird

dafs die
Horizont
er erstere
die letztere,
Horizont alles
und wir immer
Zuständen, dem
Entfernung beizu-

Himmels läfst sich
die Idee über seine
deckten Himmel etwa
übertrügen. Am wahr-
fsere Entfernung, die
bloſs von dem trüben und
das auch bei unbedecktem
elbst besitzt.

§ 78.

en, die scheinbare Gestalt des
ein Kugelsegment anzunehmen,
unter den Füfsen des Beobach-
mmt daher bloſs darauf an, die
Mittelpunkts zu finden. Hierzu
ith folgende Beobachtung an: Er
Lage die Sonne oder ein Stern
ut haben müfste, damit dieses Object
der Mitte zwischen dem Scheitelpunkt
nt befand, und er beobachtete, dafs
, sobald die nach dem Object gezogene
n Winkel von 23 Grad mit dem Hori-

Da nun

$$\frac{ED}{EC} = \sin 2\varphi, \quad \frac{AD}{EC} = 1 - \cos 2\varphi$$

war, so ergiebt sich hieraus

$$\frac{ED}{AD} = \cot \varphi = 3{,}4;$$

also wird der Himmel im Horizont ungefähr drei und ein halb mal entfernter erscheinen, als im Scheitelpunkt.

§. 81.

Will man hingegen die Gleichung vollständig auflösen, so setze man zuerst

$$\text{tang } \alpha = 3 \text{ tang } \theta,$$

so wird aus der Gleichung

$$\sin \varphi^3 - \text{tang } \alpha \,.\, \sin \varphi^2 - \tfrac{1}{4}(3 - \text{tang } \alpha^2) \sin \varphi + \tfrac{1}{2} \text{tang } \alpha = 0$$

folgender Ausdruck

$$\sin \varphi^3 - 3 \text{ tang } \theta \,.\, \sin \varphi^2 - \tfrac{3}{4}(1 - 3 \text{ tang } \theta^2) \sin \varphi + \tfrac{1}{2} \text{tang } \theta = 0$$

und wenn man hierin

$$\sin \varphi = x + \text{tang } \theta$$

setzt, so erhält man

$$x^3 = \tfrac{3}{4} x (1 + \text{tang } \theta^2) - \tfrac{1}{4} \text{tang } \theta (3 + \text{tang } \theta^2).$$

Soll diese Gleichung nach der Cardanischen Regel auflösbar seyn, so findet man leicht, da hiernach

$$\tfrac{1}{16} \text{tang } \theta^2 (3 + \text{tang } \theta^2)^2 > (\tfrac{3}{4})^3 \tfrac{4}{27} \,.\, (1 + \text{tang } \theta^2)^3$$

seyn mufs, dafs in diesem Fall

$$6 \text{ tang } \theta^2 + 3 \text{ tang } \theta^4 > 1$$

oder wenn man diese Gleichung auflöst,

$$\text{tang } \theta > \sqrt{(\sqrt{\tfrac{4}{3}} - 1)}$$

verlangt wird. Dies gäbe tang $\theta > 0{,}393$, während nach dem angenommenen Werthe von α, tang θ nur $= 0{,}141$ wird. Man mufs daher die Gleichung durch die trigonometrischen Functionen auflösen. Setzt man nämlich

$$x = r \,.\, \sin \omega,$$

so wird vorige Gleichung

$$\sin \omega^3 = \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\sin \omega}{rr} (1 + \text{tang } \theta^2) - \tfrac{1}{4} \frac{\text{tang } \theta}{r^3} (3 + \text{tang } \theta^2).$$

$$\frac{CD}{ED} = \frac{\cos 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi}$$
$$\frac{MC}{ED} = \frac{1}{1 - \cos 2\varphi},$$

folglich wird

$$rr + 2r \sin \psi \frac{\cos 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi} = \frac{1 + \cos 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi}.$$

Durch Auflösung dieser quadratischen Gleichung erhält man, wenn man bei der Radicalgröfse blofs das hier anwendbare positive Vorzeichen nimmt,

$$r = \frac{\sqrt{1 - \cos 2\varphi^2 \cos \psi^2} - \cos 2\varphi . \sin \psi}{1 - \cos 2\varphi}$$

Um diese Formel für die Rechnung geschickter zu machen, führe man einen Hülfswinkel θ, so ein, dafs

$$\cos 2\varphi . \cos \psi = \cos \theta,$$

so läfst sich die Gleichung so schreiben:

$$r = \frac{\sin \theta - \cos \theta \text{ tang } \psi}{1 - \frac{\cos \theta}{\cos \psi}}$$
$$= \frac{\sin \theta . \cos \psi - \cos \theta . \sin \psi}{\cos \psi - \cos \theta}$$
$$= \frac{\sin (\theta - \psi)}{2 \sin \frac{1}{2}(\theta - \psi) \sin \frac{1}{2}(\theta + \psi)}$$
$$= \frac{\cos \frac{1}{2}(\theta - \psi)}{\sin \frac{1}{2}(\theta + \psi)}$$

§. 83.

Setzt man in dieser Gleichung statt 2φ seinen numerischen Werth von 33 Grad, so kann man für jeden Werth von ψ den entsprechenden Werth von r berechnen, d. h. für jede wahre Höhe eines Punktes des Himmelsgewölbes ergiebt sich das Verhältnifs seiner scheinbaren Entfernung zur scheinbaren Entfernung des Scheitelpunktes. Der bessern Uebersicht wegen ist dieses Verhältnifs in folgender Tabelle von 10 zu 10 Graden berechnet:

$\psi = 0^0$, $r = 3{,}38$;
10^0, 2,59;
20^0, 2,04;
30^0, 1,66;
40^0, 1,41;
50^0, 1,24;
60^0, 1,13;
70^0, 1,05;
80^0, 1,01;
90^0, 1,00.

§. 84.

Endlich kann man auch noch die Relation zwis
der wahren Höhe eines Punktes der Himmelskugel
dem Horizont, und der scheinbaren Höhe, wie wi
wegen der eingedrückten Gestalt des Himmelsgew
schätzen, auffinden. Nehmen wir z. B. den Punk
(Fig. 12.), so schätzen wir dessen Höhe darnach,
wir die Länge des Bogens AM vom Horizont an,
der Länge AE vergleichen. Bezeichnen wir also
scheinbare Höhe des Punktes M durch ψ', so l
wir derselben in Graden ausgedrückt, einen Werth

$$\psi' = 90^0 \cdot \frac{AM}{AE},$$

während die wahre Höhe desselben Punktes durch
Winkel $MDA = \psi$ angegeben wird. Es ist also
nöthig, die Länge der Bogen AM und AE zu ken
so erhält man die scheinbare Höhe des Punktes
Hierzu hat man zuerst

$$AE = \frac{2\varphi}{1 - \cos 2\varphi}.$$

Ferner wird im Dreieck ADM, da daselbst

$$AD = \frac{\sin 2\varphi}{1 - \cos 2\varphi}$$

ist, (wie man leicht aus der Gleichung

$$r = \frac{\sqrt{1 - \cos 2\varphi^2 \cos \psi^2 - \cos 2\varphi . \sin}}{1 - \cos 2\varphi}$$

m man in derselben $\psi = o$ setzt),

$$\frac{\sin 2\varphi^2}{(1 - \cos 2\varphi)^2} + rr - 2r\frac{\sin 2\varphi \cdot \cos \psi}{1 - \cos 2\varphi}.$$

reieck AMC ergiebt sich dann

$$\tfrac{1}{2} ACM = \frac{AM}{2AC}$$

$$= AM\frac{(1 - \cos 2\varphi)}{2},$$

albmesser des Kreises durch $\frac{1}{1 - \cos 2\varphi}$ wird. Nachdem auf diese Art der Winkel den ist, ergiebt sich die Länge des Bogens

§. 85.

ser Darstellung der Gestalt der eingedrück-kugel ergiebt sich auch die Erklärung der , warum die Sonne und der Mond am nen viel gröfsern Durchmesser zu haben s wenn sie am Himmel höher aufgestiegen u genommen müfste der Durchmesser bei-skörper, wenn sie sich im Horizont be-ner erscheinen, als wenn sie dem Zenith , da sie im Horizont eine gröfsere Ent-uns haben, und der frühern Entwickelung scheinbare Durchmesser eines Objects ab-n seine Entfernung vom Auge wächst. Bei st dieser Unterschied unmerklich, allein bei kann man durch Messungen wirklich finden, urchmesser vom Horizont an bei seinem unimmt. Die angeführte Erscheinung kann iner wirklichen Vergröfserung des schein-messers, sondern blofs unserer Einbildung n werden. Da wir nämlich über die wahre der Sonne und des Mondes kein Urtheil , so setzen wir sie in ihren verschiedenen

$\psi =$	0^0 ,	$r = 3{,}38$;
	10^0 ,	$2{,}59$;
	20^0 ,	$2{,}04$;
	30^0 ,	$1{,}66$;
	40^0 ,	$1{,}41$;
	50^0 ,	$1{,}24$;
	60^0 ,	$1{,}13$;
	70^0 ,	$1{,}05$;
	80^0 ,	$1{,}01$;
	90^0 ,	$1{,}00$.

§. 84.

Endlich kann man auch noch die der wahren Höhe eines Punktes der dem Horizont, und der scheinbaren wegen der eingedrückten Gestalt des schätzen, auffinden. Nehmen wir z (Fig. 12.), so schätzen wir dessen H wir die Länge des Bogens AM vom der Länge AE vergleichen. Bezei scheinbare Höhe des Punktes M wir derselben in Graden ausgedrüc

$$\psi' = 90^0 \cdot \frac{AM}{AE},$$

während die wahre Höhe desselbe Winkel $MDA = \psi$ angegeben w nöthig, die Länge der Bogen A so erhält man die scheinbare H Hierzu hat man zuerst

$$AE = \frac{2\varphi}{1 - \cos}$$

Ferner wird im Dreieck ADM

$$AD = \frac{\sin}{1 - c}$$

ist, (wie man leicht aus der

$$r = \frac{\sqrt{1 - \cos 2\varphi^2}}{1}$$

Stellungen jedesmal in die Entfernung von das Himmelsgewölbe daselbst zu haben scl

Das Bild, welches auf der Netzhaut dem die Strahlen der Sonne oder des Mon fallen, bleibt bei jeder Höhe dieser Himm einerlei Gröſse, wenn wir von der erwähn Veränderung abstrahiren, die dem bloſsei immer unmerklich ist. Indem wir uns ab der Himmelskörper nähere sich uns bei steigen, so machen wir in Gedanken unw Schluſs, der Durchmesser des Himmels sich verkleinert, und zwar in dem Maaſse. wir uns diesen Körper genähert vorstelle gilt auch von der scheinbaren Entfernung von einander, die hoch am Himmel viel ander zu stehen scheinen, als bei ihrem Untergang.

Von der Bewegung des Lichts und den aus derselben entstehenden Erscheinungen.

§. 86.

Das Licht pflanzt sich vom leuchtenden Punkt bis zum Auge nicht augenblicklich fort, sondern es vergeht eine der Entfernung des Objects proportionale Zeit, ehe ein aus dem Object ausgeflossenes Lichttheilchen zum Auge gelangt. Sobald sowohl das Object als auch der Beobachter ruht, wird es in der Beobachtung der Richtung, nach welcher das Object gesehen wird, keinen Unterschied machen, ob das Licht in einer endlichen, oder in einer unendlich kleinen Zeit von demselben in das Auge gelangt; allein sobald eins derselben, das Auge oder das Object, oder beide zugleich in Bewegung sind, und ihre Geschwindigkeit mit der des Lichts in einem merklichen Verhältnisse steht, wird auch die beobachtete Richtung des Lichtstrahls, oder die daraus gefolgerte Lage des Objects, nicht mit der wirklichen Lage desselben übereinstimmen, welche es dann haben würde, wenn die Geschwindigkeit des Lichts unendlich grofs wäre. Der Winkel, welchen diese beiden Richtungen mit einander bilden, wird die Aberration oder die Abirrung des Lichts genannt.

§. 87.

Die Geschwindigkeit des Lichts wurde zuerst von Olaus Römer, vermittelst der Beobachtungen der Verfinsterungen der Jupiterstrabanten entdeckt. Die-

ser ... der zweiten Fin-
Son
ung
die
Ju ... der Beobachtung der
de
al-
so
w ... men wurde, so ist dieser
d
z
l
s

§ 91.

... Erde in der Zwischenzeit
... Beobachtung vom Jupiter ent-
... nach T' zu gehen, nach T''
... man den Unterschied der

$$\frac{MT - MT''}{c}$$

$< MT''$, so wird $MT - MT''$
... zeit

$$\frac{\ldots - MT}{c}$$

... Untersuchung ergiebt sich
... vorigen Paragraphen angege-
... schenzeit der Beobachtungen
... wird, daſs das Licht sich
... windigkeit bewege, und die
... Beobachtungen hat gezeigt, daſs
... der Sonne und der Erde,
... mittlern Entfernung sich
... von 493 Secunden durchlaufe.

§ 92.

... untersuchen, in wiefern die
... des Lichts einen
... Richtung des Licht-

ahls und der nach dem Object vom Auge gezogenen
nie hervorbringt, sobald man annimmt, dafs entweder
s Object oder das Auge, oder auch beide zugleich,
ch gegebenen Richtungen sich im Raume bewegen.
ie Auflösung dieser Aufgabe ist für die astronomischen
issenschaften von der gröfsten Wichtigkeit.

Zuerst betrachten wir den Fall, wo der leuchtende
örper unbeweglich ist, und das Auge nach einer
egebenen Richtung fortrückt. Die Richtung eines
ichtstrahls können wir auf keine andere Art bestimmen,
s dafs wir die Lage derjenigen graden Linie angeben,
ie zwei Punkte des Lichtstrahls, oder zwei auf ein-
nder folgende Lagen des Lichttheilchens in seiner
radlinigen Bahn mit einander verbindet. Hierzu be-
ient man sich entweder der Dioptern oder des Fern-
ohrs; bei ersterm Instrument sind diese beiden festen
unkte die Oeffnung in dem Ocular diopter und der
urchschnittspunkt der Fäden in dem Objectivdiopter;
ei dem Fernrohr ist der eine Punkt die Mitte des
bjectivglases, der andere der Durchschnitt der Fäden
m Brennpunkt. Sind diese Instrumente nun nach irgend
inem Object gerichtet, so legen wir dem von selbigem
erkommenden Lichtstrahl dieselbe Lage bei, welche
as Lineal der Dioptern oder die Axe des Fernrohrs
at. Wir nehmen nun an, dieses Instrument bewege
ich mit dem Auge so fort, dafs es immer seiner ersten
Richtung parallel bleibt, wenigstens während der Zeit,
elche der Lichtstrahl zubringt, um entweder die Länge
er Dioptern oder die Axe des Fernrohrs zu durchlaufen.

§. 93.

Es sey nun *LO* (Fig. 14.) die Lage des Fern-
ohrs zu der Zeit, wo der von einem zu beobachtenden
bject herkommende Lichtstrahl die Mitte des Objectiv-
lases in *L* trifft; die Richtung der Bewegung des
uges sey von *O* nach *P*. Während der Lichtstrahl
as Fernrohr durchläuft, wird sich das Auge oder der

Durchschnittspunkt der Fäden nicht mehr in O befinden, sondern nach O' fortgegangen seyn, so dafs die jetzige Lage des Fernrohrs durch die Linie $O'L'$, welche mit OL parallel geht, angedeutet wird.

Da nun das in grader Linie fortgehende Lichttheilchen einmal im Punkt L, das anderemal im Punkt O' sich befand, so mufs es natürlicher Weise den Weg LO' zurückgelegt haben, und das Object, von dem der Lichtstrahl herkommt, in der Verlängerung der Linie $O'L$ liegen, während die Beobachtung uns die Linie $O'L'$ oder OL als die Richtung angiebt, in welcher das Object liegen soll. Der Winkel $L'O'L$ wird also die Aberration des Lichts seyn. Die Linie $L'O'$ giebt die scheinbare Lage, die Linie $O'L$ die wahre Lage des Objects an.

Man sieht übrigens, dafs das Fernrohr immer nach derjenigen Gegend geneigt werden mufs, wohin die Bewegung des Beobachters gerichtet ist.

§. 94.

Bezeichnet man den Winkel $L'O'P$ durch A, den Winkel $LO'L'$ durch α, so hat man im Dreieck $O'LL'$

$$O'L : L'L = \sin A : \sin \alpha.$$

Da nun die Geschwindigkeiten des Lichts und des Auges, während des kleinen Zeitraums, der hier in Betracht kommt, als gleichförmig angenommen werden, so verhalten sich die Linien LO' und LL', welche vom Licht und Auge in gleichen Zeiten durchlaufen werden, wie die Geschwindigkeiten.

Setzt man die Geschwindigkeit des Lichts $= c$, die des Auges $= v$, so hat man

$$O'L : L'L = c : v,$$

folglich, wenn man diese Proportion mit der ersten verbindet

$$c : v = \sin A : \sin \alpha,$$

oder, indem man das Verhältnifs $\frac{v}{c}$ durch μ bezeichnet,

$$\sin \alpha = \mu . \sin A.$$

Diese Gleichung zeigt, dafs die Aberration gar
t von der Länge des bei den Beobachtungen ge-
uchten Fernrohrs abhängt. Am gröfsten wird sie,
n $A = 90^0$ ist, und sie verschwindet, wenn $A = o$
r $A = 180^0$ ist; d. h. wenn die Richtung der Be-
gung des Auges grade nach dem leuchtenden Punkt
, oder von demselben abwärts geht.

§. 95.

Da die Erde mit dem Beobachter fortwährend in
wegung ist, so müssen natürlich alle Beobachtungen
Lage der Himmelskörper dieser Aberration unter-
rfen seyn, und die Reduction des beobachteten
einbaren Ortes auf den wahren mufs bei jeder
obachtung vorgenommen werden. Bei den terrestri-
en Beobachtungen ist diese unnöthig, weil alle Ge-
nstände in relativer Ruhe sind. Wir wollen daher die
, auf welche die Beobachtungen von der Aberration
reit werden, näher untersuchen.

Die drei Linien $O'L$, $O'L'$ und $O'P$ liegen in
er Ebene, folglich ergiebt sich, dafs, wenn wir die-
en bis an die Himmelskugel verlängert denken, der
hre Ort, der scheinbare Ort des Himmels-
rpers, und der Punkt, wohin die Richtung
r Bewegung der Erde geht, immer in ei-
m gröfsten Kreise liegen, und zwar so,
fs der scheinbare Ort zwischen den bei-
n andern Punkten sich befindet.

§. 96.

Es sey daher (Fig. 15.) ECB die Hälfte der Him-
lskugel, welche nördlich von der Ecliptik EC liegt,
ihr Nordpol. Da die Richtung der Bewegung der
de eine Berührungslinie an ihre Bahn ist, und die
ene der Bahn selbst die Ecliptik ausmacht, so mufs
verlängerte Richtung der Bewegung der Erde die
mmelskugel in dem gröfsten Kreise EC selbst schnei-
n; dies geschehe in P. Die Bewegung der Erde

geschehe von der Sonne aus gesehen von C nach E; in C liege der Anfangspunkt des Widders.

Der Himmelskörper sey in L' beobachtet; legt man daher durch B und L' einen gröfsten Kreis BD', so wird

seine scheinbare Breite $L'D' = 6'$

seine scheinbare Länge $CD' = \lambda'$.

Durch P und L' sey ein gröfster Kreis PQ gelegt, so ist PL' der im vorigen §. durch A bezeichnete Winkel. Der wahre Ort des Himmelskörpers liegt nun ebenfalls auf diesem gröfsten Kreise abwärts von L' nach Q zu, und er sey L, so dafs LL' der im vorigen §. durch α bezeichnete Winkel ist.

Durch L und B lege man ebenfalls einen gröfsten Kreis BD, so wird

die wahre Breite $LD = 6$

die wahre Länge $CD = \lambda$

des Himmelskörpers angeben. Man setze $CP = l$, welcher Bogen als bekannt angesehen werden kann, die Art, wie er gefunden wird, soll nachher angezeigt werden, so hat man die Gröfsen l, $6'$, λ', aus denen λ und 6 gefunden werden sollen.

§. 97.

In dem bei D rechtwinkligen Dreieck $PD'L'$ hat man

$$\cos PL' = \cos PD' . \cos D'L'$$
$$\cot L'PD' = \sin PD' . \cot L'D',$$

d. h. wenn man die angegebenen Bezeichnungen einführt, und aufserdem den Winkel $L'PD' = i$ setzt,

$$\cos A = \cos 6' . \cos (l - \lambda'),$$
$$\cot i = \cot 6' . \sin (l - \lambda').$$

Aus §. 94. hat man noch die Gleichung

$$\sin \alpha = \mu . \sin A,$$

so dafs also aus diesen drei Gleichungen, wenn μ bekannt ist, welche Gröfse die Constante der Aberration heifst, die drei Winkel A, i, α gefunden werden können.

folglich auch

$$\cos A . \sqrt{1 - \mu\mu \sin A^2} - \mu . \sin A^2 = \cos 6 . \cos (l - \lambda).$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man $\mu \sin A^2$ auf die andere Seite setzt, und dann quadrirt

$$1 - \sin A^2 = \cos 6^2 . \cos (l - \lambda)^2 + 2\mu \cos 6 \cos (l - \lambda) \sin A^2 + \mu\mu \sin A^2.$$

Dies giebt

$$\sin A = \sqrt{\frac{1 - \cos 6^2 \cos (l - \lambda)^2}{1 + 2\mu \cos 6 \cos (l - \lambda) + \mu\mu}}$$

$$\sin \alpha = \mu \sqrt{\frac{1 - \cos 6^2 \cos (l - \lambda)^2}{1 + 2\mu \cos 6 \cos (l - \lambda) + \mu\mu}}$$

wodurch A und α einzeln gefunden werden.

Befindet sich der Himmelskörper im Pol der Ecliptik, wo also $6 = 90^0$ ist, so hat man

$$\sin A = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu\mu}}, \quad i = 90^0$$
$$6' = A, \quad l = \lambda'.$$

§. 101.

Die in den vorigen §§. dargestellten genauen Formeln wendet man nur dann an, wenn der Stern dem Pol der Ecliptik äufserst nahe steht; in allen andern Fällen kann man sich mit hinreichender Genauigkeit folgender Näherungsformeln bedienen. Da nämlich der Winkel α nur ungefähr 20 Secunden beträgt, wenn er am gröfsten ist, so kann man die höhern Potenzen dieses Winkels vernachlässigen, und den Sinus dem Bogen, den Cosinus der Einheit gleich setzen. Nimmt man aufserdem

$$6' = 6 + \Delta 6$$
$$\lambda' = \lambda + \Delta\lambda,$$

so sind die Gröfsen $\Delta 6$, $\Delta\lambda$ von derselben Ordnung als α selbst, und man darf rücksichtlich ihrer Sinus und Cosinus dieselbe Annahme machen als für α. Nimmt man die beiden Gleichungen

$$\sin \mathcal{B} = \sin (A + \alpha) . \sin i$$
$$\sin \mathcal{B}' = \sin A . \sin i$$

zieht beide von einander ab, so bleibt

$$\Delta \mathcal{B} . \cos \mathcal{B}' = - \alpha . \cos A . \sin i,$$

da $\alpha = \mu . \sin A$, so wird

$$\Delta \mathcal{B} . \cos \mathcal{B}' = - \mu . \sin A . \sin i . \cos A.$$

ist aber, wie man aus der Figur leicht sieht, im eck PLD'

$$\sin A . \sin i = \sin \mathcal{B}'$$
$$\cos A = \cos \mathcal{B}' . \cos (l - \lambda')$$
$$\sin A . \sin i . \cos A = \sin \mathcal{B}' . \cos \mathcal{B}' . \cos (l - \lambda'),$$

ich, wenn man diesen Werth in vorige Gleichung ituirt, so bleibt

$$\Delta \mathcal{B} = - \mu . \sin \mathcal{B}' . \cos (l - \lambda').$$

§. 102.

Nimmt man ferner die beiden Gleichungen

$$\text{tang } (l - \lambda) = \text{tang } (A + \alpha) \cos i$$
$$\text{tang } (l - \lambda') = \text{tang } A . \cos i$$

zieht sie von einander ab, so kommt

$$\frac{\Delta \lambda}{\cos (l - \lambda')^2} = \frac{\alpha . \cos i}{\cos A^2}$$

, wenn man statt α seinen Werth setzt,

$$\frac{\Delta \lambda}{\cos (l - \lambda')^2} = \frac{\mu \text{ tang } A . \cos i}{\cos A}.$$

hat aber aus den Formeln der vorigen Paragraphen

$$\text{tang } A . \cos i = \text{tang } (l - \lambda')$$
$$\cos A = \cos \mathcal{B}' . \cos (l - \lambda'),$$

ich wird

$$\frac{\text{tang } A \cos i}{\cos A} = \frac{\sin (l - \lambda')}{\cos \mathcal{B}' . \cos (l - \lambda')^2},$$

wenn man diesen Werth in vorige Gleichung subrt, so kommt

$$\Delta \lambda = \mu . \frac{\sin (l - \lambda')}{\cos \mathcal{B}'}.$$

§. 103.

In diesen beiden Formeln kann man beliebig statt $\mathcal{C}'$, λ', auch $\mathcal{C}$, λ schreiben, so dafs durch dieselben sowohl der wahre Ort auf den scheinbaren, als auch umgekehrt der scheinbare auf den wahren reducirt werden kann. Die genäherte Formel

$$\Delta\mathcal{C} = -\mu . \sin \mathcal{C}' \cos (l - \lambda')$$

ist in allen Fällen brauchbar, allein diejenige, welche den Werth von

$$\Delta\lambda = \mu . \frac{\sin (l - \lambda')}{\cos \mathcal{C}'}$$

ausdrückt, wird desto ungenauer, je kleiner der Divisor $\cos \mathcal{C}'$ ist, d. h. je näher der Himmelskörper dem Pol der Ecliptik steht, und dann müssen, wie schon erwähnt wurde, die früher gegebenen genauen Formeln gewählt werden.

§. 104.

Wir haben jetzt noch die Berechnung des Winkels l, und der Gröfse μ, die von der Lage der Erde gegen die Sonne abhängen, zu zeigen. Die Erde beschreibt bekanntlich bei ihrem jährlichen Umlauf um die Sonne eine Ellipse, in deren einem Brennpunkt die Sonne sich befindet. Es sey $AGBH$ (Fig. 16.) diese Ellipse, E der Brennpunkt derselben, die halbe grofse Axe $AC = a$, die halbe kleine Axe $GC = b$, so hat man die Gleichung der Ellipse

$$aayy + bbxx = aabb,$$

wo die Abscissen auf der grofsen Axe vom Mittelpunkt C der Ellipse aus gerechnet werden.

Ist WT eine Berührungslinie der Ellipse im Punkt M, so wird, wenn sich die Erde in M befindet, MW die Richtung ihrer Bewegung seyn, vorausgesetzt, dafs die Erde von A nach G zu geht. Die Lage der Berührungslinie WT wird folgendermafsen gefunden: Man beschreibe über der grofsen Axe AB einen Halbkreis, fälle von M, an welchem Punkt die Berührungs-

linie gezogen werden soll, ein Perpendikel MP auf die grofse Axe, und verlängere dasselbe rückwärts, bis es die Kreislinie in N trifft, ziehe den Halbmesser CN und darauf senkrecht NT, welche die Verlängerung der grofsen Axe in T trifft.

Verbindet man nun die Punkte M und T durch die Linie MT, so ist diese die Berührungslinie an der Ellipse in M. Da PT die dritte Proportionale zu PC und PN ist, und $PC = x$, $NC = a$, gesetzt wurde, so hat man

$$x : \sqrt{aa - xx} = \sqrt{aa - xx} : PT$$

$$TP = \frac{aa - xx}{x}.$$

Da nun ferner

$$MP = TP \,.\, \text{tang}\, MTP,$$

so wird, wenn man statt MP seinen Werth y setzt,

$$\text{tang}\, MTP = \frac{xy}{aa - xx}.$$

§. 105.

Nun sey KL (Fig. 17.) die nach dem Frühlingsäquinoctialpunkt gezogene Linie, von welcher aus die Länge gezählt wird, so ist LMW der Winkel, den wir früher durch l bezeichnet haben. Der Winkel LME ist die Länge der Sonne; kennt man also noch den Winkel WME, den die Berührungslinie mit dem nach M von der in E befindlichen Sonne gezogenen Radius Vector macht, so hat man

$$l = \odot - WME,$$

wo $\odot$ die Länge der Sonne bedeutet.

Betrachtet man die Bahn der Erde als einen Kreis, welcher bei vielen Anwendungen hinreichend genau ist, da das Verhältnifs der beiden Axen $b : a$ der Einheit sehr nahe kommt, so ist

$$WME = 90^0, \quad l = \odot - 90^0.$$

Setzt man daher diesen Werth von l in die Gleichungen

$$\Delta\beta = -\mu . \sin\beta . \cos(l-\lambda)$$
$$\Delta\lambda = +\mu . \frac{\sin(l-\lambda)}{\cos\beta},$$

so erhält man, da

$$\cos(\odot - 90 - \lambda) = -\sin(\lambda$$
$$\sin(\odot - 90 - \lambda) = -\cos(\lambda$$

die Werthe

$$\Delta\beta = +\mu . \sin\beta : \sin(\lambda - \odot)$$
$$\Delta\lambda = -\mu . \frac{\cos(\lambda - \odot)}{\cos\beta},$$

und diese Formeln werden gewöhnlich von d
nomen zur Berechnung der Aberration in L
Breite angewendet.

§. 106.

Die erste Beobachtung der hieraus ent
Veränderung in dem Stande der Sterne sch
von Bradley her, und derselbe gab auch die E
dieses sonderbaren Phänomens. Seine Beob
über den Stern γ im Drachen, die er eige
Molyneux zu dem Zweck angestellt hatte.
fernung der Fixsterne von uns zu finden; z
Folgendes: Vom dritten December 1725 an w
mal der Abstand des Sterns vom Zenith
wobei sich aber kein merklicher Unterscl
Stellungen des Sterns zeigte. Am 17. De
derselbe etwas südlicher vom Zenith und e
Tage noch mehr, bis er im Anfang Mär
gröfste südliche Veränderung von etwa zw
den erreicht hatte. In der Mitte des A
wieder nördlicher, bis er im Anfang Juni
distanz wieder erreicht hatte, als Anfa
bei der ersten Beobachtung. Der Stern
wärts zu rücken, bis in den September
Secunden nördlicher war, als im Juni.
der Stern wieder nach Süden zurück, l
ber 1726 wieder dieselbe Lage hatte,
des vorigen Jahres.

$\sin(\lambda - \odot) = \sin(270^0 - \odot) = -\cos\odot$,
welcher Werth für diesen Stern sehr nahe Statt findet, so bleibt

$$\Delta z = +\mu \sin 6 . \cos\odot.$$

Ferner ist $\sin 6 = \sin 75^0$ der Einheit fast gleich, wir können daher kurz die Gröfse

$$\mu . \sin 6 = 20 \text{ Secunden}$$

setzen, also wird

$$\Delta z = 20'' . \cos\odot.$$

§. 108.

Man sieht aus dieser Formel, dafs für einen Stern, welcher ungefähr 270° Länge hat, und dem Pol der Ecliptik ziemlich nahe steht, wie es bei dem von Bradley beobachteten Stern γ im Drachen der Fall ist, die bei dem Durchgang des Sterns durch den Meridian gefundene Zenithdistanz zunehmen mufs, so lange Δz oder $\cos\odot$ positiv ist, d. h. während die Länge der Sonne zwischen 270° und 90° enthalten ist. Dies findet bekanntlich vom December bis Juni Statt. Vom Juni bis December hingegen wächst die Länge der Sonne von 90° bis 270°; der Cosinus dieses Winkels ist also dann negativ, so wie auch Δz, folglich nimmt während dieser Zeit die Zenithdistanz ab, und der Stern nähert sich dem Zenith wieder. Die gröfste Entfernung vom Zenith erlangt der Stern, wenn $\cos\odot = +1$, also $\odot = 0$ ist, d. h. im März; seine kleinste Entfernung vom Zenith findet hingegen dann Statt, wenn Δz seinen gröfsten negativen Werth erreicht, d. h. wenn $\cos\odot = -1$ oder $\odot = 180^0$ wird, welches im September eintritt. Vergleicht man diese aus der Formel erhaltenen Resultate mit denen der Beobachtungen §. 106., so sieht man, dafs beide mit einander übereinstimmen.

§. 109.

Betrachtet man die Erdbahn als eine Ellipse, so wird der Winkel WME, welchen die Richtung der

ewegung der Erde mit dem nach der Sonne gezoge-
n Radius Vector (Fig. 16.) bildet, kein rechter seyn,
ndern im Allgemeinen einen veränderlichen Werth
ben. Um denselben zu finden, hat man im Dreiecke
MT die Proportion

$$EM : ET = \sin MTP : \sin TME.$$

s ist aber

$$\begin{aligned} EM^2 &= PM^2 + EP^2 \\ &= PM^2 + (CP - EC)^2 \\ &= PM^2 + CP^2 + EC^2 - 2CP.EC. \end{aligned}$$

e Gleichung der Ellipse ist

$$aayy + bbxx = aabb$$

d die Excentricität EO derselben wird

$$EC = \sqrt{aa - bb}.$$

esen Ausdruck setzen wir $= ae$, wo e die Excentri-
ät der Erdbahn im astronomischen Sinn, d. h. das
rhältnifs der in der Geometrie sogenannten Excentri-
ät zur halben grofsen Axe angiebt. Hierdurch er-
lt man

$$\begin{aligned} aaee &= aa - bb; \\ bb &= aa\,(1 - ee), \end{aligned}$$

nd wenn man diesen Werth von bb in die Gleichung
er Ellipse substituirt, und den allen Gliedern gemein-
chaftlichen Factor aa wegläfst, so wird

$$\begin{aligned} yy &= (aa - xx)\,(1 - ee) \\ &= aa - xx - eeaa + eexx, \end{aligned}$$

un ist aber

$$PM = y, \quad CP = x, \quad EC = ae,$$

olglich, wenn man diese Werthe in den Ausdruck

$$EM^2 = PM^2 + CP^2 + EC^2 - 2CP.EC$$

ubstituirt, so kommt

$$\begin{aligned} EM^2 &= yy + xx + aaee - 2aex \\ &= aa - 2aex + eexx = (a - ex)^2 \end{aligned}$$

ndem man den oben angegebenen Werth von yy sub-
tituirt; folglich erhält man durch Ausziehung der
Quadratwurzel

$$EM = a - ex.$$

welch [illegible] $- EP = TP + PC - EC$
so b[illegible] [illegible]tangente an der Ellipse, [illegible]

Fe[illegible]
kö[illegible]

se[illegible]

$$[illegible] = \frac{a(a - ex)}{x}$$

$$[illegible] - ex : \frac{a(a - ex)}{x}$$

$$= [illegible] : a.$$

§ 110.

[illegible] § 104. gefunden, daſs

$$[illegible] = \frac{xy}{aa - xx},$$

$$[illegible] = \frac{x\sqrt{1 - ee}}{\sqrt{aa - eexx}}$$

$$[illegible] = \frac{\text{tang } MTP}{\sqrt{1 + \text{tang } MTP^2}}$$

$$= (aa - xx)(1 - ee).$$

[illegible] gegebene Proportion

$$[illegible] = \sin MTP : \sin TME$$

[illegible] folgende

$$[illegible] \frac{\sqrt{1 - ee}}{\sqrt{aa - eexx}} : \sin TME,$$

[illegible]

$$[illegible] = \frac{a\sqrt{1 - ee}}{\sqrt{aa - eexx}}.$$

[illegible] ist die Gröſse e sehr klein,

[illegible]

$e = 0{,}0167787$
$ee = 0{,}000281525.$

§. 111.

wickelt man den Werth des sin TME in eine die nach den Potenzen von e fortschreitet, und issigt alle Glieder, welche eine höhere Potenz, Quadrat von e enthalten, so kommt

$$\sin TME = 1 - \tfrac{1}{2} ee \left(1 - \frac{xx}{aa}\right),$$

an sieht, dafs bei der Erde der Winkel TME ur wenig von 90° verschieden seyn kann, da o kleine Gröfse ist. Wir müssen nun aber die x anders ausdrücken, um diesen Winkel für chnung der Aberration geschickt zu machen. m Ende sey der Winkel MEA, welchen der Sonne gezogene Radius Vector mit der grofsen der sogenannten Apsidenlinie einschliefst $= \varphi$, an im Dreieck EMP

$$EP = EM . \cos \varphi,$$

$EP = x - ae$, $EM = a - ex$ (§. 109.),

uch

$$(x - ae) = (a - ex) \cos \varphi,$$

us erhält man

$$x = a . \frac{\cos \varphi + e}{1 + e \cos \varphi},$$

n man diesen Werth in eine Reihe entwickelt:

$= a (\cos \varphi + e \sin \varphi^2 - ee \cos \varphi \sin \varphi^2)$.

Werth von x anbetrifft, welcher bei dem von sin TME angewendet wird, so sieht s es hinreichend ist, in diesem Fall

$$x = a . \cos \varphi$$

, weil, unserer Voraussetzung zufolge, alle von e, welche das Quadrat übersteigen, weg- werden sollen. Es kommt dann

$$\sin TME = 1 - \tfrac{1}{2} ee \sin \varphi^2.$$

iben so wird auch

$$ET = TP + EP = TP + P$$

Es ist aber TP die Subtangente an der
wir §. 104.

$$= \frac{aa - xx}{x}$$

gefunden haben, also wird

$$ET = \frac{aa - aex}{x} = \frac{a(a -}{x}$$

und hieraus folgt

$$EM : ET = a - ex : \frac{a(a}{}$$

$$= x : a.$$

§. 110.

Ferner hatten wir §. 104. gefu

$$\text{tang } MTP = \frac{x}{aa}$$

folglich wird

$$\sin MTP = \frac{x\sqrt{1}}{\sqrt{aa}}$$

wenn man bedenkt, dafs

$$\sin MTP = \frac{t}{\sqrt{1}}$$

$$yy = (aa$$

Die zu Anfang §. 109. gegebe

$$EM : ET = \sin$$

verändert sich daher in folge

$$x : a = \frac{x\sqrt{1 -}}{\sqrt{aa -}}$$

und hieraus findet sich

$$\sin TME =$$

Bei der Erdbahn ist
hat nämlich

§. 115.

Aus §. 111. haben wir die Relation

$$x = a \cdot \frac{\cos\varphi + e}{1 + e\cos\varphi};$$

also, wenn wir diesen Werth in den Ausdruck $\sqrt{\frac{a+ex}{a-ex}}$ substituiren, so kommt

$$\sqrt{\frac{a+ex}{a-ex}} = \frac{\sqrt{1 + 2e\cos\varphi + ee}}{\sqrt{1-ee}},$$

und hierdurch wird

$$\mu = \frac{m}{ca\,(1-ee)} \cdot \sqrt{1 + 2e\cos\varphi + ee},$$

oder, wenn man statt $\cos\varphi$, $-\cos(\odot - \gamma)$ setzt (§. 112.)

$$\mu = \frac{m}{ca\,(1-ee)} \cdot \sqrt{1 - 2e\cos(\odot-\gamma) + ee}$$

$$= \frac{m}{ca}\left[1 - e\cos(\odot-\gamma) + ee + \tfrac{1}{2}ee\sin(\odot-\gamma)^2\right].$$

Ferner haben wir, da $l = \odot - WME$

$$\cos(l-\lambda) = \cos(\odot - \lambda - WME)$$
$$= \cos(\odot-\lambda)\cos WME + \sin(\odot-\lambda)\sin WME$$
$$\sin(l-\lambda) = \sin(\odot - \lambda - WME)$$
$$= \sin(\odot-\lambda)\cos WME - \cos(\odot-\lambda)\sin(WME).$$

Vernachlässigen wir nun auch noch das Quadrat von e in unsern Rechnungen, so wird

$$\sin WME = 1, \quad (\S.\ 113.)$$
$$\cos WME = e\,.\sin(\odot-\gamma)$$
$$\cos(l-\lambda) = e\,.\cos(\odot-\lambda)\sin(\odot-\gamma) + \sin(\odot-\lambda)$$
$$\sin(l-\lambda) = e\,.\sin(\odot-\lambda)\sin(\odot-\gamma) - \cos(\odot-\lambda)$$
$$\mu\,.\cos(l-\lambda) = \frac{m}{ca}\left[-\sin(\lambda-\odot) + e\,.\sin(\lambda-\gamma)\right]$$
$$\mu\,.\sin(l-\lambda) = \frac{m}{ca}\left[-\cos(\lambda-\odot) + e\,.\cos(\lambda-\gamma)\right].$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichungen (§. 103.)

$$\Delta B = -\mu\,.\cos(l-\lambda)\sin B$$
$$\Delta L = +\mu\,.\sin(l-\lambda)\,.\frac{1}{\cos B},$$

so erhält man

$$\Delta\beta = + \frac{m}{ca} [\sin(\lambda - \odot) - e \sin(\lambda - \gamma)] \sin\beta$$

$$\Delta\lambda = - \frac{m}{ca} [\cos(\lambda - \odot) - e \cos(\lambda - \gamma)] \frac{1}{\cos\beta}$$

Man sieht hieraus, dafs alle Glieder, welche von der Eccentricität der Erdbahn abhängen, nicht periodisch sind, sondern für jeden Stern einen constanten Werth besitzen.

§. 116.

Die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn fanden wir allgemein

$$v = \frac{m}{a\sqrt{1 - ee}} \sqrt{\frac{a + ex}{a - ex}}.$$

Setzt man hierin $x = + a$, so erhält man die gröfste Geschwindigkeit

$$= \frac{m}{a(1 - e)};$$

und nimmt man $x = - a$, so ergiebt sich die kleinste Geschwindigkeit

$$= \frac{m}{a(1 + e)}.$$

Das arithmetische Mittel aus diesen beiden Geschwindigkeiten kann man für die mittlere Geschwindigkeit der Erde nehmen; dies giebt selbige

$$= \frac{m}{a(1 - ee)},$$

oder, wenn wir das Quadrat der Eccentricität vernachlässigen, wird dieselbe $\frac{m}{a}$. Die Gröfse $\frac{m}{ac}$ ist also nichts anders, als das Verhältnifs der mittlern Geschwindigkeit der Erde zu der des Lichts. Da man aber $\Delta\beta$, $\Delta\lambda$ in Secunden berechnet, so giebt man $\frac{m}{ac}$ ebenfalls in Secunden an, indem diese Verhältnifszahl durch 206264"8

[illegible] eben.

[illegible]stante = 20″25, so ist [illegible]igkeit des Lichts zu der

[illegible]

[illegible] das Licht in einer Secunde [illegible] zurücklegt

[illegible]

[illegible] Winkel LLD (Fig. 15.), wel- [illegible] und wahren Ort des [illegible] PQ mit dem durch den [illegible] Breitenkreis bildet, [illegible] Dreieck PLD die Relation

[illegible] sin PLD,

[illegible] $= (A + \alpha)$, so wird

[illegible] $- \lambda)$

[illegible] $- \alpha)$.

[illegible] vermöge der Bewegung [illegible] Ort ändert, wird auch [illegible] beweglichen L seine Lage [illegible] Ort des Himmelskörpers [illegible] Linie um den wahren.

§. 118.

[illegible] Weise entstehenden krum- [illegible] eine Gleichung ausdrücken, [illegible] den Radius Vector, und [illegible] veränderlichen Winkel ansieht, [illegible] Linie, hier dem Breiten- [illegible] man die beiden Gleichungen

sin A,

[illegible] cos $(l - \lambda)$.

[illegible], so kommt

$$\frac{\cos (A + \alpha)^2}{\cos \beta^2}$$

[illegible] vorigen §.

$$\sin \psi = \frac{\sin (l - \lambda)}{\sin (A + \alpha)}$$

bt, wenn man sie ins Quadrat erhebt,

$$\sin (l - \lambda)^2 = \sin (A + \alpha)^2 . \sin \psi^2.$$

dirt man dies zu dem Werthe von $\cos (l - \lambda)^2$, so mmt

$$1 \pm \sin (A + \alpha)^2 \sin \psi^2 + \frac{\cos (A + \alpha)^2}{\cos 6^2},$$

d hieraus ergiebt sich

$$\sin (A + \alpha)^2 = \frac{\sin 6^2}{1 - \sin \psi^2 \cos 6^2},$$

er da man mit Vernachlässigung der höhern Potenzen n α, $\sin (A + \alpha) = \frac{\alpha}{\mu}$ setzen kann,

$$\alpha = \frac{\mu . \sin 6}{\sqrt{1 - \sin \psi^2 \cos 6^2}}.$$

es ist bekanntlich die Gleichung einer Ellipse, von ren Mittelpunkt aus die Radii Vectores ausgehen, d von deren kleiner Axe aus die Winkel gezählt wer- n. Ihre halbe grofse Axe ist $= \mu$, ihre halbe kleine e $= \mu . \sin 6$ *).

---

*) Wir wollen jetzt bei der Bestimmung dieser Curve auf die elliptische Gestalt der Erdbahn Rücksicht nehmen. Wir fanden (S. 115.)

$$\Delta 6 = \frac{m}{ca} [\sin (\lambda - \odot) - e \sin (\lambda - \gamma)] \sin 6$$

$$\cos 6 \, \Delta\lambda = \frac{m}{ca} [\cos (\lambda - \odot) - e \cos (\lambda - \gamma)].$$

Denkt man sich durch den wahren Ort des Sterns zwei rechtwinklige Coordinatenaxen gezogen, so ist, bei der geringen Ausdehnung der Bahn, $\Delta 6 = y$, $\cos 6 . \Delta\lambda = x$, setzen wir $\frac{m}{ca} = \mu$, so wird

$$\frac{y + \mu e \sin (\lambda - \gamma) \sin 6}{\mu \sin 6} = \sin (\lambda - \odot)$$

$$\frac{x - \mu e \cos (\lambda - \gamma)}{\mu} = - \cos (\lambda - \odot).$$

§ 119.

[illegible] die Aberration in Länge [illegible] Voraussetzung gefunden word[illegible] andere Bewegung habe, als [illegible] fast kreisförmigen Bahn dessel[illegible] [illegible]

[illegible] von den Astronomen die sehr wa[illegible] [illegible] aufgestellt ist, daſs die Sonne n[illegible] [illegible] Bewegung habe, die man wohl w[illegible] [illegible] als gradlinig betrachten kann, [illegible] mit an dieser Bewegung Theil nehm[illegible] [illegible] Geschwindigkeit in jedem Punkte der B[illegible] [illegible] zusammengesetzt ist, nämlich aus derjenig[illegible] [illegible] der kreisförmigen Laufbahn haben m[illegible] [illegible] welche die Sonne selbst besitzt.

[illegible] die Richtung, nach welcher die So[illegible] [illegible] in der Ebene der Ecliptik, so wird [illegible] [illegible] durch P bezeichnete Punkt auch nicht [illegible] liegen, und es wird der Mühe werth se[illegible] [illegible] Rechnungsbeispiel betrachtet, die Theo[illegible] [illegible] in dieser Hinsicht zu entwickeln, [illegible] verschiedenen Beobachtungen eine auſs[illegible] [illegible] Ecliptik liegende Richtung der Bewegung [illegible]

[illegible] man auf beiden Seiten und addirt dann, so komm[illegible]

$$\left(\frac{[illegible] \sin(\lambda - \gamma) \sin 6}{[illegible] \sin 6}\right)^2 + \left(\frac{x - \mu e \cos(\lambda - \gamma)}{\mu}\right)^2 =$$

[illegible] hier $y = y' - \mu e \sin(\lambda - \gamma) \sin 6$,

[illegible] $\cos(\lambda - \gamma)$, so ist:

$$\frac{[illegible]}{([illegible] \sin 6)^2} + \frac{x'x'}{\mu\mu} = 1.$$

[illegible] beschreibt also auch hier eine Ellipse, deren gr[illegible] [illegible] der Ecliptik parallel ist, deren kleine Axe $= \mu$ [illegible] [illegible] wird; doch liegt der wahre Stern nicht im Mit[illegible] [illegible] Ellipse, wie bei Annahme einer kreisförmigen B[illegible] [illegible] sondern entspricht den Coordinaten

[illegible] $\mu e \sin(\lambda - \gamma) \sin 6$

[illegible] $- \mu e \cos(\lambda - \gamma)$. G.

nne nach dem Stern λ im Sternbild des Hercules an-
zeigen scheinen.

§. 120.

Die Schlüsse des §. 94. bleiben auch hierbei die-
lben, so dafs die Gleichung

$$\sin \alpha = \frac{v}{c} \sin A,$$

α den Unterschied der Richtungen nach dem schein-
ren und wahren Ort des Sterns, A den Winkel der
ichtung des Fernrohrs mit der der Bewegung der Erde,
die Geschwindigkeit der Erde und c die des Lichts
deutet, beibehalten wird. Eben so mufs auch immer
r scheinbare Ort, der wahre Ort des Himmelskörpers,
d der Punkt, nach welchem zu die Richtung der
ewegung der Erde geht, in einem gröfsten Kreise
gen (§. 95.).

Nur rücksichtlich der Gröfse v ist zu bemerken,
fs dieselbe nicht constant seyn kann, selbst in dem
all, dafs wir die Erde in einem Kreis um die Sonne
ufen lassen.

§. 121.

Es sey nun EC (Fig. 18.) die Ecliptik, in C der
Frühlingsäquinoctialpunkt, B der Pol der Ecliptik, P
er Punkt, nach welchem die Bewegung des Auges
eht; die Länge dieses Punktes $CF = l$, die Breite
$PF = b$; L' sey der scheinbare Ort des Himmelskör-
pers, dessen Länge und Breite CD' und $D'L'$ durch
λ' und $6'$ bezeichnet werden; L ist der wahre Ort des
Himmelskörpers, $CD = \lambda$, $DL = 6$, $PL' = A$.
Setzt man nun noch $L'P' = A'$, $PP'F = i'$, $CP' = l'$,
wird man die vier sphärisch trigonometrischen For-
n der §§. 97. 98. anwenden können, wenn man nur
nselben

$$A = A', \quad i = i', \quad l = l'$$

Man hat daher

$$\cos A' = \cos \mathcal{C}' \,.\, \cos (l' - \lambda')$$
$$\cot i' = \sin (l' - \lambda') \cot \mathcal{C}'$$
$$\sin \mathcal{C} = \sin (A' + \alpha) \,.\, \sin i'$$
$$\text{tang } (l' - \lambda) = \text{tang } (A' + \alpha) \,.\, \cos i'.$$

§. 122.

Wir betrachten die Unterschiede zwischen den wahren und scheinbaren Längen und Breiten

$$\mathcal{C}' - \mathcal{C}, \quad \lambda' - \lambda,$$

die wir vorher durch $\Delta\mathcal{C}$, $\Delta\lambda$ bezeichnet haben, als so klein, dafs die höhern Potenzen derselben ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden können. Man findet dann aus den vorigen Gleichungen nach der Methode der §§. 101 und 102.

$$\Delta\mathcal{C} \,.\, \cos \mathcal{C} = - \alpha \,.\, A' \,.\, \sin i'$$
$$\Delta\lambda = \frac{\alpha \,.\, \cos i' \, \cos (l' - \lambda)^2}{\cos A'^2},$$

oder auch, indem man $\mu \sin A$ statt α, und $\cos \mathcal{C} \cos (l' - \lambda)$ statt $\cos A'$ setzt,

$$\Delta\mathcal{C} = - \mu \,.\, \sin A \,.\, \sin i' \,.\, \cos (l' - \lambda)$$
$$\Delta\lambda = \frac{\mu \,.\, \cos i' \,.\, \sin A}{\cos \mathcal{C}^2}.$$

Bezeichnet man den Winkel $P'LD$ durch u, so ist im Dreieck $P'LD$

$$\cos u = \cos (l' - \lambda) \,.\, \sin i,$$

und da aufserdem im Dreieck PBL

$$\sin A = \frac{\sin (l - \lambda) \,.\, \cos b}{\sin u},$$

so wird

$$\Delta\mathcal{C} = - \mu \,.\, \sin (l - \lambda) \cos b \,.\, \cot u.$$

Ferner ist noch im Dreieck $P'LD$

$$\cos i' = \sin u \,.\, \cos \mathcal{C},$$

folglich, wenn man diesen Werth, so wie den von $\sin A$ in die Gleichung für $\Delta\lambda$, substituirt

$$1) \quad \Delta\lambda \,.\, \cos \mathcal{C} = + \mu \,.\, \sin (l - \lambda) \cos b.$$

Im Dreieck BPL hat man

$$\cot u \sin (l - \lambda) = \cos (l - \lambda) \sin \mathcal{C} - \cos \mathcal{C} \,.\, \text{tang } b,$$

glich

2) $\Delta B = -\mu \cos b . (l - \lambda) \sin B + \mu . \cos B . \sin b$,

durch die verlangten Formeln gefunden sind. Setzt n in ihnen $b = o$, so erhält man die früher entckelten.

§. 123.

Es ist nun noch übrig, die Gröfsen μ, b, l zu stimmen. Wir vernachlässigen hierbei die Eccentriit der Erdbahn, so dafs also die Geschwindigkeit der de in der Bahn constant wird, und die Richtung rselben, ohne Rücksicht auf die Bewegung der Sonne nehmen, an welcher die Erde freilich ebenfalls Theil t, mit dem Radius Vector, der aus der Sonne nach m Ort der Erde gezogen wird, einen rechten Winkel icht. Bei dieser Untersuchung müssen wir folgende itze aus der Mechanik entlehnen:

1) Zwei Geschwindigkeiten, welche ein Punkt zu gleicher Zeit annehmen soll, lassen sich durch eine einzige ersetzen, die man die Mittelgeschwindigkeit nennt.
2) Die Richtungen dieser drei Geschwindigkeiten müssen in einerlei Ebene liegen.
3) Die Gröfse der Mittelgeschwindigkeit ist der Seite eines Dreiecks proportional, dessen beide andere Seiten, die den gegebenen Geschwindigkeiten proportional sind, einen Winkel einschliefsen, der das Supplement desjenigen ist, welchen die Richtungen der gegebenen Geschwindigkeiten bilden.
4) Das Product aus der einen Geschwindigkeit in den Sinus des Winkels, den sie mit der andern gegebenen bildet, ist gleich dem Product aus der Mittelgeschwindigkeit in den Sinus desjenigen Winkels, welchen sie mit dieser zweiten gegebenen einschliefst.

§. 124.

Aus diesen Sätzen lassen sich μ, b, l folgendermafsen ableiten. Im Punkt P' (Fig. 19.) treffe die

Richtung der Bewegung der Erde in ihrer als Kreis angenommenen Bahn, die Ecliptik; die Richtung, welche die Sonne bei ihrer Bewegung annimmt, treffe die Himmelskugel in Q, so wird die Richtung der mittlern Geschwindigkeit der Erde, die aus den beiden vorigen zusammengesetzt ist, die Himmelskugel in einem Punkt R so treffen, dafs die drei Punkte P', Q, R in einem und demselben gröfsten Kreise der Himmelskugel befindlich sind, weil alle drei Richtungen in einer Ebene liegen. Ist nun t die Geschwindigkeit der Erde in ihrer kreisförmigen Bahn, s die der Sonne, und v die aus beiden zu gleicher Zeit Statt findenden Geschwindigkeiten hervorgehende Mittelgeschwindigkeit, so hat man den im vorigen Paragraphen angeführten Gesetzen zufolge:

$$vv = tt + ss + 2ts \,.\, \cos P'Q,$$
$$v \,.\, \sin RQ = t \,.\, \sin P'Q.$$

Setzt man $RP' = \xi$, $QP' = \gamma$, so erhält man durch Substitution dieser Werthe in vorige Gleichungen

$$v \,.\, \sin(\gamma - \xi) = t \,.\, \sin\gamma$$
$$v = \sqrt{tt + ss + 2ts \,.\, \cos\gamma}.$$

Die Länge des Punktes P' ist nach §. 105. $\odot - 90^0$, die Länge des Punktes Q sey L, die Breite B, und die Länge von R ist die im vorigen Paragraphen durch l bezeichnete, so wie die Breite $= b$ ist.

§. 125.

Aus der Verbindung der beiden Gleichungen, zwischen v, t, s, erhält man

$$\sin\xi = \frac{s \,.\, \sin\gamma}{v},$$

$$\cos\xi = \frac{t + s \,.\, \cos\gamma}{v}.$$

Nun ist im Dreieck $P'RR'$:

$$\text{tang}\,(\odot - 90^0 - l) = \cos RP'R' \,.\, \text{tang}\,\xi$$
$$\cos\xi = \cos b \,.\, \cos(\odot - 90^0 - l),$$

oder auch

$$\cot(l - \odot) = \cos RP'R' \cdot \operatorname{tang} \xi$$
$$\cos \xi = -\cos b \cdot \sin(l - \odot).$$

Die Gleichung (1) des §. 122.

$$\Delta\lambda \cdot \cos \beta = + \mu \cdot \sin(l - \lambda) \cos b$$

läßt sich auch folgendermaßen schreiben, indem man statt μ, und statt $\sin(l - \lambda)$ die Entwickelung von $\sin[(l - \odot) - (\lambda - \odot)]$ schreibt,

$$\Delta\lambda \cdot \cos \beta = + \frac{\nu}{c} \cos b \cdot \sin(l - \odot) \cdot \cos(\lambda - \odot) - \frac{\nu}{c} \cos b \cdot \cos(l - \odot) \cdot \sin(\lambda - \odot).$$

Aus den beiden obigen Gleichungen

$$\cot(l - \odot) = \cos RP'R' \cdot \operatorname{tang} \xi$$
$$\cos \xi = -\cos b \cdot \sin(l - \odot)$$

erhält man aber sogleich

$$\cos b \cdot \sin(l - \odot) = -\cos \xi$$
$$\cos b \cdot \cos(l - \odot) = -\cos RP'R' \cdot \sin \xi.$$

Nun war aber auch

$$\cos \xi = \frac{t + s \cdot \cos \gamma}{\nu}$$
$$\sin \xi = \frac{s \cdot \sin \gamma}{\nu},$$

folglich wird hierdurch

$$\nu \cdot \cos b \cdot \sin(l - \odot) = -t - s \cdot \cos \gamma.$$
$$\nu \cdot \cos b \cdot \cos(l - \odot) = -s \cdot \sin \gamma \cdot \cos R'P'R$$

und wenn diese Werthe in den Ausdruck von $\Delta\lambda \cdot \cos \beta$ substituirt werden, so kommt

$$\Delta\lambda \cdot \cos \beta = -\frac{t + s \cdot \cos \gamma}{c} \cdot \cos(\lambda - \odot) + \frac{s}{c} \cdot \sin \gamma \cdot \cos RP'R' \cdot \sin(\lambda - \odot).$$

Im Dreieck $P'QQ'$ hat man

$$\sin \gamma \cdot \sin RP'R' = \sin B$$
$$\cot RP'R' = \cot B \cdot \sin(\odot - 90^0 - L).$$

Multiplicirt man diese beiden Ausdrücke mit einander, so wird

$$\sin\gamma \,.\, \cos RP'R' = -\cos B \,.\, \cos(\odot - L),$$

und da aus demselben Dreieck ebenfalls

$$\begin{aligned}\cos\gamma &= \cos B \,.\, \cos(\odot - 90^0 - L)\\ &= \cos B \,.\, \sin(\odot - L),\end{aligned}$$

so erhält man durch Substitution dieser Werthe von $\sin\gamma \,.\, \cos RP'R'$ und $\cos\gamma$, in obigen Ausdruck von $\Delta\lambda \,.\, \cos\beta$

$$\begin{aligned}\Delta\lambda \,.\, \cos\beta = &-\frac{t}{c} \,.\, \cos(\lambda - \odot)\\ &-\frac{s}{c} \,.\, \cos B \,.\, \cos(\lambda - \odot) \,.\, \sin(\odot - L)\\ &-\frac{s}{c} \,.\, \cos B \,.\, \sin(\lambda - \odot) \,.\, \cos(\odot - L),\end{aligned}$$

oder wenn man die zwei letzten Glieder zusammenzieht,

1) $$\Delta\lambda \,.\, \cos\beta = -\frac{t}{c} \,.\, \cos(\lambda - \odot) - \frac{s}{c} \,.\, \cos B \,.\, \sin(\lambda - L).$$

§. 126.

Die Gleichung (2) des §. 122. läfst sich so schreiben:

$$\begin{aligned}\Delta\beta = &-\frac{v}{c} \,.\, \cos b \,.\, \sin\beta \,.\, \cos(l - \odot) \,.\, \cos(\lambda - \odot)\\ &-\frac{v}{c} \,.\, \cos b \,.\, \sin\beta \,.\, \sin(l - \odot) \,.\, \sin(\lambda - \odot)\\ &+\frac{v}{c} \,.\, \sin b \,.\, \cos\beta.\end{aligned}$$

Nun war aber aus vorigem §.

$$\begin{aligned}\cos b \,.\, \cos(l - \odot) &= -\sin\xi \,.\, \cos RP'R'\\ \cos b \,.\, \sin(l - \odot) &= -\cos\xi,\end{aligned}$$

und wenn man beide Gleichungen quadrirt, die Quadrate addirt, auf beiden Seiten von 1 abzieht, und dann wieder die Wurzel auszieht,

$$\sin b = \sin\xi \,.\, \sin RP'R'.$$

Substituirt man diese Werthe in vorigen Ausdruck, so kommt

$$\mathcal{M} = \frac{v}{c} . \sin \mathcal{C} . \cos (\lambda - \odot) . \sin \xi . \cos RP'R'$$

$$+ \frac{v}{c} . \sin \mathcal{C} . \sin (\lambda - \odot) . \cos \xi$$

$$+ \frac{v}{c} . \cos \mathcal{C} . \sin \xi . \sin RP'R'.$$

Substituirt man hierin noch die Werthe von

$$\sin \xi = \frac{s . \sin \gamma}{v}$$

$$\cos \xi = \frac{t + s . \cos \gamma}{v}$$

$$\cos \gamma = \cos B . \sin (\odot - L)$$

$$\sin \gamma . \sin RP'R' = \sin B$$

$$\sin \gamma . \cos RP'R' = - \cos B . \cos (\odot - L),$$

so ergiebt sich der Ausdruck:

$$2) \quad \mathcal{M} = \frac{t}{c} . \sin \mathcal{C} . \sin (\lambda - \odot)$$

$$- \frac{s}{c} . \sin \mathcal{C} . \cos B . \cos (\lambda - L)$$

$$+ \frac{s}{c} . \cos \mathcal{C} . \sin B,$$

wodurch die verlangten Formeln gefunden sind. Setzt man in denselben $s = o$, d. h. nimmt man die Sonne als stillstehend an, so kommt man auf die früher gegebenen Formeln zurück. Man mufs aber hierbei bemerken, dafs, solange die Aenderung in der Richtung der Bewegung der Sonne noch nicht merklich geworden ist, die von der Geschwindigkeit derselben abhängenden Theile nicht angegeben werden können, da sie constante Werthe haben.

§. 127.

Wir können die zuletzt abgeleiteten Formeln auch noch zu einer andern Art der Aberration anwenden, da

jeder Punkt der Erde, aufser der mit ihrem Mittelpunkt gemeinschaftlichen Geschwindigkeit, noch die aus der Umdrehung der Erde um ihre Axe hervorgehende Geschwindigkeit besitzt. Nehmen wir daher an, dafs s die von der Umdrehung der Erde herrührende Geschwindigkeit des Punktes der Oberfläche der Erde, an welchem beobachtet wird, bedeutet, und L und B die Länge und Breite desjenigen Punktes des Himmels, nach welchem in jedem Augenblick die Bewegung der Drehung gerichtet ist, so geben die in $\frac{s}{c}$ multiplicirten Glieder der vorigen Formel, die Gröfse, welche man die tägliche Aberration nennt.

Was nun die Richtung der Bewegung dieses Punktes der Erdoberfläche betrifft, so sieht man leicht, dafs dieselbe mit der Berührungslinie an dem Parallelkreise zusammenfällt, welchen der Punkt beschreibt, und diese Berührungslinie mufs nothwendig den Punkt des Himmels treffen, wo der Horizont des Beobachters vom Aequator am östlichen Theil des Himmels geschnitten wird. Die grade Aufsteigung dieses Punktes ist daher um 90^0 gröfser als die des culminirenden Punktes des Aequators, oder sie beträgt 90^0 mehr als die in Bogen verwandelte Sternzeit, welche der Beobachter zur Zeit der Beobachtung zählt. Bezeichnen wir diese in Bogen verwandelte Sternzeit durch σ, und bemerken, dafs die Declination des Punktes, nach welchem die Bewegung der Erde gerichtet ist, Null wird, da der Punkt im Aequator selbst liegt, so haben wir zwischen σ, B, L folgende zwei Gleichungen, wenn ε die Schiefe der Ecliptik bedeutet:

$$\cos B \,.\, \cos L = -\sin \sigma,$$
$$\sin B = -\cos \sigma \,.\, \sin \varepsilon.$$

Quadrirt man diese beiden Gleichungen, und addirt ihre Quadrate, so kommt:

$$\cos B^2 \,.\, \cos L^2 + \sin B^2 = \sin \sigma^2 + \cos \sigma^2 \,.\, \sin \varepsilon^2,$$

er wenn auf beiden Seiten — 1 hinzugesetzt, und an die Wurzel ausgezogen wird,

$$\cos B \,.\, \sin L = \cos \sigma \,.\, \cos \varepsilon \text{ *).}$$

§. 128.

Entwickelt man in den Formeln (1) und (2) der §. 125 u. 126. die Ausdrücke $\sin(\lambda - L)$, $\cos(\lambda - L)$, so lassen sich die daselbst gegebenen Formeln so schreiben:

$$\Delta\lambda \,.\, \cos \delta = -\frac{t}{c} \,.\, \cos(l - \odot) - \frac{s}{c} \,.\, \cos B \,.\, \sin\lambda \,.\, \cos L + \frac{s}{c} \,.\, \cos B \,.\, \cos\lambda \,.\, \sin L,$$

$$\Delta\delta = \frac{t}{c} \,.\, \sin \delta \,.\, \sin(\lambda - \odot) - \frac{s}{c} \,.\, \sin \delta \,.\, \cos B \,.\, \cos L \,.\, \cos\lambda - \frac{s}{c} \,.\, \sin \delta \,.\, \cos B \,.\, \sin L \,.\, \sin\lambda + \frac{s}{c} \,.\, \cos \delta \,.\, \sin B;$$

sglich, wenn man hierin die im vorigen §. angegebenen Werthe von $\cos B \,.\, \cos L$, $\cos B \,.\, \sin L$, $\sin B$ substituirt, so kommt

---

*) Da es bei der Wurzelausziehung unentschieden bleibt, ob auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens dieselben Zeichen genommen werden müssen oder verschiedene, so ist wohl folgende Ableitung vorzuziehn: Es ist

$$\cos B = -\cos L \,.\, \sin\sigma + \sin L \,.\, \cos\sigma \,.\, \cos\varepsilon.$$

Multiplicirt man auf beiden Seiten mit $\sin L$, und setzt $1 - \cos L^2$ statt $\sin L^2$, so kommt:

$$\cos B \,.\, \sin L = -\frac{1}{\cos L \,.\, \cos\sigma} \,.\, (\operatorname{tg} L \,.\, \operatorname{tg}\sigma \,.\, \cos\varepsilon) + \cos\sigma \,.\, \cos\varepsilon,$$

und da $\operatorname{tang} L \,.\, \operatorname{tang}\sigma = -\cos\varepsilon$, so erhält man

$$\cos B \,.\, \sin L = \cos\sigma \,.\, \cos\varepsilon$$

wie im Texte. G.

$$= -\frac{\cdot}{\cdot} \cos(\lambda - \odot) + \frac{s}{c} \cdot \sin\lambda \cdot \sin\sigma$$

$$-\frac{\cdot}{\cdot} \cdot \cos\lambda \cdot \cos\sigma \cdot \cos\varepsilon,$$

$$= -\frac{\cdot}{\cdot} \cdot \sin 6 \cdot \sin(\lambda - \odot)$$

$$-\frac{s}{c} \cdot \sin 6 \cdot \cos\lambda \cdot \sin\sigma$$

$$-\frac{s}{c} \cdot \sin 6 \cdot \sin\lambda \cdot \cos\sigma \cdot \cos\varepsilon$$

$$-\frac{s}{c} \cdot \cos 6 \cdot \cos\sigma \cdot \sin\varepsilon.$$

[illegible] tägliche Umdrehung der Erde herrührende [illegible] viel kleiner als diejenige, welche aus [illegible] Bewegung um die Sonne entsteht, indem [illegible] Aberrationsconstanten $\frac{t}{c}$, $\frac{s}{c}$ sich zu einander [illegible], wie die Geschwindigkeit der Erde in [illegible] der Umdrehungsgeschwindigkeit derselben [illegible]. Liegt der Punkt, an welchem beobachtet [illegible] vom Aequator, so verhalten sich die Peripherie der Bahn und der Erde (§. 116.) wie [illegible] und da die Zeiten, in welchen diese Wege [illegible], in dem Verhältnifs von 366,26 : 1 [illegible], so folgt, dafs

$$\frac{s}{c} = 24096 : 366{,}26.$$

[illegible] nach §. 116. die Aberrationsconstante [illegible] folgt, dafs unter dem Aequator das [illegible] 0,311 ist. Unter jeder andern Pol- [illegible] noch mit dem Cosinus der Pol- [illegible] werden.

§. 129.

Wir haben jetzt den Fall zu betrachten, wo sich er leuchtende Punkt bewegt und das Auge ruht. Indem das Licht mit dem leuchtenden Punkt fortgeht, nd von ihm fortgestofsen wird, mufs die Geschwindigeit des Lichts in jedem Augenblick aus zwei verschiedenen Geschwindigkeiten zusammengesetzt seyn, nämlich us derjenigen, welche das Licht hat, wenn es von inem ruhenden Körper ausfliefst, und der, welche der euchtende Punkt selbst besitzt. Da aber alle Körer, die wir beobachten, eine Geschwindigkeit haben, elche gegen die des Lichts sehr klein ist, so wird an immer annehmen können, das Licht durchlaufe den Weg vom leuchtenden Punkt zum Auge blofs mit seiner igenen Geschwindigkeit, als ob der leuchtende Punkt ruhte.

Bezeichnet man die Entfernung desselben vom Auge urch r, die Geschwindigkeit des Lichts durch c, die eit, welche das Licht gebraucht, um den Raum r zu urchlaufen, durch t, so hat man $r = ct$, indem die eschwindigkeit des Lichts als constant angenommen wird.

§. 130.

Gesetzt nun man hat die Lage des leuchtenden unktes, z. B. eines Planeten oder Cometen, für die eit T auf der Erde beobachtet, so wird dies nicht ie wahre Lage seyn, welche der Punkt zu dieser Zeit atte; denn da das Licht die Zeit $t = \frac{r}{c}$ gebrauchte, m von demselben zur Erde zu kommen, so wird dieser unkt um so viel seine Lage geändert haben, als seine ewegung während der kleinen Zeit t ausmacht. Man nufs daher entweder die beobachtete Lage aus der bekannten Bewegung des leuchtenden Punktes so corrigiren, dafs die während der Zeit t Statt findende Veränderung der Lage zur beobachteten hinzugesetzt wird, oder man mufs die Zeit der Beobachtung corrigiren, indem man die Zeit t von derselben abzieht.

§. 131.

Der letzte Fall, wenn sich sowohl das Auge als der leuchtende Punkt bewegt, ist aus den beiden vorigen zusammen gesetzt. Man verbessert nämlich zuerst den beobachteten Ort vermittelst der Aberration, welche in dem Fall Statt findet, wenn sich das Auge allein bewegt, und hierauf geschieht die zweite Correction auf eine der im vorigen §. angegebenen Arten.

Bei den Fixsternen ist blofs die erste Correction nöthig, da wir ihr eignes Fortrücken am Himmel, wenn sie auch eine wirkliche Bewegung haben, nicht bemerken können. Da bei den astronomischen Rechnungen die Entfernung, welche im vorigen §. durch r bezeichnet wurde, nicht in Meilen ausgedrückt, sondern blofs angegeben wird, das wie Vielfache der mittlern Entfernung der Erde von der Sonne sie sey, so mufs die Formel des vorigen §. $r = ct$ etwas geändert werden, um sie dieser Art von Maafs anzupassen. Bezeichnet man nämlich die in Secunden ausgedrückte Zeit, in welcher das Licht die mittlere Entfernung von der Erde zur Sonne durchläuft, durch t', so hat man ebenfalls $1 = ct'$, und verbindet man hiermit die Gleichung $r = ct$, so bleibt $rt' = t$, wo t' gewöhnlich $= 493$ Secunden angenommen wird.

§. 132.

Wir wollen als Beispiel zu dem letzten Fall annehmen, das Auge sowohl als der Körper, welcher beobachtet wird, bewege sich in Kreisen, die in parallelen Ebenen so liegen, dafs die Linie, welche beider Mittelpunkte verbindet, senkrecht auf dieser Ebene steht. Die Winkelgeschwindigkeit beider Punkte, des Auges und des zu beobachtenden Körpers, sey gleich grofs, und habe gleiche Richtung. Nennt man v die Geschwindigkeit des Auges, c die des Lichts, A den Winkel, welchen das nach dem scheinbaren Ort des Objects gerichtete Fernrohr mit der Richtung der Be-

wegung des Auges bildet, α die Aberration, so hat man, wie früher gezeigt worden ist,

$$\frac{v}{c} . \sin A = \sin \alpha,$$

und $A + \alpha$ wäre der Werth des Winkels, welchen die nach dem wahren Ort des Gegenstandes gezogene Gesichtslinie mit der Richtung der Bewegung des Auges bildete, wenn der Gegenstand sich in Ruhe befände. Ferner sey l die Entfernung des Auges vom Object, so ist $\frac{l}{c} = t$ die Zeit, welche das Licht gebraucht, um diese Entfernung zu durchlaufen. Ist nun r der Halbmesser des Kreises, welchen das Auge beschreibt, r' der Halbmesser des Kreises, den der Gegenstand beschreibt, so wird die wirkliche Geschwindigkeit des Gegenstandes, da wir die des Auges $= v$ setzen, und für beide Körper gleiche Winkelgeschwindigkeit annehmen, $\frac{vr'}{r}$. Es wird also der in der Zeit t vom Gegenstand durchlaufene Weg

$$= \frac{vr'}{r} . t = \frac{vr'l}{rc}.$$

Dieser Raum erscheint dem Auge unter einem Winkel $= 6$, der durch die Proportion

$$\sin A : l = \sin 6 : \frac{vr'l}{rc}$$

gefunden wird, und die wahre Neigung des nach dem Ort des Gegenstandes gezogenen Gesichtsstrahls wird, da wir für beide Punkte gleiche Richtung der Bewegung angenommen haben $= A + \alpha - 6$. Wegen der Kleinheit der Winkel α, 6 können wir auch statt der Sinus die Bogen selbst setzen, und dann wird

$$\alpha = \frac{v}{c} . \sin A, \quad 6 = \frac{vr'}{rc} . \sin A$$

$$\alpha - 6 = \frac{v(r - r')}{rc} . \sin A.$$

$$\sin LFE : \sin HFE = n : 1,$$

wo n eine constante Gröfse, das sogenannte Brechungsverhältnifs, ist. Da $HFE = \alpha'$ gesetzt war, so kommt

$$\sin LFE = n \,.\, \sin \alpha',$$

oder wenn wir statt $\sin \alpha'$ seinen Werth substituiren,

$$\sin LFE = \frac{vn}{c} \,.\, \sin A.$$

Der Emanationstheorie zufolge ist aber $c' = nc$, wo c die Geschwindigkeit des Lichts im leeren Raum bedeutet, also bleibt

$$\sin LFE = \frac{v}{c} \,.\, \sin A,$$

welches die frühere Formel ist, und hieraus sieht man, dafs nach der Emanationstheorie die schnellere Bewegung des Lichts im brechenden Mittel die Aberration nicht ändert. Nach der Undulationstheorie ist aber $c' = \frac{c}{n}$, also

$$\sin LFE = \frac{v}{c}\, nn \,.\, \sin A,$$

folglich wird nach letzterer Theorie die Aberration im Verhältnifs von $1 : nn$ vergröfsert, da n bei jedem brechenden Mittel die Einheit übertrifft.

welches man
n Uebergang
durchsichtiges
ittel ins andere,
sselben voraus-
s Licht in einem
s, nach der Ema-
Raume, nach der
ner.

Röhre *ABCD* (Fig.
ie Lage eines Sterns
gefüllt, so wird der
n werden müssen, dafs
ben die Axe *EF* durch-
aufserhalb des Wassers
FG besitzt. Bezeichnen
des Auges durch ν, die
n α', den Neigungswinkel
en die Richtung der Bewe-
, die Aberration durch den
so hat man die schon oft ge-

$$= \sin \alpha',$$

, dafs bei der Annahme des
α' gröfser wird, α kleiner aus-
die Röhre blofs mit Luft gefüllt
me des Vibrationssystems wird das
en.

ich aber bei dem Uebergange des
Wasser eine Brechung oder Ablen-
gen Wege, so dafs der Strahl *HF*
rts gehende Verlängerung schon den
l anzeigt. Dem Brechungsgesetz zu-
n der Dioptrik vorkommt, wird nun,
vom Stern herkommenden Lichtstrahl
r nach *L* verlängert ansehen,

Zieht man QS, QR den Linien AX, AY parallel, so ist: $AR = x - x'$, $AS = y - y'$, $BQ = z - z'$, $AB = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$, folglich:

$$\sin BAQ = \frac{z - z'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}$$

$$\text{tang } QAR = \frac{y - y'}{x - x'},$$

oder wenn man $\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} = r$ setzt:

$$\sin b = \frac{z - z'}{r}$$

$$\text{tang } l = \frac{y - y'}{x - x'}.$$

Da b nicht gröfser als 90^0 sein kann, so ist es durch den Sinus vollkommen bestimmt; l dagegen kann jeden beliebigen Werth haben, wird also durch die Tangente nicht ganz bestimmt, wir haben aber auch

$$\sin l = \frac{QR}{AQ} = \frac{y - y'}{r \cos b}$$

$$\cos l = \frac{AR}{AQ} = \frac{x - x'}{r \cos b}$$

aus welchen Formeln der Bogen l sich ohne alle Zweideutigkeit ergiebt. Man kann also hiernach die Richtung der Gesichtslinie, wenn die Oerter des Auges und des Objects gegeben sind, bestimmen.

§. 139.

Die Coordinaten x, y, z; x', y', z' sind Functionen der Zeit t, setzt man also in den Gleichungen für $\sin b$ und $\text{tang } l$ ihre durch t ausgedrückten Werthe, so erhält man $\sin b$ und $\text{tang } l$ durch t bestimmt. Eliminirt man t aus diesen Gleichungen, so erhält man eine neue Gleichung, welche die Beziehung zwischen l und b angiebt, d. h. die Gleichung für die scheinbare Bahn des Objects.

§. 140.

Bewegen sich Auge und Object in derselben I
so ist es am einfachsten, die Coordinaten x und
dieser Ebene zu nehmen, dann ist $z = o$, z'
also auch $\sin b = o$ und $b = o$; die scheinbare
ist also ein größester Kreis. Dasselbe findet
wenn das Auge ruht und das Object sich in
durch das Auge gehenden Ebene bewegt, oder
das Object still steht, und das Auge sich in
durch dasselbe gehenden Ebene bewegt.

§. 141.

Um die scheinbare Geschwindigkeit des O
zu haben, ist es nur nöthig, aus $\sin b$ und tang
uns als Functionen von t gegeben sind, $\frac{db}{dt}$ u
abzuleiten, das letzte Differentialverhältniſs gieb
$\cos b$ multiplicirt die Geschwindigkeit in einer der
(Fig. 20.) parallelen Richtung, das erste die Ges
digkeit in der Richtung OP. Für die Totalges
digkeit erhalten wir den Ausdruck

$$\frac{\sqrt{db^2 + \cos b^2 . dl^2}}{dt}$$

oder, wenn wir diese Geschwindigkeit in Secunde
geben wollen,

$$206265'' . \frac{\sqrt{db^2 + \cos b^2 . dl^2}}{dt}.$$

§. 142.

Die Richtung, nach der in irgend einem A
wirke das Object sich scheinbar bewegt, wird au
Tangente des Winkels, den sie mit einem durch C
z parallel gelegten Kreise macht, bestimmt;
Tangente findet man $= \frac{db}{\cos b . dl}$.

Von der Parallaxe.

§. 143.

Die Gesichtslinien, welche von zwei verschiedenen Oertern des Auges, nach ein und demselben Gegenstand gezogen werden, bilden an diesem einen Winkel, welcher die Parallaxe des Objects genannt wird. Sind z. B. F und B zwei Oerter, die das Auge nach und nach einnimmt, oder auch die Oerter zweier gleichzeitiger Beobachter, und O ein Gegenstand, nach welchem die Gesichtslinien FO, BO (Fig. 22.) gezogen sind, so wird der Winkel FOB die Parallaxe von O angeben.

Kennt man die Entfernung FB der beiden Beobachtungsörter von einander, und hat man die Winkel OFB, OBF gemessen, so lassen sich im Dreieck FBO die Entfernungen FO und FB finden. Man hat in diesem Dreieck die Proportion

$$FB : FO = \sin FOB : \sin FBO,$$

folglich hieraus

$$FO = \frac{FB \cdot \sin FBO}{\sin FOB}.$$

Ist der Winkel FOB Null, so wird FO unendlich grofs; in diesem Fall werden die Gesichtslinien FO, BO einander parallel laufen, und man sagt daher, dafs unendlich entfernte Gegenstände keine Parallaxe besitzen. Es kann aber der Fall eintreten, dafs der Sinus der Parallaxe Null wird, ohne dafs das Object deswegen unendlich weit entfernt ist. Dies geschieht dann, wenn

der Sinus des Winkels *FBO* zugleich Null ist, in welchem Fall die Entfernung *FO* sich unter der Form $\frac{o}{o}$ darstellt, also einen unbestimmten Werth erhält. Man sieht leicht, dafs in diesem Fall die gegenseitige Lage der drei Punkte *F*, *B*, *O* so beschaffen seyn mufs, dafs alle drei auf ein und derselben graden Linie sich befinden, und wenn der Punkt *O*, sowohl von *F* als von *B* aus gesehen, nach einerlei Seite zu liegt, so wird seine Parallaxe Null; erscheint derselbe aber von beiden Punkten nach entgegengesetzten Richtungen, so wird die Parallaxe 180 Grad betragen. In beiden Fällen wird der Sinus Null.

§. 144.

Es kommt bei terrestrischen Messungen sehr häufig der Fall vor, dafs man einen zu beobachtenden Gegenstand von einem bestimmten Standpunkt aus nicht sehen kann, indem derselbe von einem dazwischenliegenden Körper verdeckt wird, und man sich etwas vom eigentlichen Standpunkte entfernen mufs, um selbigen zu Gesicht zu bekommen. Auch kann der Fall eintreten, dafs man den inne gehabten Standpunkt, von einem neuen Standpunkt aus, wieder als Object gebrauchen will, derselbe sich aber in der Entfernung nicht kenntlich macht, in seiner Nähe hingegen sich ein deutliches Object zeigt, das man an die Stelle des Standpunkts setzen mufs. Letzterer Fall würde z. B. dann eintreten, wenn sich der Standpunkt auf einem Thurm befindet, und man das Instrument nicht unmittelbar unter die Spitze desselben, die späterhin als Object dienen soll, aufstellen kann. In allen diesen Fällen mufs dann an den beobachteten Winkeln eine Verbesserung angebracht werden, die wir etwas näher untersuchen wollen.

§. 145.

In *O* befinde sich der Standpunkt (Fig. 23.), in *B* das zu beobachtende Object; *C* sey der Punkt, auf

welchen die in O gemachte Beobachtung reducirt werden soll, OM eine feste Linie, von welcher aus die beobachteten Winkel gezählt werden. Die Lage des Punktes C wird durch das Perpendikel $CN = p$, und $ON = n$, gegen den Punkt O bestimmt; der beobachtete Winkel BOM sey $= \alpha$, die Entfernung $OB = r$, diese braucht hierbei eben nicht sehr genau bekannt zu seyn, da wir in der Praxis immer annehmen können, die Gröfsen p und n seyen gegen r genommen sehr klein. Zieht man BP senkrecht auf OM, so ist

$$BP = r \,.\, \sin \alpha, \quad OP = r \,.\, \cos \alpha.$$

Wird dann CQ parallel mit OP gezogen, so ist QCB der gesuchte Winkel, welchen wir durch α' bezeichnen wollen. Man hat dann

$$\text{tang } \alpha' = \frac{BQ}{CQ} = \frac{r \,.\, \sin \alpha - p}{r \,.\, \cos \alpha - n}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\text{tang } \alpha' - \text{tang } \alpha = \frac{n \,.\, \text{tang } \alpha - p}{r \,.\, \cos \alpha - n}$$

$$1 + \text{tang } \alpha' \,.\, \text{tang } \alpha = \frac{r - n \,.\, \cos \alpha - p \,.\, \sin \alpha}{r \,.\, \cos \alpha - n} \cdot \frac{1}{\cos \alpha}$$

und da bekanntlich

$$\frac{\text{tang } \alpha' - \text{tang } \alpha}{1 + \text{tang } \alpha' \,.\, \text{tang } \alpha} = \text{tang } (\alpha' - \alpha),$$

so erhält man:

$$\text{tang } (\alpha' - \alpha) = \frac{n \,.\, \sin \alpha - p \,.\, \cos \alpha}{r - n \,.\, \cos \alpha - p \,.\, \sin \alpha}.$$

Setzt man noch $n = q \,.\, \cos \beta$, $p = q \,.\, \sin \beta$, wo, wie man leicht sieht, q die Entfernung, OC und β den Winkel CON bedeutet, so hat man mit Berücksichtigung der gehörigen Zusammenziehungen:

$$\text{tang } (\alpha' - \alpha) = \frac{q \,.\, \sin (\alpha - \beta)}{r - q \,.\, \cos (\alpha - \beta)},$$

und man sieht leicht, dafs $\alpha' - \alpha$ die Parallaxe des Objects rücksichtlich der Entfernung $OC = q$ darstellt.

§. 146.

Setzt man der Kürze wegen

$$\alpha' - \alpha = \delta, \quad \alpha - 6 = \Delta, \quad \frac{q}{r} = \varrho,$$

so kann man vorige Formel auch so schreiben:

$$\text{tang}\,\delta = \frac{\varrho \,.\, \sin \Delta}{1 - \varrho \,.\, \cos \Delta},$$

und aus dieser Formel läfst sich der Winkel δ durch folgende sehr einfache Reihe unmittelbar finden. Bezeichnet man die imaginäre Gröfse $\sqrt{-1}$ durch i, so hat man aus voriger Gleichung:

$$\frac{1 + i\,\text{tang}\,\delta}{1 - i\,\text{tang}\,\delta} = \frac{1 - \varrho\,(\cos\Delta - i\sin\Delta}{1 - \varrho\,(\cos\Delta + i\sin\Delta}.$$

Nimmt man auf beiden Seiten die Logarithmen, so kommt:

$$\log\frac{1 + i\,\text{tang}\,\delta}{1 - i\,\text{tang}\,\delta} = \log[1 - \varrho\,(\cos\Delta - i\sin\Delta)] - \log[1 - \varrho\,(\cos\Delta + i\sin\Delta)],$$

oder, wenn man die Logarithmen nach der bekannten Reihe entwickelt:

$$\begin{aligned}\log\left(\frac{1 + i\,\text{tang}\,\delta}{1 - i\,\text{tang}\,\delta}\right) = &- \varrho\,(\cos\Delta - i\sin\Delta) \\ &- \tfrac{1}{2}\varrho^2(\cos\Delta - i\sin\Delta)^2 \\ &- \tfrac{1}{3}\varrho^3(\cos\Delta - i\sin\Delta)^3 \\ &- \ldots\ldots\ldots \\ &+ \varrho\,(\cos\Delta + i\sin\Delta) \\ &+ \tfrac{1}{2}\varrho^2(\cos\Delta + i\sin\Delta)^2 \\ &+ \tfrac{1}{3}\varrho^3(\cos\Delta + i\sin\Delta)^3 \\ &+ \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Aus der Theorie der imaginären Gröfsen ist aber bekannt, dafs

$$\log\frac{1 + i\,\text{tang}\,\delta}{1 - i\,\text{tang}\,\delta} = 2i\delta$$

$$(\cos\Delta \pm i\sin\Delta)^n = \cos n\Delta \pm i\sin n\Delta,$$

was für eine Zahl auch n bedeuten mag. Man be also nach der Substitution dieser Werthe, mit Hinweg

ssung des allen Gliedern gemeinschaftlichen Factors i, die Reihe

$$\delta = \varrho . \sin A + \tfrac{1}{2}\varrho^2 . \sin 2A + \tfrac{1}{3}\varrho^3 . \sin 3A + \ldots.$$

Um bei der Berechnung dieser Reihe δ gleich in Secunden zu erhalten, braucht man das Resultat nur mit 206264″8 zu multipliciren.

§. 147.

Die Berechnung der Parallaxe bei Beobachtungen der Himmelskörper ist ebenfalls, so wie die in einem der vorigen Abschnitte erwähnte Aberration, eine Verbesserung, der die beobachteten Winkel unterworfen sind. Die Beobachtungen können nicht anders als auf der Oberfläche der Erde angestellt werden, so dafs also zur Vergleichung der an verschiedenen Punkten der Erdoberfläche angestellten Beobachtungen es nothwendig wird, sie vorher alle auf einen und denselben Punkt, für welchen der Mittelpunkt der Erde angenommen wird, zu reduciren. Es sey C (Fig. 24.) der Mittelpunkt der Erde, in O ein Beobachter, so giebt bei der als Kugel angenommenen Erde der verlängerte Halbmesser CO in Z das Zenith des Beobachters an. In S befinde sich ein Himmelskörper, so wird OSC die Parallaxe desselben seyn. Bezeichnet man dieselbe durch p und den Winkel SOZ durch z, so hat man im Dreieck SOZ die Proportion:

$$SC : CO = \sin z : \sin p.$$

Ferner sey OS' senkrecht auf CZ und $CS' = CS$, so ist der Winkel $OS'C$ derjenige, den man in der Astronomie die Horizontalparallaxe nennt, welche wir $= P$ setzen. Dann ist im Dreieck $OS'C$

$$S'C : OC = 1 : \sin P,$$

folglich, wenn man diese Proportion mit der vorigen verbindet,

$$1 : \sin P = \sin z : \sin p,$$

und hieraus erhält man:

$$\sin p = \sin P . \sin z.$$

der Winkel p wird die Höhenparallaxe genannt, ir sehen hieraus, dafs sich die Sinus der verschied Höhenparallaxen für einen und denselben Himmels er, wie die Sinus der beobachteten Zenithdista denselben verhalten. Hat man durch diese Formel Parallaxe gefunden, so zieht man dieselbe von beobachteten Zenithdistanz ab, und man erhält dann Zenithdistanz, welche der Beobachter gefunden h würde, wenn er im Mittelpunkt der Erde die Beob ung angestellt hätte. Uebrigens sieht man hier dafs die Parallaxe den Abstand des Himmelskörpers Zenith vergröfsert, oder seine Höhe über dem Hori vermindert.

§. 148.

Bezeichnet man die Zenithdistanz, welche der bachter im Mittelpunkt der Erde gefunden haben wü durch Z, und die auf der Oberfläche der Erde b achtete durch z, wo letztere mit der Parallaxe p haftet ist, so hat man $z = Z + p$, folglich, w dieser Werth in die Gleichung

$$\sin p = \sin P . \sin z$$

substituirt wird, so kommt

$$\sin p = \sin P . \sin (Z + p)$$
$$= \sin P (\sin Z . \cos p + \cos Z . si$$

Dividirt man die ganze Gleichung durch $\cos p$, sucht dann $\tang p$, so kommt

$$\tang p = \frac{\sin P . \sin Z}{1 - \sin P . \cos Z}.$$

Man sieht, dafs diese Gleichung mit der frühern (§. 1

$$\tang \delta = \frac{\varrho . \sin \Delta}{1 - \varrho . \cos \Delta}$$

übereinstimmt, wenn man $\varrho = \sin P$, $\Delta = Z$ s folglich wird man der in demselben §. entwick Reihe zufolge auch

$$\ldots \sin P . \sin Z + \tfrac{1}{2} \sin P^2 . \sin 2Z + \tfrac{1}{3} \sin P^3 . \sin 3Z \cdot$$

erhalten.

§. 149.

Um die zur Berechnung der Parallaxe nothwendigen ormeln in ihrer gröfsten Allgemeinheit zu haben, wollen ir folgende Betrachtungen anstellen. Wir nehmen drei unkte an, das Object O, den Beobachter B, und den sten Punkt F (Fig. 22.), auf welchen die in B beobchteten Winkel, die zur Bestimmung der Lage des bjects O dienen sollen, reducirt werden. Durch den unkt F legen wir drei sich rechtwinklig durchschneiende Coordinatenaxen, und bezeichnen die auf diese xen bezogenen Coordinaten von O durch X, Y, Z, ie Coordinaten von B durch x, y, z. Legt man nun urch den Punkt B auch drei Coordinatenaxen, die en in F sich durchschneidenden parallel sind, und beeichnet die Coordinaten des Punktes O rücksichtlich ieser neuen Axen durch X', Y', Z', so erhält man ie drei Gleichungen

$$X' = X - x, \quad Y' = Y - y, \quad Z' = Z - z.$$

Jetzt verbinde man die drei Punkte O, F, B durch rade Linien, bezeichne die Entfernung OF durch R, ie Entfernung BF durch r, die Entfernung OB durch R'; ferner seyen die Winkel, welche diese Radien mit hren Projectionen auf der Ebene der xy bilden, H, h, H', und endlich die Winkel, welche die besagten Projectionen mit der Axe der x machen, A, a, A', so hat man aus der analytischen Geometrie die Formeln:

$$\begin{aligned} X &= R \,.\, \cos H \,.\, \cos A \\ Y &= R \,.\, \cos H \,.\, \sin A \\ Z &= R \,.\, \sin H \\ x &= r \,.\, \cos h \,.\, \cos a \\ y &= r \,.\, \cos h \,.\, \sin a \\ z &= r \,.\, \sin h \\ X' &= R' \,.\, \cos H' \,.\, \cos A' \\ Y' &= R' \,.\, \cos H' \,.\, \sin A' \\ Z' &= R' \,.\, \sin H', \end{aligned}$$

folglich, wenn man diese Werthe in die Gleichungen

$$X' = X - x, \quad Y' = Y - y, \quad Z' = Z - z$$

substituirt, so kommt:

1) $R.\cos H.\cos A - r.\cos h.\cos a = R'.\cos H'.\cos A'$
2) $R.\cos H.\sin A - r.\cos h.\sin a = R'.\cos H'.\sin A'$
3) $R.\sin H \quad - r.\sin h \quad = R'.\sin H'.$

Vermittelst dieser Gleichungen läfst sich, wenn zwei der drei Systeme von Gröfsen

$$R, H, A;\quad r, h, a;\quad R', H', A'$$

gegeben sind, das dritte System finden. Denn wir wollen z. B. annehmen, die beiden ersten Systeme

$$R, H, A;\quad r, h, a$$

seyen gegeben, so hat man, indem die Gleichung (2) durch (1) dividirt wird

$$\text{tang } A' = \frac{R.\cos H.\sin A - r.\cos h.\sin a}{R.\cos H.\cos A - r.\cos h.\cos a},$$

wodurch der Winkel A' bekannt wird. Dividirt man hierauf (3) durch (2), so kommt

$$\text{tang } H' = \sin A'.\frac{R.\sin H - r.\sin h}{R.\cos H.\sin A - r.\cos h.\sin a},$$

also kennt man auch H', und man kann endlich aus irgend einer der drei Formeln auch R' berechnen.

Vom Schatten der Körper.

§. 150.

Wenn das Licht, welches von irgend einem leuchtenden Punkte oder Körper ausgeht, auf seinem Wege einem undurchsichtigen Körper begegnet, so wird es von demselben in seiner fortschreitenden Bewegung aufgehalten, und es entsteht hinter dem Körper ein lichtleerer Raum, der der Schatten des Körpers genannt wird. Von irgend einem andern Gegenstand, der hinter dem Körper im lichtleeren Raum sich befindet, sagt man, er liege im Schatten, oder er werde verdunkelt. Schatten ist also nichts anders als die Abwesenheit des

Lichts in einem gewissen Raum. Bei dem gewöhnlichen Sprachgebrauch versteht man unter dem Schatten nicht den lichtleeren Raum selbst, sondern blofs den Durchschnitt desselben mit der Oberfläche eines andern Körpers, indem erst auf diesem Durchschnitt der lichtleere Raum sich erkennen läfst. Diesen Durchschnitt nennt man die Projection des Schattens oder den Schlagschatten. Die Gestalt desselben hängt im Allgemeinen von der Lage und der Gestalt des leuchtenden, des schattenwerfenden und des durchschneidenden Körpers ab.

§. 151.

So lange man den leuchtenden Körper blofs als einen physischen Punkt betrachtet, dessen Dimensionen gegen die des schattenwerfenden Körpers als unendlich klein angesehen werden können, wird der projicirte Schatten selbst einfach seyn, und der ganze lichtleere Raum läfst sich als Pyramide oder Kegel annehmen, dessen Spitze der leuchtende Punkt ist, und dessen Seitenlinien die Oberfläche des schattenwerfenden Körpers berühren. Die Linie, in welcher die Berührungspunkte der Seitenlinien mit der Oberfläche des Körpers liegen, heifst die Erleuchtungsgrenze, sie trennt den erleuchtenden Theil der Oberfläche von dem im Schatten liegenden.

Wenn hingegen der leuchtende Körper wirklich als ausgedehnt angenommen wird, so hat man zwei verschiedene Arten von Schatten zu betrachten. Es befindet sich nämlich dann hinter dem Körper ein Raum, der so wie im vorigen Fall gar kein Licht enthält, und dieser heifst daher auch der volle Schatten oder der Kernschatten. Dieser völlig lichtleere Raum wird aber noch von einem zweiten umgeben, in welchen nicht von allen leuchtenden Punkten des Körpers Licht fallen kann, und zwar werden seine Theile desto weniger Licht enthalten, je näher sie dem vollen

Schatten liegen, desto mehr Licht hingegen, je weiter sie von demselben entfernt sind, bis die Lichtmenge durch unmerkliche Abstufungen in den vollen Lichtglanz übergeht. Dieser zweite Schatten wird der Halbschatten genannt.

§. 152.

Wir wollen zuerst den Fall betrachten, wo sowohl der leuchtende als der erleuchtete Körper Kugeln sind, und da eine durch die Mittelpunkte dieser Kugeln gelegte Ebene immer ein und dieselbe Figur als Durchschnitt giebt, so mögen C und D (Fig. 25.) die Mittelpunkte der Kreise AB und EF seyn, die durch den Durchschnitt der Kugeln vermittelst einer durch ihre Mittelpunkte gelegten Ebene entstehen. Der Kreis AB sey der Durchschnitt der leuchtenden, der Kreis EF der Durchschnitt der erleuchteten Kugel, und wir nehmen den Durchmesser der erstern gröfser als den der letztern an. Zieht man an die beiden Kreise Berührungslinien AE und BF, die sich verlängert in G schneiden, so wird jeder Punkt, welcher in dem Raum EGF enthalten ist, kein Licht von der leuchtenden Kugel erhalten, und EGF selbst wird den Durchschnitt des Schattenkegels angeben, dessen Axe DG ist. Es sey der Halbmesser der leuchtenden Kugel $CA = r$, der der erleuchteten $DE = r'$, die Entfernung der beiden Mittelpunkte der Kugeln von einander $CD = a$, die Länge des Schattenkegels $DG = x$, so hat man in den beiden ähnlichen Dreiecken ACG, EDG, die Proportion

$$r : a + x = r' : x,$$

und hieraus ergiebt sich $x = \frac{ar'}{r - r'}$.

So lange $r > r'$, wie hier in der Figur angenommen ist, wird x immer einen positiven Werth erhalten, und sich also wirklich ein begrenzter Schattenkegel bilden, allein sobald $r < r'$ ist, d. h. wenn die leuchtende

Kugel einen kleinern Durchmesser als die erleuchtete hat, wird x negativ, und dann fällt die Spitze des Kegels nicht hinter den dunkeln Körper, und der Schatten erstreckt sich dann ins Unendliche. Ist $r = r'$, so hat man $x = \infty$, folglich geht dann der Schattenkegel in einen Schattencylinder über.

§. 153.

Die beiden Berührungslinien, welche die Grenze des vollen Schattens bilden, waren so gezogen, dafs dieselben beide Kreise an einer und derselben Seite der die Mittelpunkte derselben verbindenden Linie CD berührten. Man kann dieselben aber auch so legen, dafs sich die Berührungspunkte auf verschiedenen Seiten der Linie CD befinden, wie z. B. bei den Linien $B'E'$, $A'F'$ der Fall ist, dann schliefsen die Räume $HE'G$, $KF'G$ den Halbschatten ein, der ebenfalls eine kegelförmige Gestalt hat, nur dafs seine Spitze in M zwischen beiden Kugeln liegt. Setzt man $DM = y$, so hat man in den beiden ähnlichen Dreiecken $CA'M$, $DF'M$ die Proportion

$$r : a - y = r' : y$$

$$y = \frac{ar'}{r + r'},$$

durch welche Formel der Abstand der Spitze des Halbschattenkegels von dem Mittelpunkte der erleuchteten Kugel bestimmt wird.

§. 154.

Nimmt man beliebig einen Punkt N auf der beiden Schattenkegeln gemeinschaftlichen Axe DG an, und errichtet auf derselben das Perpendikel NQ, so ist NP der Halbmesser des Kernschattens, NQ der Halbmesser des Halbschattens an dieser Stelle. Setzt man

$$DN = z, \quad NP = R, \quad NQ = R',$$

so hat man

$$\sin DGE = \frac{r'}{x}; \quad \operatorname{tang} DGE = \frac{R}{x - z},$$

und da auch

$$\text{tang } DGE = \frac{\sin DGE}{\sqrt{1 - \sin DGE^2}},$$

so wird

$$\frac{R}{x - z} = \frac{r'}{\sqrt{xx - r'r'}}.$$

Substituirt man hierin statt x seinen Werth (§. 152.)

$$x = \frac{ar'}{r - r'},$$

so kommt

$$R = \frac{ar' - z(r - r')}{\sqrt{aa - (r - r')^2}}.$$

Auf ähnliche Weise erhält man dann auch

$$R' = \frac{ar' + z(r + r')}{\sqrt{aa - (r + r')^2}},$$

durch welche Gleichungen die Halbmesser R und R' des Kernschattens und des Halbschattens in der Entfernung z vom Mittelpunkte der erleuchteten Kugel bestimmt sind.

§. 155.

Stellt z. B. die leuchtende Kugel die Sonne, die dunkle die Erde vor, und nimmt man bei der Bestimmung der Längen, welche in vorigen Formeln vorkommen, als Maafseinheit den Halbmesser der Erde an, so hat man

$$r = 110, \quad r' = 1, \quad a = 23984,$$

und hieraus ergiebt sich

$$R = 1.000009 - 0.0045448\,z$$
$$R' = 1.000011 + 0.0046281\,z.$$

Setzt man in diesen Formeln $z = 60$, so erhält man ungefähr den Punkt, wo der Mond auf seiner Bahn um die Erde die Axe des Schattenkegels schneidet, und man hat daselbst

$$R = 0.727321, \quad R' = 1.277686,$$

während der Halbmesser des Monds selbst nur 0,273 beträgt. Da der Mond ebenfalls ein dunkler Körper

t, der sein Licht von der Sonne erhält, so wird er ei seinem Eintritt in den Schatten, welchen die Erde nter sich wirft, sein Licht verlieren, und eine Mond-nsternifs entstehen.

§. 156.

Die Gröfse des Segments, welches auf der Ober-äche der dunkeln Kugel von der leuchtenden erhellt ird, läfst sich ebenfalls finden. Denn es sey S der unkt, wo die Axe CD die dunkle Kugel trifft, so ird $ES = FS$, und da

$$SDE = 90^0 + EGD$$

nd vorhin (§. 154.) $\sin EGD = \frac{r - r'}{a}$ gefunden war, o hat man hierdurch auch SDE. Ist $r - r'$ gegen sehr klein, so ist, da in diesem Fall auch der Winkel EGD sehr klein wird,

$$EGD = \sin EGD + \tfrac{1}{6} \sin EGD^3,$$

lso hieraus

$$SDE = \tfrac{1}{2}\pi + \frac{r - r'}{a} + \tfrac{1}{6}\left(\frac{r - r'}{a}\right)^3.$$

Um das Segment $E'S$ zu finden, hat man

$$E'DS = 90^0 - DME',$$

nd da vorhin

$$\sin EMD = \frac{r + r'}{a}$$

gefunden wurde, so hat man, wenn ebenfalls $r + r'$ gegen a sehr klein ist,

$$E'DS = \tfrac{1}{2}\pi - \frac{r + r'}{a} - \tfrac{1}{6}\left(\frac{r + r'}{a}\right)^3.$$

Um die Gröfse des Stücks EE' zu finden, auf welches nur von einem Theil der leuchtenden Kugel Licht allen kann, hat man

$$EDE' = EDS - E'DS$$
$$= \frac{2r}{a}\left[1 + \tfrac{1}{6} \cdot \frac{rr + 3r'r'}{aa}\right].$$

Dies beträgt bei der Erleuchtung der Erde von Sonne ungefähr einen halben Grad *).

§. 157.

Als zweites Beispiel wollen wir den Fall betrac wo der schattenwerfende Körper ein Parallelepipe von unendlich kleiner Dicke ist, dessen breite Seite Sonne zugekehrt wird. Seine Aufstellung sey so schaffen, dafs es senkrecht auf der Horizontale steht, und zugleich die durch seine Mitte und Centrum der Sonne gelegte Ebene einen rechten W mit der vordern Seitenfläche desselben bildet. Da eine unendlich kleine Dicke des Parallelepipedum a nommen haben, so können wir dasselbe schlechthi ein Parallelogramm betrachten.

Nennen wir die Ebene, welche durch die Mitte Parallelogramms und den Mittelpunkt der Sonne g ist, die Verticalebene, so ist einleuchtend, dafs zwei Ebenen, welche wir durch die Seitenlinien Parallelogramms legen, und die zugleich die Son kugel berühren, jede auf derselben Seite der Vert ebene, auf welcher die in ihr befindliche Seitenlinie Parallelogramms liegt, die Horizontalebene in Linien schneiden, welche mit der andern Seite Parallelogramms, die in der Horizontalebene liegt, gleichschenkliges Dreieck bilden. Innerhalb di Dreiecks wird kein Strahl von der Sonne fallen kön so dafs dasselbe die Projection des Kernschattens die Horizontalebene bildet, vorausgesetzt, dafs Ebene, welche man durch die obenliegende Seite Parallelogramms so legt, dafs sie die Sonnenkugel der von der Horizontalebene abgewandten Hemisp berührt, die Horizontalebene nicht in einer gerin Entfernung von der untersten Seite des Parallelogra schneidet, als die Spitze des erwähnten Dreiecks derselben Seite hat.

*) Genauer 31'32". G.

§. 158.

Um die Projection dieses Kernschattens ihrer Gröfse nach zu bestimmen, denken wir uns einen Cylinder, der die Sonnenkugel mit allen seinen Seitenlinien berührt, und senkrecht auf der Horizontalebene steht, so wird er diese in einem Kreise ADB (Fig. 26.) schneiden, dessen Halbmesser $CD =$ dem der Sonne ist. Die Linie EF sey die Durchschnittslinie des Parallelogramms mit der Horizontalebene, und in G halbirt, so wird CG mit EF einen rechten Winkel machen. Zieht man ferner durch E und F die Berührungslinien EA, FB, die sich verlängert in H schneiden, so wird EHF das erwähnte Dreieck seyn.

Nun bezeichne man die Entfernung des Mittelpunkts der Sonne von G durch a, die Höhe desselben über dem Horizont durch α, so ist $CG = a \cdot \cos \alpha$, und wenn man den scheinbaren Halbmesser der Sonne $= \varrho$ setzt, so ist $CD = a \cdot \sin \varrho$. Man hat nun in den beiden ähnlichen Dreiecken CAH, EGH die Proportion

$$AC : AH = EG : GH,$$

oder da auch

$$AH^2 = (CG + GH)^2 - AC^2,$$

so wird hieraus

$$AC^2 : (CG + GH)^2 - AC^2 = EG^2 : GH^2,$$

oder mit Einführung unserer Bezeichnungen, wenn noch die Breite des Parallelogramms $= 2b$, also $EG = b$ gesetzt wird

$$aa \sin \varrho^2 : (a \cos \alpha + GH)^2 - aa \sin \varrho^2 = bb : GH^2.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn wir der Kürze wegen

$$aa \sin \varrho^2 - bb = kk$$

setzen, der Werth von

$$GH = \frac{ab}{kk} \cdot [b \cdot \cos \alpha + \sin \varrho \sqrt{aa \cdot \cos \alpha^2 - kk}].$$

Man mufs das positive Vorzeichen bei Ausziehung der Quadratwurzel nehmen, denn, wenn man das negative anwendet, so erhält man den Abstand GH', wo die

Berührungslinie FA' auf entgegengesetzten Seiten der CH, die Kugel und das Parallelogramm trifft.

§. 159.

Jetzt müssen wir noch den Abstand des Durchschnitts der andern Ebene, die durch die obere Seite des Parallelogramms gelegt ist, mit der Horizontalebene untersuchen. Zu diesem Zweck sey AB die Durchschnittslinie der Verticalebene mit der Horizontalebene (Fig. 27.), FG der Kreis, der durch den Durchschnitt derselben Ebene mit der Sonnenkugel entsteht, CD der verticale Durchschnitt des Parallelogramms, DF eine durch D an den Kreis gelegte Berührungslinie, welche verlängert die Horizontallinie AB in B schneidet, so wird CB die gesuchte Entfernung seyn. Man hat hier $ECH = \alpha$, $EC = a$, $EF = a \cdot \sin \varrho$, und CD bezeichne man durch h, so wie Winkel DBC durch φ. Fällt man vom Berührungspunkt F das Perpendikel FK, so wird, da, wie man leicht findet, $EFK = \varphi$ ist,

$$FK = a \cdot \sin \varrho \cdot \cos \varphi + a \cdot \sin \alpha$$
$$CK = a \cdot \cos \alpha - a \cdot \sin \varrho \cdot \sin \varphi,$$

und wenn man LD parallel mit AB zieht,

$$FL = a \cdot \sin \alpha + a \cdot \sin \varrho \cdot \cos \varphi - h$$
$$LD = a \cdot \cos \alpha - a \cdot \sin \varrho \cdot \sin \varphi.$$

Nun ist aber $FDL = \varphi$, folglich

$$FL = LD \cdot \text{tang } \varphi,$$

und wenn man hierin die Werthe von FL und LD substituirt, so kommt

$$(a \cdot \sin \alpha - h) \cos \varphi + a \cdot \sin \varrho = a \cdot \cos \alpha \cdot \sin \varphi,$$

oder, wenn man die ganze Gleichung durch $\sin \varphi$ dividirt,

$$(a \cdot \sin \alpha - h) \cot \varphi + a \cdot \sin \varrho \sqrt{1 + \cot \varphi^2} = a \cdot \cos \alpha.$$

Bemerkt man ferner, dafs

$$CB = CD \cdot \cot CBD = h \cdot \cot \varphi,$$

so wird auch

$$(a \cdot \sin \alpha - h) CB + a \cdot \sin \varrho \sqrt{hh + CB^2} = ah \cdot \cos \alpha$$

nd hieraus ergiebt sich

$$CB = \frac{ah}{ff}\left[(a.\sin\alpha - h)\cos\alpha - \sin\varrho\sqrt{aa.\cos\alpha^2 + ff}\right],$$

o der Kürze wegen

$$(a.\sin\alpha - h)^2 - aa.\sin\varrho^2 = ff$$

esetzt wurde. Bei der Ausziehung der Quadratwurzel uſs man das negative Vorzeichen nehmen, indem das ositive für eine an den untern Sonnenrand gelegte erührungsebene gilt.

§. 160.

Es sey ein Stab von beliebiger Länge auf eine lorizontalebene gesteckt, und ein leuchtender Punkt ewege sich beliebig um denselben herum, man sucht e Gleichung der krummen Linie, welche der Schatten es Endpunkts während der Bewegung des leuchtenden unktes beschreibt.

Wir nehmen den Anfangspunkt der Coordinaten im urchschnittspunkt des Stabes mit der Horizontalebene, gen die Axen der x und y in die Horizontalebene, ezeichnen die Coordinaten des Endpunktes des Stabes urch ξ, η, ζ, die des leuchtenden Punktes für eine estimmte Zeit t durch ξ', η', ζ', so werden die Gleichungen der graden Linie, welche durch diese beiden Punkte gelegt wird,

$$y - \eta = \frac{\eta' - \eta}{\xi' - \xi}(x - \xi),$$

$$z - \zeta = \frac{\zeta' - \zeta}{\xi' - \xi}(x - \xi),$$

o x, y, z die allgemeinen Coordinaten der graden inie bedeuten. Setzt man in der letzten Gleichung $= o$, so kann man aus diesen Gleichungen die Werthe on x und y bestimmen, und diese sind nichts anders, ls die Coordinaten des Punktes, in welchem die beagte grade Linie die Horizontalebene durchschneidet, d. h. die Coordinaten des Endpunktes der Projection des Schattens. Man erhält dann

$$x = \frac{\xi\zeta' - \xi'\zeta}{\zeta' - \zeta},$$
$$y = \frac{\eta\zeta' - \eta'\zeta}{\zeta' - \zeta}.$$

Da nun die Art der Bewegung des leuchtenden Punkts als bekannt vorausgesetzt wird, so werden die Coordinaten ξ', η', ζ' als Functionen der Zeit t betrachtet werden können. Eliminirt man dann aus diesen beiden Gleichungen die Gröfse t, so bleibt eine Gleichung zwischen x und y und den constanten Coordinaten ξ, η, ζ, welche die Natur der von dem Endpunkt des Schattens auf der Horizontalebene beschriebenen krummen Linie angeben wird.

§. 161.

Um diese allgemeine Auflösung auf einen besondern Fall anzuwenden, wollen wir annehmen, der leuchtende Punkt sey die Sonne, von deren Dimensionen wir aber hierbei abstrahiren, und wir betrachten die Sache so, als ob blofs ihr Mittelpunkt leuchtend wäre. Was die Lage der Coordinaten betrifft, so falle die Axe der x mit der Mittagslinie zusammen. Bezeichnen wir dann die Höhe der Sonne durch H, ihr Azimuth durch A, ihren Abstand vom Anfangspunkt der Coordinaten durch r, so hat man

$$\xi' = r \,.\, \cos H \,.\, \cos A$$
$$\eta' = r \,.\, \cos H \,.\, \sin A$$
$$\zeta' = r \,.\, \sin H.$$

Nun sey (Fig. 27 b.) AZB die Himmelskugel, AB der Horizont, Z das Zenith, P der Pol, in S die Sonne zu irgend einer Zeit, so wird, wenn SZ und SP Bogen gröfster Kreise sind,

$$SZ = 90^0 - H, \quad SZP = 180^0 - A.$$

Setzen wir aufserdem

$$ZP = 90^0 - p, \quad SP = 90^0 - \delta, \quad ZPS = u,$$

wo p die Polhöhe des Aufsteckepunktes des Stabes, δ

die Declination der Sonne bedeutet, so hat man im Dreieck ZPS

$$\sin H = \sin p \,.\, \sin \delta + \cos p \,.\, \cos \delta \,.\, \cos u$$
$$\cos H \,.\, \sin A = \cos \delta \,.\, \sin u.$$

Quadrirt man die erste Gleichung und zieht ihr Quadrat von $1 = 1$ ab, so bleibt

$$\cos H^2 = 1 - \sin p^2 \,.\, \sin \delta^2 - \cos p^2 \,.\, \cos \delta^2 \,.\, \cos u^2 - 2 \sin p \,.\, \cos p \,.\, \sin \delta \,.\, \cos \delta \,.\, \cos u.$$

Hiervon das Quadrat der zweiten abgezogen, kommt

$$\begin{aligned}\cos H^2 \,.\, \cos A^2 &= 1 - \sin p^2 \,.\, \sin \delta^2 - \cos p^2 \,.\, \cos \delta^2 \,.\, \cos u^2 \\ &\quad - \cos \delta^2 \,.\, \sin u^2 - 2 \sin p \,.\, \cos p \,.\, \sin \delta \,.\, \cos \delta \,.\, \cos u \\ &= \cos \delta^2 \,.\, \cos u^2 + \sin \delta^2 \,.\, \cos p^2 - \cos p^2 \,.\, \cos \delta^2 \,.\, \cos u^2 \\ &\quad - 2 \sin p \,.\, \cos p \,.\, \sin \delta \,.\, \cos \delta \,.\, \cos u \\ &= \cos \delta^2 \,.\, \cos u^2 \,.\, \sin p^2 + \sin \delta^2 \,.\, \cos p^2 \\ &\quad - 2 \sin p \,.\, \cos p \,.\, \sin \delta \,.\, \cos \delta \,.\, \cos u \\ &= (\sin \delta \,.\, \cos p - \cos \delta \,.\, \cos u \,.\, \sin p)^2,\end{aligned}$$

also, wenn man die Wurzel auszieht,

$$\cos H \,.\, \cos A = \cos \delta \,.\, \sin p \,.\, \cos u - \sin \delta \,.\, \cos p \text{ *)}.$$

Man könnte Anfangs in Zweifel bleiben, ob die Form

$$\cos \delta \,.\, \sin p \,.\, \cos u - \sin \delta \,.\, \cos p,$$

oder die andere

$$\sin \delta \,.\, \cos p - \cos \delta \,.\, \sin p \,.\, \cos u$$

hierbei gewählt werden müfste. Allein dies läfst sich durch folgende Betrachtung leicht entscheiden. Die Gröfse $\cos H \,.\, \cos A$ ist nämlich der Abscisse ξ' pro-

---

*) Zu dieser Formel kann man auch auf folgendem Wege gelangen. Es ist

$$\sin \delta = \sin H \,.\, \sin p - \cos H \,.\, \cos p \,.\, \cos A,$$

also $\cos A \,.\, \cos H = \sin H \,.\, \dfrac{\sin p}{\cos p} - \dfrac{\sin \delta}{\cos p}$,

setzt man nun für $\sin H$ den Werth $\sin p \,.\, \sin \delta + \cos p \,.\, \cos \delta \,.\, \cos u$, so ist

$$\begin{aligned}\cos A \,.\, \cos H &= \frac{\sin p^2 \,.\, \sin \delta}{\cos p} + \sin p \,.\, \cos \delta \,.\, \cos u - \frac{\sin \delta}{\cos p} \\ &= \sin p \,.\, \cos \delta \,.\, \cos u - \sin \delta \,.\, \cos p.\end{aligned}$$

Auf diesem Wege kann über das Zeichen des Werthes von $\cos A \,.\, \cos H$ kein Zweifel herrschen. G.

[illegible] während u abnimmt; es [illegible] negativ ausfallen, welches [illegible] der zweiten Form geschieht.

Da [illegible]
als [illegible]
din[illegible] [illegible] Mittelpunkts der Sonne
we[illegible] [illegible]sen ausdrücken, wenn
Gl[illegible] [illegible] $H . \sin A$, $\sin H$ ihre
zw[illegible]
ξ. [illegible] $\cos u - \sin \delta . \cos p)$
S[illegible]
m[illegible] [illegible] $- \cos p . \cos \delta . \cos u)$,
[illegible] die Gleichungen (§. 160.)

[illegible]

[illegible] nen nur den Winkel u zu [illegible] der Curve zu haben. [illegible] der Sonne gegen die [illegible] uns aber einer Abkürzung [illegible] $- \zeta$ im Nenner bloſs ζ'

[illegible]

[illegible] folgt

$$[illegible] \sin \delta - \zeta \sin \delta . \cos p$$
$$[illegible] - (x - \xi) \cos p . \cos \delta$$

[illegible] die Gleichung

$$[illegible] + \cos p . \cos \delta . \cos u),$$

[illegible]

$$\frac{\cos \delta . \sin \delta}{[illegible] + (x - \xi) \cos p . \cos \delta}$$

[illegible] vermittelst der Gleichung

$$y\zeta' = \eta\zeta' - \eta'\zeta$$

$$\eta' = r.(\eta - y).\frac{\sin\delta.\cos\delta}{\zeta\cos\delta.\sin p + (x-\xi)\cos p.\cos\delta},$$

und da $\eta' = r.\cos\delta.\sin u$ ist, so wird

$$\sin u = \frac{(\eta - y).\sin\delta}{\zeta\cos\delta.\sin p + (x-\xi)\cos p.\cos\delta}.$$

Quadrirt man diese Gleichung, so wie die für $\cos u$, und addirt dann die Quadrate, so kommt

$$\zeta^2(\cos\delta^2.\sin p^2 - \sin\delta^2.\cos p^2)$$
$$= (\eta - y)^2.\sin\delta^2 + (\xi - x)^2.(\sin p^2.\sin\delta^2 - \cos p^2.\cos\delta^2)$$
$$- 2\zeta(x-\xi)\sin p.\cos p.$$

Diese Gleichung ist für x und y vom zweiten Grade, folglich gilt sie für einen Kegelschnitt. Der Kürze wegen wollen wir annehmen, dafs der Stab in der Mittagsebene aufgesteckt, also $\eta = o$ sey. Dann läfst sich die Gleichung so schreiben:

$$\zeta^2(\cos\delta^2.\sin p^2 - \sin\delta^2.\cos p^2)$$
$$+ \xi^2(\cos\delta^2.\cos p^2 - \sin p^2.\sin\delta^2) - 2\zeta\xi\sin p.\cos p$$
$$= x^2(\sin p^2.\sin\delta^2 - \cos p^2.\cos\delta^2)$$
$$- 2x(\zeta\cos p.\sin p + \xi\sin p^2.\sin\delta^2 - \xi\cos p^2.\cos\delta^2)$$
$$+ y^2.\sin\delta^2.$$

Man nehme nun $x = v + m$, so dafs v die neue Abscisse, und m eine Constante bedeutet, die aus den andern in der Gleichung vorkommenden Gröfsen zu bestimmen ist. Durch Substitution dieses Werthes wird

$$\zeta^2(\cos\delta^2.\sin p^2 - \sin\delta^2.\cos p^2)$$
$$+ \xi^2(\cos\delta^2.\cos p^2 - \sin\delta^2.\sin p^2) - 2\zeta\xi\sin p.\cos p$$
$$= v^2(\sin p^2.\sin\delta^2 - \cos p^2.\cos\delta^2)$$
$$+ m^2(\sin p^2.\sin\delta^2 - \cos p^2.\cos\delta^2)$$
$$+ 2v(m.\sin p^2.\sin\delta^2 - m.\cos p^2.\cos\delta^2$$
$$- \zeta\cos p.\sin p - \xi\sin p^2.\sin\delta^2 + \xi\cos p^2.\cos\delta^2)$$
$$- 2m(\zeta\cos p.\sin p + \xi\sin p^2.\sin\delta^2 - \xi\cos p^2.\cos\delta^2)$$
$$+ y^2.\sin\delta^2.$$

Hieraus bestimmen wir m so, dafs alle von v und y unabhängige Glieder aus der Gleichung heraus fallen, d. h. es wird

ausgeht. Wird die Gleichung des dunkeln Kör-
durch eine bestimmte Relation zwischen x, y, z
drückt, und bezeichnet man die Coordinaten eines
tes der an diesen Körper gelegten Berührungs-
durch X, X, Z, so ist die Gleichung der Be-
ungsebene

$$(Z - z) = p\,(X - x) + q\,(Y - y),$$

die Gröfsen p und q die partiellen Differentialcoef-
nten $\left(\frac{dz}{dx}\right)$ und $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ angeben. Sind ferner die
rdinaten des leuchtenden Punktes ξ, η, ζ, so mufs
Berührungsebene, welche an irgend einen Punkt
Erleuchtungsgrenze des dunkeln Körpers gelegt
, durch den leuchtenden Punkt gehen, d. h. für
elbe mufs die Gleichung

$$\zeta - z = p\,(\xi - x) + q\,(\eta - y)$$

t finden. Verbindet man mit dieser Gleichung die
chung der Oberfläche des Körpers, so erhält man
Gleichungen zwischen x, y, z, welche die Natur
Curve, die die Erleuchtungsgrenze bildet, an-
en.

Bezeichnet man die allgemeinen Coordinaten einer
den Linie, die durch die zwei Punkte geht, deren
rdinaten resp. ξ, η, ζ; x, y, z sind, durch X, Y, Z,
erden die beiden Gleichungen, welche eine solche
de Linie darstellen,

$$Y - \eta = \frac{\eta - y}{\xi - x}\,(X - \xi),$$

$$Z - \zeta = \frac{\zeta - z}{\xi - x}\,(X - \xi),$$

wenn alle Punkte, durch welche nach und nach
e grade Linie geht, auf der Erleuchtungsgrenze
en sollen, so hat man zwei Gleichungen für diesel-
, zwischen x, y, z, und verbindet man diese mit
so eben angegebenen Gleichungen der graden
ie, so lassen sich aus diesen vier Gleichungen die
fsen x, y, z eliminiren, und man erhält die Glei-

$$aaz\,(\xi - \alpha) = bbx\,(\zeta - \gamma)$$
$$bby\,(\zeta - \gamma) = aaz\eta$$
$$(z - \zeta) + \frac{bbx}{aaz}(x - \xi) + \frac{bby}{aaz}(y - \eta) = o.$$

e letzte läfst sich mit Zuziehung der Gleichung

$$aazz + bb\,(xx + yy) = aabb$$

ch so schreiben:

$$aabb = aaz\zeta + bby\eta + bbx\xi.$$

an erhält aus diesen drei Gleichungen

$$\xi - \alpha = \frac{bbx}{aaz}(\zeta - \gamma)$$
$$\eta = \frac{bby}{aaz}(\zeta - \gamma)$$
$$\zeta - \gamma = \frac{aabb - bbx\alpha - aazy}{b^4 + (aa - bb)\,zz} \cdot z.$$

bstituirt man die beiden ersten Werthe in die Gleichung

$$(\zeta - \gamma)^2 + \eta\eta + (\xi - \alpha)^2 = rr,$$

kommt

$$(\zeta - \gamma)^2 \left[1 + \frac{b^4y^2}{a^4zz} + \frac{b^4x^2}{a^4zz}\right] = rr$$

er auch, da

$$b^4\,(x^2 + y^2) = aabb\,(bb - zz),$$
$$(\zeta - \gamma)^2\,[b^4 + (aa - bb)\,zz] = rra^2z^2,$$

tzt man hierin obigen Werth von $(\zeta - \gamma)$, so wird

$$abb - bbx\alpha - aazy)^2 = rraa\,[b^4 + (aa - bb)\,zz]$$

e eine Gleichung der Erleuchtungsgrenze des dunkeln örpers und

$$aazz + bb\,(xx + yy) = aabb$$

rd die andere Gleichung darstellen. Diese Gleichun- n finden z. B. Statt bei der Erleuchtung der Planeten rch die Sonne.

§. 167.

Da die Gestalt der Planeten wenig von der Kugelform weicht, so lassen sich vorige Gleichungen noch etwas einfachen. Bezeichnet man die geocentrische Breite nes Ortes durch ψ, seine geographische Länge, von

dem Ort aus gezählt, wo die Sonne culminirt, durch φ seinen Abstand vom Mittelpunkt der Erde durch ϱ, so hat man

$$x = \varrho \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\psi$$
$$y = \varrho \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\psi$$
$$z = \varrho \,.\, \sin\psi,$$

und die Gleichung $aazz + bb\,(xx + yy) = aabb$ verwandelt sich in diese:

$$aa\varrho\varrho \,.\, \sin\psi^2 + bb\varrho\varrho \,.\, \cos\psi^2 = aabb.$$

Man setze nun $bb = aa\,(1 - ee)$, so kommt

$$\varrho\varrho \,.\, \sin\psi^2 + \varrho\varrho\,(1 - ee)\,\cos\psi^2 = aa\,(1 - ee),$$

und da ee ein kleiner Bruch ist, dessen höhere Potenzen vernachlässigt werden können, so erhält man hieraus

$$\varrho = a\,(1 - \tfrac{1}{2}\,ee \,.\, \sin\psi^2).$$

Zieht man ferner in der Gleichung

$$(aabb - bbx\alpha - aaz\gamma)^2 = rraa\,[b^4 + (aa - bb)\,zz]$$

auf beiden Seiten die Quadratwurzel aus, so kommt, mit Beibehaltung des doppelten Vorzeichens,

$$aabb - bbx\alpha - aaz\gamma = \pm ra\sqrt{(b^4 + (aa - bb)\,zz)},$$

oder, wenn $aa\,(1 - ee)$ statt bb gesetzt wird,

$$aa(1 - ee) - (1 - ee)\,ax - z\gamma = \pm r\sqrt{(aa(1 - 2ee) + eezz)}$$
$$= \pm ra\left(1 - ee + \tfrac{1}{2}\,ee \,.\, \frac{zz}{aa}\right).$$

Man hat nun aus dem Vorigen

$$x = a\,(1 - \tfrac{1}{2}\,ee \,.\, \sin\psi^2) \,.\, \cos\psi \,.\, \cos\varphi$$
$$z = a\,(1 - \tfrac{1}{2}\,ee \,.\, \sin\psi^2) \,.\, \sin\psi,$$

folglich läfst sich vorige Gleichung auch so schreiben:

$$a\,(1 - ee) - \alpha \,.\, \cos\psi \,.\, \cos\varphi\,(1 - ee - \tfrac{1}{2}\,ee \,.\, \sin\psi^2)$$
$$- \gamma \,.\, \sin\psi\,(1 - \tfrac{1}{2}\,ee \,.\, \sin\psi^2)$$
$$= \pm r\,(1 - ee + \tfrac{1}{2}\,ee \,.\, \sin\psi^2).$$

Setzt man die Entfernung der Erde von der Sonne $= R$, ihre Declination $= \delta$, so ist

$$\alpha = R \,.\, \cos\delta, \quad \gamma = R \,.\, \sin\delta,$$

und da die Halbmesser der Erde und der Sonne a und r gegen die Entfernung R nur sehr klein sind, so kann man auch bei den in a und r multiplicirten Gliedern die Gröfse ee weglassen; dann erhält man

$$a - R.\cos\delta.\cos\psi.\cos\varphi\,(1 - ee - \tfrac{1}{2}ee.\sin\psi^2) - R.\sin\delta.\sin\psi\,(1 - \tfrac{1}{2}ee.\sin\psi^2) = \pm r.$$

In der mathematischen Geographie wird ferner gezeigt, dafs, wenn θ die geographische Breite eines Ortes bedeutet, zwischen θ und ψ die Gleichung

$$a.\tang\psi = b.\tang\theta$$

Statt findet. Hieraus erhält man leicht, wenn die höhern Potenzen von ee vernachlässigt werden, die Werthe von

$$\cos\psi = \cos\theta\,(1 + \tfrac{1}{2}ee.\sin\theta^2)$$
$$\sin\psi = \sin\theta\,(1 - \tfrac{1}{2}ee.\cos\theta^2),$$

und wenn man diese in vorige Gleichung substituirt, so wird

$$a - R.\cos\delta.\cos\varphi.\cos\theta(1-ee) - R.\sin\delta.\sin\theta(1-\tfrac{1}{2}ee) = \pm r.$$

Hieraus folgt nun

$$\cos\varphi = \frac{a \pm r}{R.\cos\delta.\cos\theta} - \tang\delta.\tang\theta\,(1 + \tfrac{1}{2}ee).$$

Aus dieser Gleichung läfst sich bestimmen, durch welche Länge bei gegebener Breite die Erleuchtungsgrenze gehe. Das doppelte Vorzeichen erklärt sich leicht aus den Betrachtungen, die wir (§. 156.) angestellt haben.

Von der Erleuchtung.

---

§. 168.

Es ist schon oben aus der Erfahrung dargethan worden, dafs das Licht von einem leuchtenden Punkt uns nach allen Seiten in graden Linien sich verbreite. Wir mögen nun die Art dieser Verbreitung erklären, wie wir wollen, so müssen wir doch das Licht als eine Materie betrachten, die verschiedene Dichtigkeiten anzunehmen im Stande ist, so dafs in einem und demselben Raum eine gröfsere oder kleinere Menge Lichttheilchen enthalten seyn können. Denkt man sich um den leuchtenden Punkt mehrere concentrische Kugeln beschrieben,

geben. Eliminirt man dagegen
beiden übrigen Gleichungen zwi
desjenigen Theils des hellen
Strahlen auf den dunkeln fall

Verbindet man mit vorig
die beiden einer graden L
Punkte geht, deren Coordi
sind, nämlich:

$$Y - \eta = \frac{\eta}{\xi}$$

$$Z - \zeta =$$

so hat man sieben Gleic
ξ, η, ζ eliminiren las
zwischen X, Y, Z,
fläche des Schatten

Als ein hierh
den dunkeln Körp
dessen Gleichung

$$aaz =$$

ausgedrückt wird
Kugel vom Halb
Mittelpunkts α,

$$(\zeta -$$

Die Differential

$$aa =$$

$$(\zeta$$

und hieraus e

$$p$$

$$p'$$

Es werden d
Paragraphen

§. 169.

Wenn man annimmt, dafs die ganze innere Oberfläche einer Kugel gleichförmig erleuchtet ist, so mufs auf gleich grofse Stücken der Kugeloberfläche gleich viel Licht fallen, und hieraus folgt, dafs die Lichtmenge, welche auf ein bestimmtes Stück dieser Fläche fällt, der Fläche selbst proportional seyn mufs. Bezeichnet man die auf eine Kugeloberfläche, die mit dem Halbmesser $= 1$ beschrieben ist, fallende Lichtmenge durch 1, und die daselbst Statt findende Dichtigkeit des Lichts ebenfalls durch 1, so kann man leicht die Lichtmenge finden, die auf irgend ein anderes um den leuchtenden Punkt als Mittelpunkt mit dem Halbmesser r beschriebenes Kugelstück fällt. Es sey das Verhältnifs des Kugelstücks zur ganzen Kugeloberfläche wie $s : 1$, so wird die Lichtmenge, die auf dasselbe fällt, ebenfalls durch s ausgedrückt werden, und die Dichtigkeit des auf ihm befindlichen Lichtes durch $\frac{1}{rr}$, wie im vorigen Paragraph erwiesen ist.

§. 170.

Da wir bisher immer eine Kugeloberfläche annahmen, deren Mittelpunkt im leuchtenden Punkt befindlich war, auf welche das aus demselben ausfliefsende Licht auffallen sollte, so war die Richtung des Lichtstrahles immer senkrecht gegen die auffangende Fläche, und die angegebenen Regeln, welche die Vertheilung des Lichts befolgen soll, werden daher nur für senkrecht auffallendes Licht gelten.

Man kann aber auf folgende Weise leicht finden, wie sich die Erleuchtung bei schief auffallendem Lichte verhält. Es sey L ein leuchtender Punkt (Fig. 28.), der auf ein unendlich kleines Stück AB einer mit dem Halbmesser LB beschriebenen Kugeloberfläche Licht sendet, so wird die auffallende Lichtmenge der Fläche AB direct, und dem Quadrat von LB umgekehrt pro-

deren Mittelpunkt der le[illegible] durch l eine
versteht es sich von selb[illegible]
Oberflächen dieser Kugeln [illegible] die Prop
viel Licht fallen muſs, [illegible] Punkte von gl
die Dichtigkeit des Li[illegible] Gröſse haben
den gröſsern. Das V[illegible]
jeder dieser Kugelfläch[illegible] [illegible]lich kleine,
Oberfläche selbst pro[illegible] ebenfalls bei
also die Lichtvolumin[illegible] eben angeno
deren Halbmesser r [illegible] Winkel ABC
hat man die Proporti[illegible] der Fläche CB,
$v : v'$ [illegible] entfernt liegen,
da sich bekanntlich [illegible] Entfernungen LC -
die Quadrate ihrer [illegible] klein, so daſs w
man ferner die Di[illegible] CB auffallende Lic
gefallenen Lichtvolu[illegible]. Nun werde die
die Lichtmasse, w[illegible] durch ϱ, die auf CB
vom Halbmasser r [illegible] die Lichtmassen, [illegible]
che auf der Kug[illegible]
sich befindet $= \varrho'$ [illegible]
gleich seyn müsse[illegible] dieselbe Lichtmeng
$v : v' = \varrho' : \varrho$, [illegible]
v [illegible]
vorhin gefunden [illegible] Gleichung in eine Pro
beider Proporti[illegible]
[illegible] AB,
[illegible] Dichtigkeiten umgekeh
d. h. die Dicht[illegible] [illegible]lich kleinen Ausd
ausströmenden [illegible] gegen die Entfernu
die Quadrate [illegible] sey senkrecht auf A
strahlenden [illegible]
Es ist [illegible] $\sin ACB$,
Kugeloberfläc[illegible]
Dichtigkeit [illegible] $\sin ACB$.
leuchtenden [illegible] Winkel, den der ein
heit annimm[illegible] CB macht, folglich v
Licht sende[illegible] Lichts auf zwei un

Flächen, welche gleiche Entfernung vom leuchPunkt besitzen, aber unter verschiedenen Winkeln einfallenden Strahl geneigt sind, wie die dieser Winkel.

§. 172.

Bezeichnet man also die Entfernung des beleuchElements vom leuchtenden Punkt durch r, seine gegen den einfallenden Strahl durch ε, die des Elements durch s, und durch l eine conGröfse, die von der Intensität des Lichts des enden Punkts abhängt, so hat man die Lichtwelche dieses Element empfängt,

$$= \frac{l \cdot s}{rr} \cdot \sin \varepsilon.$$

e beleuchtete Fläche von endlicher Ausdehnung, ng nun eben oder krumm seyn, so giebt diese l ebenfalls die Lichtmenge, welche auf die ganze e fällt, indem man die Summe dieses Ausdrucks le Elemente sucht, aus denen die Fläche besteht, es bekanntlich durch die Integration dieser Formel ren den Grenzen, welche die Natur der erleuchFläche erfordert, zu Stande gebracht wird, und das dabei anzuwendende Verfahren sollen nachher Beispiele ausgeführt werden.

§. 173.

Die Dichtigkeit des Lichts auf jedem dieser Ele- findet sich, indem die Lichtmenge durch die des Elements dividirt wird, und hierdurch erhält dieselbe

$$\varrho = \frac{l \cdot \sin \varepsilon}{rr}.$$

ist also bei einer ausgedehnten Fläche aus zwei nden veränderlich, erstens, weil jedes Element einen ern Abstand r vom leuchtenden Punkt hat, und itens, weil der einfallende Strahl mit jedem Element en andern Einfallswinkel bildet. Man kann daher

[illegible] der Dichtigkeit des Lichts auf einer a[illegible] [illegible] Fläche im Allgemeinen fragen (wenn diese [illegible] [illegible] den leuchtenden Punkt als Centrum [illegible] Kugeloberfläche ist), sondern man muſ [illegible] des Elements erst bestimmen, und dann be[illegible] [illegible] die gefundene Dichtigkeit auf dieses Element a[illegible] [illegible] alle gleichliegende. Ist z. B. die erleuc[illegible] Fläche eine Kugel, und zieht man vom erleuch[illegible] Punkte der außerhalb der Kugel liegt, nach [illegible] der Kugel eine Linie, welche die Oberf[illegible] der Kugel schneidet, so erhalten alle Elemente, [illegible] diesem Durchschnittspunkt gleich weit abst[illegible] [illegible] Licht, und das auf sie fallende Licht [illegible] gleiche Dichtigkeit, indem sehr einfach zu [illegible] ist, daß alle so bestimmte Elemente der K[illegible] [illegible] sowohl gleich weit vom leuchtenden P[illegible] [illegible] sind, als auch gleiche Winkel mit dem [illegible] Lichtstrahl bilden.

§. 174.

Man kann aber sehr wohl eine mittlere Dichti[illegible] [illegible] bestimmen; denn nimmt man an, ϱ^0 se[illegible] [illegible], welche das Licht erhalten würde, [illegible] Lichtmenge gleichförmig auf der ganzen F[illegible] [illegible] wäre, so würde, wenn die Gröſse der g[illegible] Fläche, auf welche das Licht fällt, durch S bezei[illegible] [illegible] die Gleichung

$$\varrho^0 S = \int \frac{[illegible] \cdot s \cdot \sin \varepsilon}{r^2}$$

[illegible] Man erhält also die mittlere Dichti[illegible] [illegible] man die ganze Lichtmasse, die sich auf [illegible] Oberfläche befindet, durch die Ausdeh[illegible] [illegible] selbst dividirt.

§. 175.

Wenn die Erleuchtung bloſs von einem leuc[illegible] [illegible] kann man denselben als der [illegible] [illegible] betrachten. Ist nu[illegible]

ichung der erleuchteten Oberfläche in Polarcoordi-
n gegeben, die wir durch r, φ, ψ bezeichnen, wo
den Winkel bedeutet, welchen die Projection des
dius vector auf die Ebene x, y mit der Axe der x
cht, und ψ den Winkel, welchen der Radius vector
seine Projection einschliefsen, so ist das Element
Oberfläche

$$s = \frac{rr \,.\, d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi}{\cos\theta},$$

θ den Winkel bezeichnet, den der nach einem
kt der Oberfläche gezogene Radius vector mit der
male, welche an demselben Punkte errichtet wird,
et. Dieser Winkel ist aber auch das Complement
enigen, welchen der Radius oder der Lichtstrahl
der Berührungsebene an dem Punkte, oder dem
nent macht, d. h. er ist das Complement des Ein-
winkels. Man hat also

$$\theta = 90^0 - \varepsilon, \quad \cos\theta = \sin\varepsilon,$$

lich, wenn man diesen Ausdruck in die vorige Formel
tituirt, und die Lichtmenge durch L bezeichnet,
ommt

$$L = l \int d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi,$$

der Factor l als eine constante Gröfse vor das
gralzeichen gesetzt werden kann. Die mittlere Dich-
eit ist also

$$\varrho^0 = \frac{L}{S},$$

S den Flächenraum bedeutet, auf welchen das
ht fällt.

§. 176.

Will man aber die Dichtigkeit des Lichts an einer
timmten Stelle der Fläche haben, so ist die Kenntnifs
Winkels ε unumgänglich nöthig, da diese Dichtigkeit
ch

$$\varrho = \frac{l \,.\, \sin\varepsilon}{rr}$$

gedrückt wird. Es seyen die Coordinaten des er-
chteten Elements x, y, z, so werden die Gleichungen

des aus dem Anfangspunkt der Coordinaten ausgehenden Lichtstrahls durch

$$Y = \frac{y}{x} . X, \quad Z = \frac{z}{x} . X$$

ausgedrückt, und die Gleichungen der auf demselben Element errichteten Normale sind

$$p\,(Z - z) + (X - x) = o$$
$$q\,(Z - z) + (Y - y) = o,$$

wo p und q die partiellen Differentialcoefficienten $\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ bedeuten. Aus diesen Gleichungen findet sich der Winkel, den beide Linien mit einander bilden, auf die bekannte Art

$$\cos\theta = \frac{px + qy - z}{r\sqrt{1 + pp + qq}}.$$

§. 177.

Man kann nun diese Formel unter dieser Gestalt gebrauchen, und in jedem besondern Fall die partiellen Differentialcoefficienten p, q durch x, y, z, sobald die Gleichung in rechtwinkligen Coordinaten gegeben ist, ausdrücken, und dann erst, um Polarcoordinaten zu erhalten, die Werthe

$$x = r . \cos\varphi . \cos\psi$$
$$y = r . \sin\varphi . \cos\psi$$
$$z = r . \sin\psi$$

einführen. Allein voriger Ausdruck läfst sich auch allgemein auf Polarcoordinaten reduciren, so dafs blofs zwischen diesen die Gleichung der Oberfläche bekannt zu seyn braucht. Die Reduction kann folgendermafsen ausgeführt werden. Gesetzt, die Gleichung der Oberfläche sey zwischen rechtwinkligen Coordinaten gegeben, und sie werde durch $V = o$ bezeichnet, so ist

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) dx + \left(\frac{dV}{dy}\right) dy + \left(\frac{dV}{dz}\right) dz = o.$$

Hieraus ergiebt sich

des aus dem Anfangsp… kommt
Lichtstrahls durch

$$\ldots + \frac{z}{r} \cdot dz$$

$$Y = \frac{y}{\ldots}$$

$$\ldots \frac{\cos\varphi^2}{xx} \cdot dx$$

ausgedrückt, und …
Element errichteten

$$\ldots - z \cdot \frac{x dx + y dy}{\sqrt{(xx+yy)^5}} \cdot \cos\varphi$$

$$p\ (Z \ldots$$

$$q\ (Z \ldots$$

wo p und q … von dr, $d\varphi$, $d\psi$ in vorig…
$\left(\frac{dz}{dx}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ … ndige Differential dV aus-

sich der Winkel …
auf die bekann…

$$\ldots \cos\psi - \left(\frac{dV}{d\varphi}\right) \cdot \frac{\sin\varphi}{r \cdot \cos\psi}$$

$$- \left(\frac{dV}{d\psi}\right) \cdot \frac{\cos\varphi \cdot \sin\psi}{r} \Big] dx$$

$$\ldots \cos\psi + \left(\frac{dV}{d\varphi}\right) \cdot \frac{\cos\varphi}{r \cdot \cos\psi}$$

Man …
gebrauchen …

$$- \left(\frac{dV}{d\psi}\right) \cdot \frac{\sin\varphi \cdot \sin\psi}{r} \Big] dy$$

Differential …
Gleichung …

$$\ldots + \left(\frac{dV}{d\psi}\right) \cdot \frac{\cos\psi}{r} \Big] dz,$$

ausdrück…
erhalten …

§. 179.

… diesen Ausdruck mit dem vollstän…
… V, indem V als Function von …
einführ… … wird, so erhält man, da

$$\ldots + \left(\frac{dV}{dy}\right) dy + \left(\frac{dV}{dz}\right) dz,$$

allgem…
zwisch…
zu s…
… Coefficienten von dx, dy, dz in beide
ausg…
fläch… … gleich setzt,
ben …

$$\ldots \cos\varphi \cdot \cos\psi - \left(\frac{dV}{d\varphi}\right) \cdot \frac{\sin\varphi}{r \cdot \cos\psi}$$

$$- \left(\frac{dV}{d\psi}\right) \cdot \frac{\cos\varphi \cdot \sin\ldots}{r}$$

Hie…

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = \left(\frac{dV}{dr}\right).\sin\varphi.\cos\psi + \left(\frac{dV}{d\varphi}\right).\frac{\cos\varphi}{r.\cos\psi} - \left(\frac{dV}{d\psi}\right).\frac{\sin\varphi.\sin\psi}{r}$$

$$\left(\frac{dV}{dz}\right) = \left(\frac{dV}{dr}\right).\sin\psi + \left(\frac{dV}{d\psi}\right).\frac{\cos\psi}{r}.$$

mittelst dieser Ausdrücke ergiebt sich nun

$$x.\left(\frac{dV}{dx}\right) + y.\left(\frac{dV}{dy}\right) + z.\left(\frac{dV}{dz}\right) = r.\left(\frac{dV}{dr}\right)$$

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 = \left(\frac{dV}{dr}\right)^2 + \left(\frac{dV}{d\varphi}\right)^2.\frac{1}{rr.\cos\psi^2} + \left(\frac{dV}{d\psi}\right)^2.\frac{1}{rr},$$

wenn man diese Werthe in den Ausdruck von $\cos\theta$ §. 177. substituirt, so erhält man

$$\vartheta = \frac{r.\left(\frac{dV}{dr}\right)}{\sqrt{\left[\left(\frac{dV}{d\psi}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dr}\right)^2.rr + \left(\frac{dV}{d\varphi}\right)^2.\frac{1}{\cos\psi^2}\right]}}.$$

§. 180.

Betrachtet man ferner r als Function von φ und so ist

$$dr = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right).d\varphi + \left(\frac{dr}{d\psi}\right).d\psi,$$

da die Gleichung der Oberfläche $V = o$ ist, so man ebenfalls $dV = o$, oder

$$\left(\frac{dV}{dr}\right).dr + \left(\frac{dV}{d\varphi}\right).d\varphi + \left(\frac{dV}{d\psi}\right).d\psi = o.$$

raus ergiebt sich

$$dr = -\frac{\left(\frac{dV}{d\varphi}\right)}{\left(\frac{dV}{dr}\right)}.d\varphi - \frac{\left(\frac{dV}{d\psi}\right)}{\left(\frac{dV}{dr}\right)}.d\psi.$$

Man hat also durch Vergleichung der beiden Ausdrücke von dr die Gleichungen

$$\left(\frac{dV}{d\varphi}\right) = -\left(\frac{dV}{dr}\right)\cdot\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)$$
$$\left(\frac{dV}{d\psi}\right) = -\left(\frac{dV}{dr}\right)\cdot\left(\frac{dr}{d\psi}\right)$$

und wenn man diese Werthe in vorige Gleichung für $\cos\theta$ substituirt, so kommt

$$\cos\theta = \frac{r}{\sqrt{\left[rr + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos\psi^2} + \left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2\right]}},$$

welche die gesuchte Formel ist.

§. 181.

Da wir ferner in §. 175. gezeigt haben, dafs der Winkel θ das Complement des Winkels ε ist, so wird $\cos\theta = \sin\varepsilon$, also, wenn wir diesen Winkel in die Formel der Dichtigkeit des Lichts

$$\varrho = \frac{l\,.\sin\varepsilon}{rr}$$

substituiren, so kommt die Dichtigkeit

$$\varrho = \frac{l}{r.\sqrt{\left[rr + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\cdot\frac{1}{\cos\psi^2} + \left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2\right]}}.$$

Im Allgemeinen wird dieser Ausdruck die drei veränderlichen Gröfsen r, φ, ψ enthalten, allein da die Gleichung der Oberfläche zwischen denselben Gröfsen gegeben ist, so kann man eine derselben, z. B. r, eliminiren, und man erhält hierdurch ϱ als Function von φ und ψ.

§. 182.

Wir wollen als Beispiel die Lichtmenge berechnen, welche auf die Oberfläche einer Kugel fällt. Die Entfernung des leuchtenden Punkts vom Mittelpunkt der Kugel sey $= f$, der Halbmesser der Kugel $= a$, so ist die Gleichung der Kugel, wenn wir die Linie, welche

Mittelpunkt der Kugel mit dem leuchtenden Punkt
indet, als die Axe der z annehmen

$$aa = rr + ff - 2fr \cdot \sin\psi.$$

ist nach §. 175. die Lichtmenge

$$L = l \int d\varphi \cdot d\psi \cdot \cos\psi.$$

grirt man zuerst nach φ, so mufs diese Integration
$\varphi = o$ bis $\varphi = 2\pi$ geschehen, es wird also

$$L = 2\pi l \int d\psi \cdot \cos\psi.$$

rauf integrirt man nach ψ, so kommt

$$L = 2\pi l \cdot \sin\psi + \text{Const},$$

setzt man hierin statt $\sin\psi$ seinen Werth

$$\sin\psi = \frac{rr + ff - aa}{2fr},$$

wird

$$L = \pi l \cdot \frac{rr + ff - aa}{fr} + \text{Const.}$$

mt man an, dafs für den Werth $r = r'$ das Integral
nge, also das Kugelstück von einem Parallelkreise
renzt werde, dessen Entfernung vom leuchtenden
kte $= r'$ ist, so hat man

$$\text{Const} = -\pi l \cdot \frac{r'r' + ff - aa}{fr'},$$

da das Integral seinen vollen Werth erreicht, sobald
$= f - a$ ist, so kommt ebenfalls

$$= \frac{\pi l}{f} \cdot \left[\frac{(f-a)^2 + ff - aa}{f-a} - \frac{r'r' + ff - aa}{r'}\right].$$

zt man noch $f - a = k$, wo also k die Entfernung
leuchtenden Punktes vom Pol des Parallelkreises
deutet, so kommt

$$L = \frac{\pi l}{a+k} \cdot \left[2(k+a) - \frac{r'r' + kk + 2ak}{r'}\right].$$

ill man die Lichtmenge für den ganzen erleuchteten
heil der Kugel haben, so braucht man nur zu be-
rken, dafs der letzte Werth von

$$r' = \sqrt{ff - aa} = \sqrt{kk + 2ak}$$

ist. Substituirt man also diesen Werth in vorige Gleichung, so wird

$$L' = 2\pi l \cdot \left[1 - \frac{\sqrt{kk + 2ak}}{a + k}\right].$$

§. 183.

Um die mittlere Dichtigkeit auf dem erleuchteten Theil der Kugel zu haben, müssen wir die Gröfse desselben kennen; nun ist (§. 175.)

$$S = \int \frac{rrd\varphi \cdot d\psi \cdot \cos\psi}{\cos\theta},$$

und nach §. 180.

$$\cos\theta = \sin\varepsilon = \frac{r}{\sqrt{\left[rr + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos\psi^2} + \left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2\right]}}.$$

Differentiirt man die im vorigen Paragraph gegebene Gleichung der Oberfläche der Kugel

$$aa = rr + ff - 2fr \cdot \sin\psi,$$

so erhält man

$$o = rdr - fdr \cdot \sin\psi - fr \cdot \cos\psi d\psi,$$

folglich werden die partiellen Differentiale

$$\left(\frac{dr}{d\psi}\right) = \frac{fr \cdot \cos\psi}{r - f \cdot \sin\psi}, \quad \left(\frac{dr}{d\varphi}\right) = o.$$

Hierdurch wird nun

$$rr + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \cdot \frac{1}{\cos\psi^2} + \left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2$$

$$= rr + \frac{ffrr \cdot \cos\psi^2}{(r - f \cdot \sin\psi)^2}$$

$$= \frac{rr - 2fr \cdot \sin\psi + ff}{(r - f \cdot \sin\psi)^2} \cdot rr$$

$$= \frac{aarr}{(r - f \cdot \sin\psi)^2};$$

folglich kommt auch

$$\cos\theta = \frac{r - f \cdot \sin\psi}{a} = \sin\varepsilon.$$

Substituirt man dies in den Ausdruck von S, so erhält man

$$S = a\int \frac{rrd\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi}{r - f \,.\, \sin\psi},$$

oder, wenn man nach φ von $\varphi = o$ bis $\varphi = 2\pi$ integrirt,

$$S = 2a\pi \int \frac{rrd\psi \,.\, \cos\psi}{r - f \,.\, \sin\psi}.$$

Aus diesem Ausdruck mufs nun erst ψ eliminirt werden, wenn man integriren will. Man erhält:

$$\sin\psi = \frac{rr + ff - aa}{2fr},$$

$$d\psi \,.\, \cos\psi = \frac{rr + aa - ff}{2fr^2} \,.\, dr$$

$$r - f \,.\, \sin\psi = \frac{rr + aa - ff}{2r}$$

$$\frac{d\psi \,.\, \cos\psi}{r - f \,.\, \sin\psi} = \frac{dr}{f \,.\, r},$$

folglich, wenn man diese Gröfse in den Ausdruck von S substituirt:

$$S = 2a\pi \cdot \frac{1}{f}\int rdr$$

$$= \frac{a\pi}{f} \cdot rr.$$

Dies Integral mufs von $r = f - a$ bis $r = r'$ genommen werden, und wenn man, wie §. 182., $f - a = k$ setzt, so kommt

$$S = a\pi \cdot \frac{r'r' - kk}{a + k}.$$

Da ferner ϱ^0 oder die mittlere Dichtigkeit des Lichts durch

$$\varrho^0 = \frac{L}{S}$$

ausgedrückt wurde, so hat man, wenn man den in §. 182. entwickelten Werth von L einführt,

$$\varrho^0 = \frac{l}{a} \cdot \left[\frac{2(k + a)}{r'r' - kk} - \frac{r'r' + kk + 2ak}{r'(r'r' - kk)}\right]$$

$$= \frac{l}{a} \cdot \frac{2a + k - r'}{r'(r' + k)}.$$

Nur findet sich noch die Dichtigkeit ϱ des Lichts an

jeder gegebenen Stelle der erleuchteten Kugelfläche durch die Formel:

$$\varrho = \frac{l \cdot \sin \varepsilon}{rr},$$

also, wenn man den Werth von $\sin \varepsilon$ hier substituirt,

$$\varrho = \frac{l\,(r - f \cdot \sin \psi)}{arr}$$

$$= \frac{l}{2a} \cdot \frac{rr + aa - ff}{r^3}.$$

Dieser Ausdruck würde negativ werden, da $ff > rr + aa$ ist, man kann ihn daher so schreiben:

$$\varrho = \frac{l}{2a} \cdot \frac{ff - aa - rr}{r^3}.$$

Man sieht leicht, dafs der negative Ausdruck von der Ausziehung der Wurzel im Werthe von $\cos \theta$ oder $\sin \varepsilon$ herrührt. Setzt man statt f seinen Werth $a + k$, so kommt

$$\varrho = \frac{l}{2a} \cdot \frac{2ak + kk - rr}{r^3},$$

und wenn man die Dichtigkeit des Lichts, welche in dem Punkte Statt findet, wo die nach dem Mittelpunkt vom leuchtenden Punkt gezogene Linie die Kugeloberfläche schneidet, durch ϱ' bezeichnet, so hat man, da für diesen Punkt der Werth von $r = k$ wird,

$$\varrho' = \frac{l}{kk},$$

folglich wird, indem man l eliminirt,

$$\varrho = \varrho' \cdot \frac{kk}{2ar} \cdot \frac{2ak + kk - rr}{rr}.$$

§. 184.

Wird der Radius a der Kugel unendlich grofs, so geht die Kugeloberfläche in eine Ebene über, und das von einem Parallelkreis eingeschlossene Stück der Kugelfläche verwandelt sich in eine ebene Kreisfläche. Bezeichnet man den Halbmesser dieses Kreises durch h, so sieht man leicht, dafs die Gröfse $r' = \sqrt{kk + hh}$,

wird, und man kann aus den vorigen Formeln für die Kugel die Erleuchtung eines Kreises finden, über dessen Mittelpunkt in der Höhe $= k$ sich ein leuchtender Punkt befindet. Wir haben (§. 182.)

$$L = \frac{\pi l}{a+k} \cdot \left[2(k+a) - \frac{r'r' + kk + 2ak}{r'}\right]$$
$$= \frac{\pi l}{r'} \cdot \left[\frac{2(r'-k)(a+k) + kk - r'r'}{a+k}\right],$$

und dieser Ausdruck wird für die Annahme, daſs $a = \infty$ ist,

$$L = 2\pi l \cdot \left(1 - \frac{k}{r'}\right),$$

da das Glied $\frac{r'r' - kk}{a+k}$ Null wird. Setzt man statt r' seinen Werth $\sqrt{kk+hh}$, so erhält man

$$L = 2\pi l \cdot \left(1 - \frac{k}{\sqrt{kk+hh}}\right),$$

und da die Fläche des Kreises $= hh\pi$ ist, so kommt die mittlere Dichtigkeit des Lichts

$$\varrho^0 = \frac{2l}{hh} \cdot \left(1 - \frac{k}{\sqrt{kk+hh}}\right).$$

Um die Dichtigkeit des Lichts in einem Punkte, dessen Abstand vom Centro des Kreises $= u$ ist, zu finden, braucht man nur in der Formel

$$\varrho = \frac{l}{2a} \cdot \frac{2ak + kk - rr}{r^3}$$

die Gröſse $a = \infty$ und $r = \sqrt{kk+uu}$ zu setzen, dann kommt

$$\varrho = \frac{lk}{\sqrt{(kk+uu)^3}}.$$

Will man die Stelle des Kreises finden, wo die Dichtigkeit des Lichts der mittlern Dichtigkeit gleich kommt, so hat man die Gleichung $\varrho^0 = \varrho$, oder

$$1 - \frac{k}{\sqrt{kk+hh}} = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{khh}{\sqrt{(kk+uu)^3}}.$$

Um diese Gleichung bequem aufzulösen, setze man

$$h = k \cdot \text{tang } \varepsilon, \quad u = k \cdot \text{tang } \psi,$$

wo ε und ψ die scheinbaren Gröfsen der Halbmesser h und u, aus dem leuchtenden Punkt gesehen, sind, so kommt

$$\cos\psi^2 \cdot \text{tang } \varepsilon^2 = 2\,(1 - \cos\varepsilon),$$
$$= 4 \sin \tfrac{1}{2}\varepsilon^2,$$

und da auch zugleich

$$\text{tang } \varepsilon^2 = \frac{4 \sin \frac{1}{2}\varepsilon^2 \cdot \cos \frac{1}{2}\varepsilon^2}{\cos \varepsilon^2},$$

so erhält man

$$\cos\psi = \sqrt[2]{\frac{\cos\varepsilon^2}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon^2}}.$$

Hierdurch läfst sich der Winkel ψ und vermittelst desselben auch der Abstand u berechnen. Ist die Entfernung des leuchtenden Punktes k gegen den Halbmesser h sehr grofs, so wird der Winkel ε sehr klein, und man kann ohne merklichen Fehler

$$\cos\varepsilon = 1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon^2, \quad \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon = 1 - \tfrac{1}{8}\varepsilon^2$$

setzen. Dann erhält man, da ebenfalls $\cos\psi = 1 - \frac{1}{2}\psi^2$ wird, $\psi = \varepsilon\sqrt{\frac{1}{4}}$.

§. 185.

Der Ausdruck der Dichtigkeit des Lichts auf einer bestimmten Stelle der Kreisfläche

$$\varrho = \frac{lk}{\sqrt{(kk + uu)^3}},$$

giebt zu einer zweiten Aufgabe Anlafs. Indem nämlich der Abstand u derselbe bleibt, kann man fragen, wie grofs k werden müsse, damit die Dichtigkeit ihren gröfsten Werth erhalte. Dafs wirklich ein gröfster Werth vorhanden ist, sieht man daraus, dafs für $k = o$ und $k = \infty$ beidemal $\varrho = o$ wird, folglich mufs dazwischen wenigstens ein Werth von k liegen, der für ϱ den möglichst gröfsten Werth giebt. Differentiirt man obigen Ausdruck, so kommt

$$\frac{d\varrho}{dk} = l \cdot \frac{uu - 2kk}{\sqrt{(kk + uu)^5}}.$$

an mufs bekanntlich, um das Maximum von ϱ zu finden, en Differentialcoefficienten $\frac{d\varrho}{dk} = o$ setzen, dann bleibt

$$uu - 2kk = o, \quad u = k\sqrt{2}.$$

Soll also der Rand des Kreises am meisten erleuchtet werden, so mufs die Höhe der Lichtflamme so angenommen werden, dafs dieselbe dem Halbmesser des Kreises, dividirt durch die Quadratwurzel aus 2, gleich ist, oder überhaupt wird die Stelle am besten erleuchtet, auf welche das Licht unter einem Winkel von $35^0\,15'\,52''$, dessen Tangente $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ist, einfällt.

§. 186.

So wie wir im §. 184. den Ort der Kreisfläche bestimmten, wo die Dichtigkeit des Lichts der mittlern Dichtigkeit gleich kam, so läfst sich auch der Ort der Kugelfläche aufsuchen, wo dieser Umstand Statt findet. Aus §. 183. hat man die mittlere Dichtigkeit

$$\varrho^0 = \frac{l}{a} \cdot \frac{2a - r' + k}{r'(r' + k)},$$

und die Dichtigkeit an einer Stelle, die den Abstand r von dem leuchtenden Punkt besitzt,

$$\varrho = \frac{l}{2a} \cdot \frac{2ak + kk - rr}{r^3},$$

folglich hat man zur Bestimmung von r die Gleichung:

$$\frac{2ak + kk - rr}{2r^3} = \frac{2a - r' + k}{r'(r' + k)},$$

welche vom dritten Grade ist. Bezeichnet man durch θ den Winkel, welchen der Halbmesser der Kugel, der nach demPunkte gezogen ist, welchen der Radius vector trifft, mit der vom Mittelpunkt der Kugel nach dem leuchtenden Punkt gezogenen Linie macht, so hat man die Gleichung

$$rr = (a + k)^2 + aa - 2a(a + k)\cos\theta,$$

und bedeutet a den scheinbaren Halbmesser der Ku-

gel, vom leuchtenden Punkt aus gesehen, so ist $\frac{a}{a+k} = \sin\alpha$, folglich auch

$$rr = (a+k)^2\,(1 - 2.\sin\alpha.\cos\theta + \sin\alpha^2),$$

und wenn man den Winkel am Mittelpunkt der Kugel, welcher dem Radius r' zugehört, durch θ' bezeichnet, so ist ebenfalls

$$r'r' = (a+k)^2\,(1 - 2.\sin\alpha.\cos\theta' + \sin\alpha^2).$$

Man erhält also, wenn man die erleuchtete Kugel als sehr entfernt vom leuchtenden Punkt ansieht, unter welcher Annahme die höhern Potenzen von $\sin\alpha$ vernachlässigt werden können,

$$r = (a+k)\,(1 - \sin\alpha.\cos\theta)$$
$$r' = (a+k)\,(1 - \sin\alpha.\cos\theta'),$$

oder auch, wenn statt a sein Werth aus der Gleichung $\frac{a}{a+k} = \sin\alpha$ gesetzt wird,

$$r = k\,(1 + 2.\sin\alpha.\sin\tfrac{1}{2}\theta^2)$$
$$r' = k\,(1 + 2.\sin\alpha.\sin\tfrac{1}{2}\theta'^2).$$

Substituirt man diese Werthe in die vorige Gleichung

$$\frac{2ak + kk - rr}{2r^3} = \frac{2a - r' + k}{r'\,(r'+k)},$$

so kommt mit Vernachlässigung der Potenzen von $\sin\alpha$, nachdem alle gehörige Zusammenziehungen geschehen sind,

$$\cos\theta = \cos\tfrac{1}{2}\theta'^2.$$

Betrachtet man hierbei die ganze erleuchtete Halbkugel, so wird $\theta' = 90^0$, $\cos\frac{1}{2}\theta' = \sqrt{\frac{1}{2}}$, folglich $\cos\theta = \frac{1}{2}$, und der Winkel $\theta = 60^0$. Es wird daher die mittlere Dichtigkeit des Lichts auf einer Kugel, die von einem sehr weit entfernten Punkt erleuchtet wird, derjenigen Dichtigkeit gleich seyn, welche ein Punkt der Kugeloberfläche besitzt, der sechszig Grad von dem Punkt entfernt liegt, wo die nach dem leuchtenden Punkt aus dem Centrum der Kugel gezogene Linie die Kugeloberfläche schneidet.

§. 187.

Es sey ferner ADB eine Ellipse, AB ihre grofse Axe, C ihr Mittelpunkt (Fig. 28 b.). L sey der leuchtende Punkt, der eine solche Lage hat, dafs ein auf die verlängerte Ebene der Ellipse gefälltes Perpendikel LK die verlängerte Axe in K trifft. M sey ein beliebiges Element der Fläche, so wird, wenn man $MC = r$, $ACM = \varphi$ setzt, das Element $= rdrd\varphi$, folglich die Lichtmenge, die auf dasselbe fällt,

$$= \frac{l \,.\, rdrd\varphi \,.\, \sin LMK}{LM^2},$$

wo l eine von der Intensität des Lichts abhängende Constante ist. Setzt man

$$KC = m, \quad KL = h,$$

so erhält man leicht

$$KM^2 = mm + rr - 2mr \,.\, \cos\varphi$$
$$LM^2 = mm + rr + hh - 2mr \,.\, \cos\varphi$$
$$\sin LMK = \frac{h}{LM},$$

folglich wird die Lichtmenge, die auf das Element fällt,

$$\frac{hlrdrd\varphi}{\sqrt{(mm + rr + hh - 2mr \,.\, \cos\varphi)^3}}.$$

Man mufs hier zuerst nach r integriren. Zu diesem Ende schreiben wir die Gröfse unter dem Wurzelzeichen so:

$$hh + mm \,.\, \sin\varphi^2 + (m \,.\, \cos\varphi - r)^2,$$

und setzen der Kürze wegen:

$$m \,.\, \cos\varphi - r = \operatorname{tang}\theta \,.\, \sqrt{hh + mm \,.\, \sin\varphi^2},$$

wo θ eine neue veränderliche Gröfse bedeutet, die sich aber blofs auf r bezieht, und es wird hierdurch

$$\sqrt{(mm + rr + hh - 2mr \,.\, \cos\varphi)^3} = \frac{\sqrt{(mm \,.\, \sin\varphi^2 + hh)^3}}{\cos\theta^3}$$

$$r = m \,.\, \cos\varphi - \operatorname{tang}\theta \,.\, \sqrt{mm \,.\, \sin\varphi^2 + hh}$$

$$dr = -\frac{d\theta}{\cos\theta^2} \,.\, \sqrt{mm \,.\, \sin\varphi^2 + hh}.$$

§. 189.

Wenn zwei nebeneinander liegende erleuchtete Flächen, die gegen das Auge einerlei Lage haben, und um sie besser mit einander vergleichen zu können, auch zu gleicher Zeit von demselben übersehen werden, einerlei scheinbare Helligkeit besitzen, so muſs man auch schlieſsen, daſs ihre absolute Helligkeit dieselbe sey, und da kein Grund für uns vorhanden ist, warum wir zwischen der absoluten Helligkeit und der Dichtigkeit des Lichts eine andere Relation annehmen sollen, als die der Proportionalität beider Gröſsen, so wird unter diesen Umständen auch die Dichtigkeit des Lichts auf beiden gleich seyn. Freilich müssen wir hierbei das Licht, welches der Körper in sich aufnimmt, und nicht wieder zurückwirft, auſser Acht lassen; allein wenn die beiden erleuchteten Flächen Körpern von gleichartiger Materie zugehören, so wird auch dieses verschluckte Licht bei beiden eine gleiche Menge ausmachen, und die angegebene Proportionalität der Dichtigkeit des Lichts und der scheinbaren Helligkeit wird immer richtig bleiben. Wären die Körper, denen die erleuchteten Flächen zugehören, von ungleicher physischer Beschaffenheit, so würde ihre gleiche scheinbare Klarheit nicht auf gleiche Dichtigkeit der auf dieselbe fallenden Lichtmenge, sondern bloſs auf eine gleiche Dichtigkeit der zurückgeworfenen Lichtmenge schlieſsen lassen.

§. 190.

Die bisher vorgetragene Theorie der Erleuchtung bezieht sich bloſs auf den Fall, wo die Quelle des Lichts als ein leuchtender physischer Punkt angesehen werden kann, wie dies z. B. bei einer kleinen Lichtflamme geschehen darf, indem bei dieser das Licht nicht nur von der Oberfläche, sondern auch aus ihrem Innern ausströmt. Ist hingegen der strahlende Körper bloſs an seiner Oberfläche leuchtend, so muſs zu der vorigen Theorie noch eine Bedingung hinzugefügt werden, wel

dann nicht mehr von leuchtenden Punkten, sondern von leuchtenden Flächen die Rede ist.

Wir betrachten daher ein unendlich kleines Element der leuchtenden Fläche, das seiner geringen Ausdehnung wegen als eben angesehen werden kann, wenn die Oberfläche selbst auch gekrümmt seyn sollte, und ein Durchschnitt desselben werde durch die grade Linie *AB* (Fig. 29.) dargestellt. Von diesem Element fliefsen nach allen Seiten, so weit es möglich ist, Lichtstrahlen *CABD*, *EABF* aus, welche man als physische Linien betrachten kann, deren Durchschnitt parallel mit dem leuchtenden Element immer eine Figur giebt, die diesem völlig gleich ist. Alle diese physischen Lichtstrahlen werden nun aus Licht von gleicher Dichtigkeit bestehen, so dafs also auch jeder Durchschnitt, welcher senkrecht auf dem Strahl steht, gleiche Helligkeit haben wird, allein die Lichtmenge wird nicht für alle Strahlen dieselbe seyn.

§. 191.

Man sieht nämlich, dafs der mit *AB* parallel liegende Durchschnitt *GH* des Strahles *AEBF* nicht mehr Lichtmasse enthalten kann, als der senkrechte *HK*, folglich wird das auf *GH* fallende Licht weniger Dichtigkeit besitzen, als das auf *HK* fallende, und aus den in §. 171. angewandten Schlüssen ergiebt sich, dafs die Dichtigkeit in *KH* sich zu der des Elementes *AB* verhalte, wie der Sinus des Ausflufswinkels *BAE* zur Einheit, folglich wird bei einem leuchtenden Element die Dichtigkeit des ausfliefsenden Lichts im Verhältnifs des Sinus des Ausflufswinkels vermindert. Dafs übrigens die beiden andern für das Ausströmen des Lichts aus einem leuchtenden Punkt bewiesenen Sätze auch bei einer unendlich kleinen leuchtenden Fläche Statt finden müssen, ist von selbst klar.

§. 192.

Bemerken wir nun noch, dafs ein Element, welches *n* mal so grofs als ein anderes ist, auch eine *n* mal

... unter sonst gleichen Umständ
... wir, indem alle bis jetzt vorget
... werden, folgenden allgemein
... leuchtung:
... menge, welche ein Element ein
... Fläche dem Element ein
... fläche mittheilt, ist der Oberf
... Elemente, dem Sinus des A
... und dem Sinus des Einfal
... direct, dem Quadrat der Entf
... der Elemente von einander ab
... proportional.

... man also die Lichtmenge durch ddL, ...
... der erleuchteten Fläche durch ds, das ...
... Fläche durch ds', den Ausflufswinkel dur
... Einfallswinkel durch ε, die gegenseitige Entf
... der Elemente durch r, so wird

$$ddL = \frac{l \,.\, ds \,.\, ds' \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin\varepsilon}{rr}.$$

... Dichtigkeit des Lichts auf dem Element des ...
... Körpers erhält man also, wenn die Lic
... durch die Gröfse dieses Elements getheilt wi
... Weise wird die mittlere Dichtigkeit ei
... stark erleuchteten Oberfläche gefunden, we
... ganze auf der Oberfläche befindliche Lichtmen
... Gröfse des erleuchteten Theils dividirt.

§. 193.

... müssen hierbei die Bemerkung machen, d
... die Dichtigkeit der von einem Element a
... Lichtmenge nehme wie der Sinus des A
... ab, zuerst von Lambert aufgestellt wur
... von allen Mathematikern angenommen word
... hat z. B. Euler in einer Abhandlung: *I*
... *les divers degrés de la lumière du sol*
... *corps célestes* (*Histoire de l'Acadén*
... *I.* 1750.) die senkrechte Erleuchtung
... welche eine überall gleich stark leuchtende Ku

iner unendlich kleinen Ebene mittheilt, ohne dabei die erminderung des Lichts wegen der Schiefe des Ausuſswinkels zu berücksichtigen. Sobald man aber animmt, daſs das Licht keine Abnahme seiner Dichtigkeit leidet, so ergiebt sich, daſs eine gleichförmig glänende Kugel dem Auge gegen den Rand zu mit immer ärkerm Glanz, dem Sinus des Ausfluſswinkels umgekehrt roportional erscheint, also am Rande, wo der Ausfluſsinkel Null wird, müſste der Glanz unendlich seyn. etrachtet man aber z. B. eine glühende Kugel, so wird an gewiſs an keiner Stelle einen gröſsern Glanz zu rblicken glauben, sondern die Kugel wird dem Auge it gleichförmigem Glanz erscheinen. Hieraus folgt ber, daſs die Dichtigkeit des nicht senkrecht ausflieſsenen Lichts sich in demselben Grade vermindert, in elchem das Element der Kugeloberfläche dem Auge erkleinert erscheint, d. h. im Verhältniſs des Sinus des usfluſswinkels, durch welche Beobachtung wir also auf as von Lambert (*Photometria, sive de mensura et radibus luminis, colorum, et umbrae*) aufgestellte esetz zurückkommen.

§. 194.

Bouguer, welcher sich schon vor Lambert mit en verschiedenen Abstufungen der Lichtstärke beschäfigte, und hierüber zwei Werke aufgesetzt hatte (*Essai l'Optique sur la Gradation de la lumière* und *Traité l'Optique sur la Gradation de la lumière*), meint war auch, daſs das Licht mit dem Ausfluſswinkel abähme, allein in einem noch stärkern Verhältniſs als dem es Sinus. Man begreift nämlich leicht, daſs, wenn die ichtigkeit des Lichts in einem stärkern Verhältniſs als em des Sinus des Ausfluſswinkels abnimmt, der scheinare Glanz einer sonst gleichförmig glänzenden Kugel om Mittelpunkt nach dem Rande zu abnehmen muſs. un hatte Bouguer versucht, den Glanz der Sonne n verschiedenen Stellen ihrer Oberfläche zu bestimmen

(*Traité d'Optique sur la Gradation de la lumière pag.* 90.), und gefunden, dafs ihr scheinbarer Glanz in der Mitte zu dem, welcher in einem scheinbaren Abstand vom Mittelpunkt $= \frac{3}{4}$ des Halbmessers Statt findet, sich verhielt, wie 48 : 35. Dieser Punkt würde einem Ausflufswinkel von 41° 24′ entsprechen. Obwohl nun diese Beobachtung noch sehr in Zweifel zu ziehen ist, da so mancherlei Umstände vorkommen, die das Urtheil des Auges rücksichtlich der Helligkeit unsicher machen können, so würde sie doch nichts gegen das Lambertsche Gesetz beweisen, indem man sehr wohl annehmen könnte, die Sonne sey von einer Atmosphäre umgeben, in welcher das Licht, auf gleiche Art, wie in unserer Atmosphäre und allen andern durchsichtigen Materien, geschwächt würde, und da diejenigen Lichtstrahlen, welche von Punkten herkommen, die dem Rande der Sonne näher liegen, einen gröfsern Weg in dieser Atmosphäre zurücklegen müssen, so wird der Lichtstrahl mehr geschwächt, und unserm Auge daher diese Stelle mit geringerm Glanz erscheinen.

§. 195.

Um zu zeigen, wie man diese Schwächung des Lichts der Bouguerschen Beobachtung zufolge genau erklären könne, wollen wir folgende Untersuchung anstellen. Bezeichnen wir die Dichtigkeit der Sonnenatmosphäre an irgend einer Stelle durch Δ, die Elasticität durch p, die Höhe, in welcher der zu betrachtende Punkt der Atmosphäre über der Sonnenfläche liegt, durch z, die auf denselben wirkende Anziehungskraft der Sonne durch Z, so hat man, den bekannten hydrostatischen Formeln zufolge, die Gleichung

$$dp = -\Delta . Z . dz,$$

und da, so viel unsere Versuche gezeigt haben, bei jeder elastischen Flüssigkeit, wenn wir die verschiedene Temperatur bei Seite setzen, die Dichtigkeit der Elasticität proportional ist, so hat man $p = k\Delta$, wo k eine

nte Gröfse bedeutet, folglich auch $dp = kd\Delta$, enn man hierdurch dp eliminirt, so wird

$$kd\Delta = -\Delta . Z . dz.$$

nimmt die Anziehungskraft der Sonne umgekehrt las Quadrat der Entfernungen von ihrem Mittel- ab; bezeichnen wir also die Anziehungskraft an berfläche der Sonne durch g, ihren Halbmesser a, so wird die Anziehungskraft in der Höhe z der Oberfläche der Sonne

$$= \frac{gaa}{(a+z)^2} = Z,$$

orige Gleichung läfst sich so schreiben:

$$\frac{kd\Delta}{\Delta} = -\frac{gaadz}{(a+z)^2}.$$

on ist das Integral

$$k . \log \Delta = \frac{gaa}{a+z} + \text{Const.}$$

er Oberfläche der Sonne, wo $z = o$, sey die igkeit der Atmosphäre Δ', so wird zur Bestim- der Constante

$$k . \log \Delta' = ga + \text{Const},$$

enn man diese Gleichung von der vorigen abzieht,

$$k . \log \frac{\Delta}{\Delta'} = \frac{gaa}{a+z} - ga.$$

en wir ferner an, dafs die Höhen z, bis zu wel- die Dichtigkeit der Atmosphäre merklich genug m das Licht zu schwächen, gegen die Halbmesser onne a nur klein sind, so erhält man, mit Ver- ssigung der Potenzen von z,

$$k . \log \frac{\Delta}{\Delta'} = -gz$$

$$\Delta = \Delta' . e^{-\frac{gz}{k}}.$$

§. 196.

Was nun das Gesetz der Schwächung des Lichts t, indem es durch durchsichtige Materien geht,

so sieht man leicht ein, dafs die Abnahme desselben der Dichtigkeit des Lichts selbst proportional seyn wird, indem, wenn wir zuerst die durchsichtige Materie in allen Theilen als das Licht gleichförmig schwächend betrachten, bei jedem durchlaufenen Wege ein gleich grofser aliquoter Theil des Lichts verloren geht. Bezeichnen wir also die Dichtigkeit des Lichts an irgend einer Stelle des durchlaufenen Weges durch ϱ, so wird der Verlust der Dichtigkeit, nachdem es die Masse dm der durchsichtigen Materie durchlaufen hat, $d\varrho$ seyn, und man hat die Gleichung

$$d\varrho = -n\varrho dm,$$

wo n eine constante Gröfse ist, die von der absoluten schwächenden Kraft der durchsichtigen Materie abhängt. Bezeichnen wir nun den durchlaufenen Weg durch s, so können wir allgemein $dm = n'\Delta ds$ setzen, und substituiren wir diesen Werth in vorige Gleichung, und nehmen $nn' = N$, so wird

$$d\varrho = -N\varrho\Delta . ds,$$

oder wenn wir den Werth von Δ

$$\Delta = \Delta' . e^{-\frac{gz}{k}}$$

aus voriger Gleichung einführen, und auf beiden Seiten durch ϱ dividiren,

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = -N\Delta' . e^{-\frac{gz}{k}} . ds.$$

§. 197.

Nun sey (Fig. 24.) C der Mittelpunkt der Sonne, O ein Punkt ihrer Oberfläche, aus welchem ein Lichtstrahl OS unter dem Ausflufswinkel $SOS' = \mu$ ausgeht, so hat man im Dreieck COS

$$SC^2 = OC^2 + OS^2 - 2\,OC.OS.\cos SOC.$$

Es ist aber $SC = a + z$, $OC = a$, $OS = s$, $SOC = 90^0 + \alpha$, folglich auch

$$(a + z)^2 = aa + ss + 2as.\sin\mu.$$

s ergiebt sich, mit Vernachlässigung der Potenzen
und s,

$$z = s \cdot \sin \mu, \quad ds = \frac{dz}{\sin \mu},$$

enn wir diesen Werth in die Gleichung

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - N\Delta' \cdot e^{-\frac{gz}{k}} \cdot ds$$

iiren, so kommt

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - \frac{N\Delta'}{\sin \mu} \cdot e^{-\frac{gz}{k}} \cdot dz.$$

n ist das Integral

$$\log \varrho = \frac{kN\Delta'}{g \cdot \sin \mu} \cdot e^{-\frac{gz}{k}} + \text{Const.}$$

r Oberfläche der Sonne sey die Dichtigkeit des
senden Lichts ϱ', so gehören die Werthe $\varrho = \varrho'$,
zusammen, es ist also zur Bestimmung der
nte

$$\log \varrho' = \frac{kN\Delta'}{g \cdot \sin \mu} + \text{Const},$$

an erhält, indem man die Constante eliminirt,
n den Logarithmen zu den Zahlen übergeht,

$$\varrho = \varrho' \cdot e^{-\frac{kN\Delta'}{g \cdot \sin \mu}\left(1 - e^{-\frac{gz}{k}}\right)}$$

z' der Werth, welcher der Grenze der Atmo-
entspricht, und ϱ^0 der zugehörige Werth von ϱ,
an ferner der Kürze wegen

$$\frac{kN\Delta'}{g}\left(1 - e^{-\frac{gz'}{k}}\right) = \lambda,$$

ilt man

$$\varrho^0 = \varrho' \cdot e^{-\frac{\lambda}{\sin \mu}}.$$

hnet man nun die Dichtigkeit des Lichts, welches
r Mitte der Sonnenscheibe ausgeflossen ist, durch

R, die Dichtigkeit des Lichts, welches von einem Punkt herkommt, der um $\frac{1}{4}$ des Halbmessers vom Mittelpunkt entfernt liegt, durch R', so ist

$$R = \varrho' . e^{-\lambda}$$

$$R' = \varrho' . e^{-\frac{4\lambda}{3}},$$

und da nach Bouguer's Beobachtungen (§. 194.)

$$R : R' = 48 : 35,$$

so folgt aus der Verbindung dieser Proportion mit den beiden Gleichungen

$$48 : 35 = e^{-\lambda} : e^{-\frac{4\lambda}{3}},$$

und hieraus erhält man, wenn man sich der natürlichen Logarithmen bedient,

$$\frac{\lambda}{3} = \log 48 - \log 35$$

$$\log 48 = 3.8712010$$

$$\log 35 = 3.5553481$$

$$\frac{\lambda}{3} = 0,3158529$$

$$\lambda = 0,9475587,$$

also sehr nahe der Einheit gleich.

§. 198.

Diese Formel läfst sich jedoch nicht bis ganz zum Rande der Sonne ausdehnen, denn daselbst erhielte man, da $\sin \mu = o$ wird,

$$\varrho = \varrho' . e^{-\infty} = o.$$

Dies Resultat rührt daher, dafs wir uns erlaubten, in der Gleichung, welche die Relation zwischen s und z ausdrückt, die Potenzen von s und z zu vernachlässigen. Dies ist aber nur so lange gestattet, als das Product $a . \sin \mu$, gegen s oder z als hinreichend grofs betrachtet werden kann, welches aber für den Fall $\sin \mu = o$ nicht mehr Statt findet. Dann giebt die Gleichung

$$(a + z)^2 = aa + ss + 2as . \sin \mu,$$

t Vernachlässigung von zz,

$$2az = ss, \quad ds = \frac{dz}{\sqrt{z}} \cdot \sqrt{\frac{a}{2}}.$$

ıbstituirt man diesen Werth in die Gleichung

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - \Delta' N . e^{-\frac{gz}{k}} . ds,$$

erhält man

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - \Delta' N . \sqrt{\frac{a}{2}} . e^{-\frac{gz}{k}} . \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

ich §. 195. drückt die Exponentialgröfse $e^{-\frac{gz}{k}}$ das rhältnifs der Dichtigkeit der Atmosphäre $\frac{\Delta}{\Delta'}$ aus, und für die Höhe, wo die Schwächung des Lichts nicht hr bedeutend seyn soll, auch Δ unbedeutend seyn ıfs, so folgt, dafs $\frac{gz}{k}$ eine sehr grofse Zahl für diese enze wird. Setzen wir nun

$$\frac{gz}{k} = uu, \quad \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{\frac{k}{g}} \cdot du,$$

wird ebenfalls u für diese Grenze bedeutend seyn. ıbstituirt man den angenommenen Werth von z in e vorige Gleichung, so wird

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - 2\Delta' N . \sqrt{\frac{ak}{2g}} . e^{-uu} . du,$$

so, wenn man integrirt,

$$\log \varrho = - 2\Delta' N . \sqrt{\frac{ak}{2g}} . \int e^{-uu} . du + \text{Const.}$$

ehmen wir an, dafs das Integral für $u = o$ oder $= o$ verschwinden soll, so wird zugleich $\varrho = \varrho'$, nd die Constante erhält man $= \log \varrho'$. Um nun den Werth von ϱ zu erhalten, der der Grenze von $z = z'$ ntspricht, mufs das Integral bis $u = \sqrt{\frac{gz}{k}}$ ausgedehnt erden, allein da wir bemerkt haben, dafs diese Grenze

R, die Dichtigkeit des Lichts, ... das Integral
herkommt, der um $\frac{3}{4}$ des Ha... ...dehnen können.
entfernt liegt, durch R', so i... $-\lambda$ ... $.du$, zwischen

$$R = \varrho' . e^{-\lambda}$$

...mmen, $= \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

$$R' = \varrho' . e$$

und da nach Bouguer's B...

$$R : R' =$$

so folgt aus der Verbin...
beiden Gleichungen

$$) = \lambda,$$

$$48 : 35 =$$

und hieraus erhält ma... ...seyn muſs, so kann man
Logarithmen bedient... ...welcher Gleichung sich

$$\frac{\lambda}{3}$$

log ...
log ... ...Werth in den Ausdruck

also sehr nah...

Diese ...
Rande der ... Glanz des Randes der Son-
man, da ... Werth. Obgleich wir nun
... numerischen Werth von ϱ
... die Gröſse k völlig un-
Dies Re... ... so viel behaupten, daſs,
der Glei... ... nach dem Rand zu immer
ausdrüc...
Dies i... ... seyn muſs, wie sich aus
$a . \sin$ ...
tet w...
nicht ...

... Glanz einer Stelle der

die um $\frac{1}{4}$ des Halbmessers vom Mit-
liegt.

§. 199.

nun auch sey, so werden wir in unseren
ersuchungen immer das von **Lambert**
Gesetz, nach welchem die Strahlenmenge
des Ausflufswinkels abnimmt, zum Grunde
wenn eine Schwächung des Lichts bei sei-
durch durchsichtige Materien Statt findet,
besonders in Betracht ziehen.

nehmen zuerst den Fall vor, wo eine unend-
Ebene von einer leuchtenden Kugel ihr Licht
Legen wir durch den Mittelpunkt der Kugel
cht auf die zu erleuchtende Fläche eine Ebene,
men wir den Durchschnitt dieser Ebene mit der
gerung der Fläche als die Axe der x betrach-
die Axe der z setzen wir senkrecht auf die zu
htende unendlich kleine Fläche. Bezeichnen wir
die Coordinaten des Mittelpunkts der Kugel parallel
er Axen den x, y, z durch a, o, γ, und den
nesser der Kugel durch a, so wird die Gleichung
Kugel

$$(a - x)^2 + yy + (\gamma - z)^2 = aa.$$

setze nun, wie gewöhnlich,

$$x = r \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\psi$$
$$y = r \,.\, \sin\varphi \,.\, \cos\psi$$
$$z = r \,.\, \sin\psi,$$

hält man durch Substitution dieser Werthe

$$+ \gamma\gamma + rr - 2ar \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\psi - 2\gamma r \,.\, \sin\psi = aa.$$

Lichtmenge, welche das unendlich kleine Element
mpfängt, ist nach §. 192.

$$= \frac{lds \,.\, ds' \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin\varepsilon}{rr},$$

der Factor lds, der hierbei constant ist, kann vorerst
er Acht gelassen werden. Nun ist bekanntlich

$$ds' = \frac{rrd\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi}{\cos\theta},$$

wo θ den Winkel bedeutet, den der Radius vector oder der ausfahrende Strahl mit der Normale macht; dieser ist aber auch zugleich das Complement des Ausflufswinkels, d. h. es wird $\cos\theta = \sin\alpha$, und hierdurch bleibt die Erleuchtung, die das Element empfängt,

$$ddL = d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi \,.\, \sin\varepsilon.$$

Der Einfallswinkel ε ist aber derjenige, welchen der Radius vector oder der Lichtstrahl mit der Ebene der x, y bildet; man hat also $\sin\varepsilon = \sin\psi$, folglich

$$ddL = d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi \,.\, \sin\psi.$$

Die Gleichung der Kugel giebt, wenn man sie nach r auflöst,

$$r - (\alpha \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\psi + \gamma \,.\, \sin\psi)$$
$$= \pm\sqrt{(aa - \alpha\alpha - \gamma\gamma \,.\, \cos\psi^2 + \alpha^2 \,.\, \cos\varphi^2 \,.\, \cos\psi^2 + 2\alpha\gamma \,.\, \cos\psi \,.\, \sin\psi \,.\, \cos\varphi)}.$$

An der Erleuchtungsgrenze berührt der Radius r die Kugel; es kann also daselbst nur ein Werth von r Statt finden, und hierzu ist nöthig, dafs dort zwischen den Winkeln ψ und φ die Gleichung

$$aa - \alpha\alpha - \gamma\gamma \,.\, \cos\psi^2 + \alpha^2 \,.\, \cos\varphi^2 \,.\, \cos\psi^2 + 2\alpha\gamma \,.\, \cos\psi \,.\, \sin\psi \,.\, \cos\varphi = 0$$

bestehe, welche, wie man leicht sieht, daraus entsteht, dafs das Radical Null gesetzt wird. Diese letztere Gleichung läfst sich auch so schreiben:

$$(\alpha \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\psi + \gamma \,.\, \sin\psi) = \sqrt{\gamma\gamma + \alpha\alpha - aa}\ ^{*})$$

also $\alpha \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\psi = \sqrt{\gamma\gamma - \alpha a + \alpha\alpha} - \gamma \,.\, \sin\psi$,

*) Es mufs hier die Radicalgröfse $\sqrt{\gamma\gamma + \alpha\alpha - aa}$ positiv genommen werden, wenn, wie dies wohl immer der Fall seyn wird, die erleuchtete Fläche aufserhalb der Kugel liegt. Denn die Gleichung der Kugel

$$\alpha\alpha + \gamma\gamma + rr - 2\alpha r \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\psi - 2\gamma r \,.\, \sin\psi = aa$$

giebt $\alpha \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\psi + \gamma \,.\, \sin\psi = \dfrac{\alpha\alpha + \gamma\gamma + rr - aa}{2r}$,

und liegt der Anfangspunkt der Coordinaten, d. h. das erleuchtete Element, aufserhalb der Kugel, so wird $\dfrac{\alpha\alpha + \gamma\gamma + rr - aa}{2r}$ positiv, also auch $\alpha \,.\, \cos\varphi \,.\, \cos\psi + \gamma \,.\, \sin\psi$. G.

oder, wenn man quadrirt,

$$\alpha^2.\cos\varphi^2 - a^2.\cos\varphi^2.\sin\psi^2 = \gamma\gamma - aa + \gamma^2.\sin\psi^2 + \alpha\alpha - 2\gamma.\sin\psi.\sqrt{\gamma\gamma - aa + \alpha\alpha}.$$

Hieraus folgt

$$\sin\psi = \frac{\gamma.\sqrt{\gamma\gamma + \alpha\alpha - aa}}{\gamma\gamma + \alpha\alpha.\cos\varphi^2} \pm \frac{\alpha.\cos\varphi.\sqrt{aa - \alpha\alpha.\sin\varphi^2}}{\gamma\gamma + \alpha\alpha.\cos\varphi^2}.$$

Einem jeden Werth von φ gehören also zwei Werthe von ψ zu, und wenn wir diese besondern Werthe von ψ durch ψ' und ψ'' bezeichnen, wo $\psi' < \psi''$ ist, so erhält man

$$\sin\psi''^2 - \sin\psi'^2 = \frac{4\alpha\gamma.\cos\varphi.\sqrt{\gamma\gamma + \alpha\alpha - aa}.\sqrt{aa - \alpha\alpha.\sin\varphi^2}}{(\gamma\gamma + \alpha\alpha.\cos\varphi^2)^2}.$$

§. 200.

Integrirt man die Gleichung

$$ddL = d\varphi d\psi.\cos\psi.\sin\psi$$

nach ψ, so kommt

$$dL = \tfrac{1}{2}\,d\varphi.(\sin\psi^2 + C),$$

und da das Integral von $\psi = \psi'$ bis $\psi = \psi''$ genommen werden muſs, so erhält man

$$dL = \tfrac{1}{2}\,d\varphi.(\sin\psi''^2 - \sin\psi'^2),$$

oder, wenn man den im vorigen §. gegebenen Werth von $\sin\psi''^2 - \sin\psi'^2$ substituirt, so kommt

$$dL = 2a\gamma.\sqrt{\gamma\gamma + \alpha\alpha - aa}.\frac{\sqrt{aa - \alpha\alpha.\sin\varphi^2}.d\varphi.\cos\varphi}{(\gamma\gamma + \alpha\alpha.\cos\varphi^2)^2}.$$

Man setze der Kürze wegen

$$2a\gamma.\sqrt{\gamma\gamma + \alpha\alpha - aa} = k^3,$$

so wie $a.\sin\varphi = \alpha.\sin\theta$, so läſst sich voriger Ausdruck so schreiben:

$$dL = k^3.\frac{aa}{\alpha}.\frac{\cos\theta^2.d\theta}{(\gamma\gamma + \alpha\alpha - aa.\sin\theta^2)^2}$$

$$= k^3.\frac{aa}{\alpha}.\frac{1}{(\gamma\gamma + \alpha\alpha + (\gamma\gamma + \alpha\alpha - aa).\tan\theta^2)^2}.\frac{d\theta}{\cos\theta^2}.$$

Man nehme nun

$$\sqrt{(\gamma\gamma + \alpha\alpha - aa)}.\tan\theta = \sqrt{\gamma\gamma + \alpha\alpha}.\tan\lambda,$$

und man erhält durch Substitution dieses Werthes

$$dL = \frac{2aa\gamma}{\sqrt{(\gamma\gamma + \alpha\alpha)^3}} \cdot d\lambda \,.\, \cos\lambda^2$$

$$L = \frac{aa\gamma}{\sqrt{(\gamma\gamma + \alpha\alpha)^3}} \cdot [\text{Const} + \lambda + \sin\lambda \,.\, \cos\lambda].$$

Was nun die Grenzen von λ betrifft, so müssen dieselben aus den Grenzen von φ abgeleitet werden. Diese letztern ergeben sich aus der Gleichung für $\sin\psi$ des vorigen §.; denn da an den Grenzen jeder Werth von φ nur einen Werth von ψ hervorbringen darf, so wird natürlicherweise in der angegebenen Gleichung das Glied mit dem doppelten Vorzeichen Null werden müssen, d. h. es ist $aa = \alpha\alpha \,.\, \sin\varphi^2$. Man hat also für die äufsersten Werthe von φ, $\sin\varphi = -\frac{a}{\alpha}$, $\sin\varphi = +\frac{a}{\alpha}$, und da wir aufserdem $\alpha \,.\, \sin\varphi = a \,.\, \sin\theta$ setzten, so werden die Werthe von $\sin\theta$, -1 und $+1$ seyn, d. h. θ ist zwischen den Grenzen $-\frac{1}{2}\pi$ und $+\frac{1}{2}\pi$ enthalten. Aus der Gleichung

$$\sqrt{\gamma\gamma + \alpha\alpha - aa} \,.\, \text{tang}\,\theta = \sqrt{\gamma\gamma + \alpha\alpha} \,.\, \text{tang}\,\lambda$$

ergiebt sich aber, dafs λ zwischen denselben Grenzen, als θ, enthalten seyn mufs, folglich ist

$$L = \frac{\pi aa\gamma}{\sqrt{(\gamma\gamma + \alpha\alpha)^3}}.$$

Bezeichnet man den Abstand des Mittelpunkts der leuchtenden Kugel vom erleuchteten Element durch R, den Winkel, welchen die nach dem Mittelpunkt gezogene Linie mit demselben Element bildet, durch H, so hat man

$$\sqrt{\gamma\gamma + \alpha\alpha} = R, \quad \gamma = R \,.\, \sin H,$$

und hieraus ergiebt sich die Lichtmenge, welche das erleuchtete Element empfängt, indem man den früher vernachlässigten constanten Factor lds wieder hinzufügt,

$$= lds \,.\, \pi aa \,.\, \frac{\sin H}{RR}.$$

Also steht die Erleuchtung im directen Verhältnifs der Oberfläche der leuchtenden Kugel und des Sinus ihrer

über dem Horizont, und im umgekehrten quadra-
n Verhältnifs der Entfernung.

§. 201.

tellt die leuchtende Kugel die Sonne vor, und ist
leuchtete Element ein Punkt der Oberfläche der
so kann man noch fragen, wie grofs die Licht-
ist, welche innerhalb eines Tages auf diesen
der Erdoberfläche fällt. Man mufs dann den
n Ausdruck

$$lds \,.\, naa \,.\, \frac{\sin H}{RR}$$

mit dem Element dt der Zeit multipliciren, und
roduct zwischen den Grenzen der Zeit, während
r die Sonne über dem Horizont steht, integriren.
erücksichtigen hierbei weder die Schwächung des
in der Atmosphäre, noch die Zunahme oder Abnahme
ntfernung R, noch die Veränderung der Declina-
er Sonne während eines Tages, da die beiden
Argumente nur sehr geringe Einwirkung haben
, und der erste Umstand späterhin genauer be-
t werden wird. Es sey (Fig. 27 b.) Z das Zenith
rts, P der Pol, in S die Sonne, und wir be-
en

die Polhöhe des Orts durch p,
die Declination der Sonne - δ,
die Höhe der Sonne - H,
den Stundenwinkel ZPS - T,

$ZP = 90^0 - p$, $SP = 90^0 - \delta$, $SZ = 90^0 - H$,
an erhält im Dreieck ZSP

$\sin H = \sin p \,.\, \sin \delta + \cos p \,.\, \cos \delta \,.\, \cos T$.

n der Stundenwinkel so wie die Zeit gleichförmig
und abnimmt, so wird man den obern Ausdruck
nit dt, auch mit dT multipliciren können, und
at daher das Integral $\int \sin H \,.\, dT$, oder
$\int (\sin \delta \,.\, \sin p \,.\, dT + \cos \delta \,.\, \cos p \,.\, \cos T \,.\, dT)$
hen. Dies giebt integrirt

$\sin \delta \,.\, \sin p \,.\, T + \cos \delta \,.\, \cos p \,.\, \sin T$.

Bezeichnet man durch T' den Stundenwinkel, welcher dann Statt findet, wenn die Sonne im Aufgang oder im Untergang begriffen ist, so mufs das vorige Integral zwischen den Grenzen $T = -T'$ und $T = +T'$ genommen werden, und man erhält die Lichtmenge, welche während eines Tages auf den Punkt der Erdoberfläche fällt,

$$= 2lds \cdot \frac{\pi aa}{RR} \cdot [\sin \delta . \sin p . T' + \cos \delta . \cos p . \sin T'].$$

Um den Winkel T' zu bestimmen, mufs man bemerken, dafs bei dem Aufgang und Untergang der Sonne die Höhe $H =$ Null wird; man erhält also aus der Gleichung

$$\sin H = \sin p . \sin \delta + \cos p . \cos \delta . \cos T$$
$$\cos T' = - \tang \delta . \tang p.$$

Setzt man die Lichtmenge für einen bestimmten Ort, die während des Tages auf denselben fällt, wo die Sonne im Aequator steht, $= L'$, so ist für diese Stellung der Sonne $T' = \frac{1}{2}\pi$, und man erhält allgemein die Lichtmenge:

$$= \frac{\sin \delta . \sin p . T' + \cos \delta . \cos p . \sin T'}{\cos p} \cdot L'.$$

Um eine Vergleichung in Zahlen zu haben, wollen wir das Verhältnifs der Lichtmengen für den längsten und den kürzesten Tag in Göttingen bestimmen. Die Declination der Sonne am längsten Tage sey $= +\varepsilon = 23^{\circ}28'$, so ist sie am kürzesten $= -\varepsilon$, und setzen wir den Werth von T'

für den längsten Tag $= T''$
- - kürzesten - $= T'^{0}$,

so wird das Verhältnifs beider Lichtmengen durch den Bruch

$$\frac{\cos \varepsilon . \cos p . \sin T'' + \sin \varepsilon . \sin p . T''}{\cos \varepsilon . \cos p . \sin T'^{0} - \sin \varepsilon . \sin p . T'^{0}}$$
$$= \frac{\sin T'' + \tang \varepsilon . \tang p . T''}{\sin T'^{0} - \tang \varepsilon . \tang p . T'^{0}}$$

ausgedrückt, und man erhält aufserdem:

$$\cos T'' = - \tang p . \tang \varepsilon$$
$$\cos T'^{0} = + \tang p . \tang \varepsilon.$$

Hieraus sieht man, dafs, wenn $T'' = \frac{1}{2}\pi + \xi$ gefunden wird, $T^0 = \frac{1}{2}\pi - \xi$ seyn mufs, und durch Substitution dieser Werthe wird obiges Verhältnifs

$$= \frac{\cot \xi + \frac{1}{2}\pi + \xi}{\cot \xi - \frac{1}{2}\pi + \xi}.$$

Man hat nun für Göttingen $p = 51^0\,32'$, und hieraus

$$\xi = 33^0\,7'\,20'' = 0{,}578092.$$

Der Werth des Verhältnisses ergiebt sich dann $= 6{,}818$.

§. 202.

Nehmen wir den Ausdruck (§. 192.) wieder vor, welcher die Lichtmenge angiebt, die von einem Element ds' einer leuchtenden Fläche auf das Element ds einer dunkeln Fläche fällt, nämlich:

$$ddL = \frac{lds\,.\,ds'\,.\,\sin\alpha\,.\,\sin\varepsilon}{rr},$$

wo α den Ausflufswinkel und ε den Einfallswinkel des Strahls bedeutet, r die gegenseitige Entfernung beider Elemente von einander ist, so läfst sich diese Formel folgendermafsen transformiren. Wenn wir die Lage des leuchtenden Elements durch Polarcoordinaten r, φ, ψ, die ihren Anfangspunkt in dem erleuchteten Element haben, bestimmen, so ist bekanntlich

$$ds' = \frac{rrd\varphi d\psi\,.\,\cos\psi}{\cos\theta},$$

wo θ der Winkel ist, welchen der Radius vector r mit der im leuchtenden Element errichteten Normale bildet; aufserdem haben wir schon gezeigt, dafs $\theta + \alpha = 90^0$ wird, also $\cos\theta = \sin\alpha$ ist, und hierdurch wird

$$ddL = lds\,.\,d\varphi\,.\,d\psi\,.\,\cos\psi\,.\,\sin\varepsilon.$$

Das Product $d\varphi\,.\,d\psi\,.\,\cos\psi$ ist aber nichts anders, als das Element der Oberfläche einer Kugel, die um das zu erleuchtende Element als Mittelpunkt mit einem Halbmesser, welcher der Einheit gleich ist, beschrieben wird. Folglich wird das dunkle Element so erleuchtet, als ob der leuchtende Körper auf diese Kugel, vom dunklen Element aus gesehen, als blofse Fläche projicirt wäre,

und daselbst jedes correspondirende Element mit selben Glanz l, als der leuchtende Körper selbst, ausstrahlte. Durch diesen Satz werden die Berec gen der Lichtmengen sehr erleichtert.

Die Gleichung dieser Projection läfst sich §. 163. auffinden. Man sucht nämlich zuerst, wen Gleichung der leuchtenden Oberfläche zwischen rechtwinkligen Coordinaten x, y, z gegeben ist, Gleichung desjenigen Kegels auf, welcher die leuch Fläche berührt, und dessen Spitze in dem du Element liegt. Dies geschieht dadurch, dafs ma den drei Gleichungen (§. 163.)

$$Z = px + qy$$
$$xY = yX$$
$$xZ = zX,$$

in denen die Coordinaten der Spitze des Kegels ξ für unsern besondern Fall, Null gesetzt worden die Gröfsen x, y, z bestimmt, und sie in die Glei der Oberfläche des Körpers substituirt. Hierdurc hält man die Gleichung des gedachten Kegels zwi den Coordinaten X, Y, Z; dieser wird dann eine aus dem Anfangspunkt der Coordinaten mit Halbmesser $= 1$ beschriebene Kugeloberfläche ges ten, d. h. man mufs die Gleichung

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

mit der vorigen verbinden, so erhält man die Glei gen der Curve doppelter Krümmung, die sich a Kugeloberfläche bildet. Man sieht aber leicht, derselbe Zweck erreicht wird, indem man stat Coordinaten des Kegels X, Y, Z in seiner Glei die Werthe $X = \cos\varphi \cdot \cos\psi$, $Y = \sin\varphi \cdot$ $Z = \sin\psi$ substituirt, wodurch man die Gleichun Projection auf die Kugeloberfläche zwischen den coordinaten φ, ψ erhält.

Ist z. B. der leuchtende Körper eine Kugel vom messer a, und sind α, β, γ die Coordinaten des punkts parallel mit den drei Axen der x, y, z, so h

$$(x-\alpha)^2+(y-6)^2+(z-\gamma)^2=aa,$$

und wenn man differentiirt

$$dx.(x-\alpha)+dy.(y-6)+dz.(z-\gamma)=o$$

$$p=\left(\frac{dz}{dx}\right)=-\frac{x-\alpha}{z-\gamma}$$

$$q=\left(\frac{dz}{dy}\right)=-\frac{y-6}{z-\gamma},$$

also erhält man die drei Gleichungen

$$z+\frac{x-\alpha}{z-\gamma}\cdot x+\frac{y-6}{z-\gamma}\cdot y=o,$$

$$xY=yX,\quad xZ=zX.$$

Zieht man die erste von der ursprünglichen Gleichung der Kugel ab, so bleibt

$$\alpha\alpha+66+\gamma\gamma-aa=\alpha x+6y+\gamma z.$$

Setzt man der Kürze wegen

$$\alpha\alpha+66+\gamma\gamma-aa=kk,$$

so erhält man aus diesen drei Gleichungen die Werthe von

$$x=\frac{kkX}{\alpha X+6Y+\gamma Z}$$

$$y=\frac{kkY}{\alpha X+6Y+\gamma Z}$$

$$z=\frac{kkZ}{\alpha X+6Y+\gamma Z},$$

und substituirt man diese Werthe in die Gleichung der Kugel, die sich auch so schreiben läfst:

$$xx+yy+zz-2.(\alpha x+6y+\gamma z)=-kk,$$

so erhält man den Ausdruck

$$\frac{kk.(XX+YY+ZZ)}{(\alpha X+6Y+\gamma Z)^2}=1.$$

Substituirt man hierin statt X, Y, Z ihre Werthe $\cos\varphi.\cos\psi$, $\sin\varphi.\cos\psi$, $\sin\psi$, und setzt zugleich

$$\alpha=R.\cos\varphi'.\cos\psi'$$

$$6=R.\sin\varphi'.\cos\psi'$$

$$\gamma=R.\sin\psi'$$

$$a=R.\sin\omega,$$

wo R den Abstand des Mittelpunkts der leuchtenden

Kugel vom Anfangspunkt der Coordinaten, und ω ihren scheinbaren Durchmesser bedeutet; so erhält man

$$\cos\omega = \sin\psi . \sin\psi' + \cos\psi . \cos\psi' . \cos(\varphi - \varphi').$$

Da nun ω eine constante Gröfse ist, so folgt hieraus, dafs alle Punkte der Grenze der Projection einer Kugel gleich weit von einem Punkte entfernt sind, dessen Lage durch die Winkel ψ', φ' bestimmt wird. Die Projection ist also ein kleinerer Kreis, dessen Pol in dem besagten Punkte liegt.

§. 203.

Die in §. 200. angegebene Stärke der Erleuchtung eines dunkeln Elements von einer leuchtenden Kugel, $ldsaa \cdot \frac{\sin H}{RR}$, ist nur so lange anwendbar, als die ganze Kugel im Stande ist, Licht auf das dunkle Element zu werfen, oder, wenn wir die Sonne für die leuchtende Kugel substituiren, so lange der untere Sonnenrand den Horizont noch nicht erreicht hat. Dafs späterhin die Formel keine richtige Resultate mehr liefert, sieht man schon aus der Betrachtung eines besondern Falles. Denn setzt man z. B. $H = o$, so wird voriger Ausdruck Null, d. h. wenn der Mittelpunkt der Sonne im Horizont steht, sollte sie gar kein Licht mehr auf die Oberfläche des Orts der Erde werfen; allein dies ist unrichtig, weil diese Stelle noch von der halben über dem Horizont stehenden Sonnenscheibe erleuchtet werden kann. Es ist daher nöthig, zu untersuchen, wie sich in dem Fall das Gesetz der Erleuchtung verhält, wo ein Theil der Sonnenscheibe schon unter dem Horizont sich befindet. Zu diesem Zweck sey APB (Fig. 30.) die um das dunkle Element mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebene Kugelfläche, AB ein gröfster Kreis, der durch den Durchschnitt der Ebene des verlängerten dunkeln Elements entsteht, P sein Pol, C der Mittelpunkt des kleinen Kreises, welcher die Projection der Sonnenscheibe vorstellt, M irgend ein Element dieses leuch-

len Kreises, dessen Lage wir durch den Winkel $'D = \varphi$ und den Bogen $MC = \psi$ bestimmen. n ist das Element der Fläche $= d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \sin\psi$. rch C und M und den Pol P lege man die beiden ſsten Kreise PD, PN, so wird MN den Einfallskel des vom Punkt M herkommenden Strahls bechnen, und setzt man $MN = \alpha$, $CD = H$, so hat n im sphärischen Dreieck MPC die Gleichung

$$\sin\alpha = \cos\psi \,.\, \sin H - \sin\psi \,.\, \cos H \,.\, \cos\varphi.$$

lglich ist die von dem leuchtenden Element auf das ıkle fallende Lichtmenge

$$lds' \,.\, d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \sin\psi \,.\, (\cos\psi \,.\, \sin H - \sin\psi \,.\, \cos H \,.\, \cos\varphi).$$

§. 204.

Man integrire diesen Ausdruck zuerst nach φ, so ält man die Lichtmenge, welche von einem mit dem lbmesser MC beschriebenen unendlich schmalen Ringe das Element fällt,

$$= lds' \,.\, d\psi \,.\, \sin\psi \,.\, [\varphi \,.\, \cos\psi \,.\, \sin H - \sin\psi \,.\, \cos H \,.\, \sin\varphi].$$

die Grenzen zu finden, zwischen welchen dies egral genommen werden soll, bedenke man, daſs der ıg im Allgemeinen den Horizont AB zweimal schnei-, sich also zwei Werthe von φ ergeben, die sich der Gleichung

$$\sin\alpha = \cos\psi \,.\, \sin H - \sin\psi \,.\, \cos H \,.\, \cos\varphi$$

eiten lassen, indem man $\alpha = o$ setzt; dies giebt

$$\cos\varphi = \cot\psi \,.\, \operatorname{tang} H.$$

zeichnet man den aus dieser Gleichung sich ergebenn Werth von φ, durch φ', so muſs obiges Integral ischen den Grenzen $\varphi = \varphi'$ und $\varphi = 2\pi - \varphi'$ nommen werden. Hierdurch wird dasselbe

$$2lds' \,.\, d\psi \,.\, \sin\psi \,.\, [(\pi - \varphi') \,.\, \cos\psi \,.\, \sin H + \sin\psi \,.\, \cos H \,.\, \sin\varphi'].$$

ſst man den Factor lds' vorerst unberücksichtigt, so t man die Gröſse

$$2 \,.\, \sin H \int d\psi \,.\, \cos\psi \,.\, \sin\psi \,.\, (\pi - \varphi')$$
$$+ 2 \,.\, \cos H \int d\psi \,.\, \sin\psi^2 \,.\, \sin\varphi'$$

integriren, oder, wenn man den ersten Theil theiise integrirt

$$\sin H . \sin \psi^2 . (\pi - \varphi') + \sin H \int \sin \psi^2 . d\varphi' + 2 . \cos H \int d\psi . \sin \psi^2 . \sin \varphi' .$$

§. 205.

Aus der Gleichung $\cos \varphi' = \cot \psi . \operatorname{tang} H$ erhält man ferner

$$\sin \varphi' = \sqrt{1 - \cot \psi^2 . \operatorname{tang} H^2}$$

$$d\varphi' = \frac{d\psi . \operatorname{tang} H}{\sin \psi^2 . \sqrt{1 - \cot \psi^2 . \operatorname{tang} H^2}}$$

Man erhält durch Substitution dieser Werthe

$$\int \sin \psi^2 . d\varphi' = \operatorname{tang} H \int \frac{d\psi . \sin \psi}{\sqrt{1 - \frac{\cos \psi^2}{\cos H^2}}}$$

$$\int d\psi . \sin \psi^2 . \sin \varphi' = \int \left(d\psi . \sin \psi . \sqrt{1 - \frac{\cos \psi^2}{\cos H^2}} \right)$$

und wenn man noch $\cos \psi = \cos H . \cos \nu$ nimmt,

$$\int \sin \psi^2 . d\varphi' = \sin H \int d\nu = \nu . \sin H$$

$$\int d\psi . \sin \psi^2 . \sin \varphi' = \cos H \int d\nu . \sin \nu^2$$

$$= \tfrac{1}{2} . \nu . \cos H - \tfrac{1}{2} . \cos H . \sin \nu . \cos \nu .$$

Hierdurch wird also das ganze Integral

$$\sin H . \sin \psi^2 . (\pi - \varphi') + \nu - \cos H^2 . \sin \nu . \cos$$

Um die Grenzen dieses Integrals zu finden, beschreib man mit CD einen Kreis, so sind die Grenzen von $\psi = CD$ und $\psi = CF$, d. h. wenn man den scheinbaren Halbmesser der Sonne $= \omega$ setzt, so mufs das Integral von $\psi = H$ bis $\psi = \omega$ genommen werden. Für $\psi = \omega$ wird dasselbe

$$\sin H . \sin \omega^2 . (\pi - \text{Arc. cos} (= \cot \omega . \operatorname{tang} H$$

$$+ \text{Arc. cos} \left(= \frac{\cos \omega}{\cos H} \right) - \cos \omega . \sqrt{\cos H^2 - \cos}$$

und für $\psi = H$ erhält man $\sin H^2 . \pi$, also, wenn man dies von dem vorigen Werth abzieht, so bliebe die von dem Ringe $GFHE$ herkommende Erleuchtung. Hier mufs aber noch die von dem innern Kreise entstehende Erleuchtung addirt werden; diese ist nach §. 200., wer

man bedenkt, dafs $\frac{a}{R}$ in der dortigen Formel der scheinbare Halbmesser der Kugel ist, $= \pi . \sin H^5$, also braucht man von obigem Ausdruck nichts abzuziehen. Setzt man $H = o$, so bleibt

$$\omega - \sin \omega . \cos \omega,$$

welches die Erleuchtung ist, wenn die Sonne noch halb über dem Horizont sich befindet. Da der Winkel ω bei der Sonne sehr klein ist, so kann man

$$\omega = \sin \omega + \tfrac{1}{6} . \sin \omega^5$$
$$\sin \omega . \cos \omega = \sin \omega - \tfrac{1}{2} . \sin \omega^5$$

setzen, wodurch die von der über dem Horizont stehenden Halbkugel der Sonne hervorgebrachte Erleuchtung $= \frac{2}{3} . \sin \omega^5$ gefunden wird. Da nun die von der ganzen Sonne herkommende Erleuchtung $= \pi . \sin \omega^5$ ist, so verhalten sich beide, wie $\pi : \frac{2}{3} = 1 : 0{,}212$.

§. 206.

Das Licht, welches auf eine dunkle Fläche fällt, erleidet bei diesem Auftreffen mancherlei Modificationen. Ein Theil des Lichts wird wieder zurückgeworfen, und der andere dringt in den Körper ein. Ist die Oberfläche selbst polirt, so mufs das zurückgeworfene Licht wieder in zwei Klassen getheilt werden, nämlich in das regelmäfsig zurückgeworfene oder katoptrische Licht, welches uns die Bilder der Gegenstände zeigt, und in das unregelmäfsig zurückgeworfene oder zerstreute Licht, welches uns die Oberfläche der Körper sichtbar macht. Je weniger polirt die Oberfläche der Körper ist, desto gröfser ist das Verhältnifs des letztern zurückgeworfenen Lichts zum erstern. Das in den Körper eingedrungene Licht läfst sich bei durchsichtigen Körpern ebenfalls in zwei Klassen zerlegen, indem ein Theil desselben nach regelmäfsigen Gesetzen durch den Körper hindurchgeht, das sogenannte dioptrische Licht, ein anderer hingegen im Körper selbst gleichsam verschluckt und für unsere Sinne verloren geht.

Hier, wo wir uns blofs mit der Erleuchtung
Allgemeinen, ohne Rücksicht auf das regelmäfsig zu
geworfene und durchgelassene Licht, welches in
Katoptrik und die Dioptrik gehört, beschäftigen,
uns nur das Licht interessiren, welches von unpo
Oberflächen zurückgeworfen wird. Dafs sich d
Licht nach allen Seiten hin von einem Element aus
breitet, sieht man leicht ein, indem die Oberf
eines Körpers von jedem Standpunkt aus sichtba
wo sich auch der Körper, von welchem sie erleu
wird, befinden mag. Dafs ferner ein solcher erle
teter Körper auch wieder Erleuchtung hervorbri
kann, zeigt uns am deutlichsten der Mond, wel
als eine dunkle Kugel, sein Licht von der Sonne e
auch die Atmosphäre giebt uns ein Beispiel der
leuchtung durch zerstreutes Licht, indem die
theilchen einen Theil des einfallenden Sonnenlichts
allen Seiten hin zerstreuen, und hierdurch auch an
Stellen der Erdoberfläche, wo die Sonne nicht gra
hinscheinen kann, eine ziemlich bedeutende Helli
hervorbringen.

§. 207.

Wir wollen nun näher untersuchen, nach wel
Gesetzen die Erleuchtung von einem an sich dun
Körper vermittelst des zerstreuten Lichts vor sich
Zuerst können wir als Grundsatz aufstellen, dafs
Licht von jedem Element aus nach allen Seiten hin
strömt, und dafs die Dichtigkeit dieses Lichts eben
sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung
Element verhält. Zweitens dürfen wir wohl annehm
dafs, wenn ein Element m mal mehr Licht empfä
als ein anderes, selbiges auch nach derselben Rich
m mal mehr zerstreutes Licht zurückwerfen wird,
ausgesetzt, dafs beide Elemente Oberflächen von glei
physischer Beschaffenheit zugehören, so dafs also
hierbei die ausströmende Lichtmenge dem absol

lanze proportional gesetzt werden muſs. Endlich muſs an noch berücksichtigen, nach welchem Gesetze das usströmen des Lichts unter verschiedenen Ausfluſs-inkeln Statt findet. Dies läſst sich durch folgenden ersuch, den man leicht anstellen kann, entscheiden. Man nehme eine kleine Fläche, z. B. ein Stückchen eiſses Papier, welches von irgend einem Körper be-euchtet wird, und betrachte dasselbe unter verschiede-en Winkeln, indem das Auge senkt und erhebt, so ird man finden, daſs die scheinbare Klarheit des Papiers nter jedem Winkel dieselbe bleibt. Nun sey AB (Fig. 29.) dieses Stück Papier, $ABCD$, $ABEF$ zwei Lichtbündel, von denen das erste unter einem rechten Winkel, das zweite unter dem Winkel BHE ausströmt, ϱ die Dichtigkeit des Lichts in $ABCD$, ϱ' die Dichtigkeit des Lichts in $ABEF$, so verhalten sich die Lichtmengen in diesen beiden Strahlenbündeln, die wir durch L, L' bezeichnen, wie

$$L : L' = AB.\varrho : AB.\varrho'$$
$$= AB.\varrho : GH.\varrho'.$$

Dem Auge erscheint die Fläche AB, in der Richtung EA gesehen, unter der Gröſse KH, und zwar mit demselben scheinbaren Glanze als AB, also ist die Lichtmenge, welche KH zu haben scheint, $= KH.\varrho$, und da der Durchschnitt KH dieselbe Lichtmenge hat, als GH, so wird $KH.\varrho = GH.\varrho'$, und obige Proportion wird

$$L : L' = AB : KH$$
$$= GH : KH$$
$$= 1 : \sin BAE,$$

folglich findet auch hier dasselbe Gesetz Statt, wie bei selbstleuchtenden Körpern, daſs die Lichtmenge mit dem Sinus des Ausfluſswinkels abnimmt.

Wir sehen hieraus, daſs bei der Berechnung der Erleuchtung, welche dunkle Körper geben, die mit erborgtem Licht glänzen, dieselben Formeln angewendet werden können, die für selbstleuchtende Körper gebraucht werden.

§. 208.

Als ein hierher gehöriges Beispiel wollen wir die Erleuchtung berechnen, welche der Mond einem bestimmten unendlich kleinen Stück der Erdoberfläche mittheilt. Der Mond ist eine dunkle Kugel, welche ihr Licht von der Sonne erhält; folglich wird die Lichtmenge, welche einem Element seiner Oberfläche von der Sonne mitgetheilt wird, durch die Formel (§. 200.)

$$lds \,.\, \pi aa \cdot \frac{\sin H}{RR}$$

ausgedrückt werden, wo ds das Element der Mondsoberfläche, H die Höhe des Mittelpunkts der Sonne über dem Horizont des Elements, a den Halbmesser der Sonne, und R den Abstand des Elements vom Mittelpunkt der Sonne bedeutet. Setzt man, wie schon öfter geschehen ist, den scheinbaren Halbmesser der Sonne $= \omega$, so ist $a = R \,.\, \sin \omega$, und die Lichtmenge

$$= l\pi \,.\, \sin \omega^2 \,.\, \sin H \,.\, ds.$$

Nun ist freilich der Winkel ω, streng genommen, für alle Elemente der Mondsoberfläche nicht von einerlei Werth, allein wegen der ungeheuern Entfernung der Sonne in Vergleich mit den Dimensionen des Mondes, dürfen wir uns ohne merklichen Fehler erlauben, denselben als völlig constant anzusehen. Die Gröfse $l\pi \,.\, \sin \omega^2 \,.\, \sin H \,.\, ds$, würde nun die absolute Lichtmenge seyn, welche das Element ds empfängt, und dieser wiederum die senkrecht ausfliefsende Lichtmenge gleich gesetzt werden müssen, wenn kein Licht von der Materie des Mondes verschluckt würde. Da nun aber dieser letzte Umstand jedenfalls eintritt, so müssen wir noch eine Gröfse n als Factor hinzufügen, so dafs die senkrecht ausfliefsende Lichtmenge durch

$$nl\pi \,.\, \sin \omega^2 \,.\, \sin H \,.\, ds$$

ausgedrückt wird. Obgleich nun wohl die Gröfse n von der physischen Beschaffenheit der Materie des Mondes, wo das Element ds grade liegt, abhängt, und wie man leicht sieht, desto kleiner wird, je mehr die Materie

um Lichtverschlucken geneigt ist, und wirklich eine olche Verschiedenheit an der Mondsoberfläche Statt indet, wie man aus den hellern und dunklern Stellen lesselben erkennt, so betrachten wir dieselbe doch als onstant, da sich diese Gröfse schwerlich als eine Function ler Coordinaten der Mondsoberfläche wird ausdrücken assen.

§. 209.

Wir bezeichnen ferner die Gröfse des Elements der Erdoberfläche durch $d\sigma$, den Ausflufswinkel des Strahls durch α, den Einfallswinkel durch ε, die Entfernung des Elements der Mondsoberfläche von dem zu erleuchtenden durch r, den Abstand des letzten Elements vom Mittelpunkt des Monds durch A, so hat man für die auf das Element fallende Lichtmenge den Ausdruck

$$nld\sigma \,.\, \pi \,.\, \sin\omega^2 \cdot \frac{\sin H \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin\varepsilon}{rr} \cdot ds,$$

welcher zwischen den gehörigen Grenzen für den ganzen erleuchteten Theil des Mondes integrirt werden mufs.

Es sey (Fig. 31.) APB die Mondskugel, C ihr Mittelpunkt. Man lege durch den Mittelpunkt des Mondes, den Mittelpunkt der Sonne und das Element der Erdoberfläche eine Ebene, die die Mondskugel in dem gröfsten Kreise AB schneidet, so wird die vom Mittelpunkt des Mondes nach dem Mittelpunkt der Sonne gezogene Gesichtslinie die Mondsoberfläche in diesem gröfsten Kreise, z. B. im Punkt S, treffen. Für ein Element der Mondsoberfläche, welches in diesem Punkt sich befindet, würde die Höhe $H = 90^0$ werden.

§. 210.

Da die Sonne eine so grofse Entfernung vom Monde besitzt, so werden wir ferner ohne merklichen Fehler zur grofsen Erleichterung der Rechnung annehmen dürfen, es werde immer genau die Halbkugel des Mondes erleuchtet. Nimmt man dann $SD = 90^0$ und zieht den gröfsten Kreis PDQ, so ist PDQ die Erleuchtungsgrenze, und für alle auf diesem Kreise liegende

Elemente erscheint die Sonne im Horizont, also w
für sie die Höhe $H = o$. Die Fläche $PBDQ$ ist d
der erleuchtete Theil des Mondes auf der Halbku
$APBQ$, und nehmen wir an, dafs $APBQ$ derjen
gröfste Kreis ist, welcher entsteht, indem die Mon
kugel durch eine senkrecht auf der vom Erdoberfläch
Element nach dem Mittelpunkt des Monds gezoge
Gesichtslinie stehende Ebene geschnitten wird, so
$PBDQ$ die von der Erde aus gesehene Mondspha
Halbirt man AB in E, so wird die zuletzt erwäh
Gesichtslinie die Oberfläche des Mondes in E treff
Es ist zu bemerken, dafs wir uns hierbei die Vora
setzung gestatten, man könne von der Erde aus
Halbkugel des Mondes übersehen, welches zwar ni
genau richtig, allein wegen der bedeutenden Entfernu
der Erde vom Monde gegen den Halbmesser des Mon
doch zulässig ist.

§. 211.

Es sey M irgend ein Element der erleuchtet
Fläche des Mondes, so sieht man leicht, dafs für dies
Punkt die Höhe der Sonne $= NM$ wird, welch
Bogen man findet, indem man durch S und M ein
Bogen eines gröfsten Kreises bis zur Erleuchtungsgren
legt. Man ziehe den Bogen PMR, so hat man

$$\cos MS = \cos RS . \cos MR.$$

Bestimmt man nun die Lage des Punktes M durch
Bogen $MR = \psi$, $BR = \varphi$, und die Gröfse der M
desphase durch den Bogen $SB = \gamma$, bemerkt man f
ner, dafs $NM + MS = H + MS = 90^0$, so hat m

$$\begin{aligned} \sin H &= \cos \psi . \cos (\varphi - \gamma) \\ &= a' a' d\varphi . d\psi . \cos \psi, \end{aligned}$$

wo a' den Halbmesser des Mondes bedeutet. Ist f
ner in T die Erde, so hat man $CMT = 90^0 +$
Nun ist, mit Vernachlässigung der geringen Paralla
$MCT = 180^0 - CMT = 90^0 - \alpha$. Verbindet m
M und E durch den Bogen eines gröfsesten Krei
ME, so ist auch $ME = 90^0 - \alpha$. Das Drei

MRE giebt nun $\cos ME = \cos MR \,.\, \cos RE$, und da $RE = 90^0 - BR = 90^0 - \varphi$, $MR = \psi$, so kommt

$$\sin \alpha = \sin \varphi \,.\, \cos \psi.$$

Was nun endlich den Einfallswinkel ε betrifft, so können wir denselben als constant betrachten, und zwar dem Einfallswinkel gleich setzen, den ein Strahl besitzt, welcher vom Mittelpunkt des Mondes herkommt, so dafs also dieser Einfallswinkel ε nichts anders ist, als die Höhe des Mittelpunkts des Mondes über dem Horizont des Orts der Erdoberfläche.

§. 212.

Substituiren wir alle diese Werthe in den Ausdruck (§. 209.)

$$nld\sigma \,.\, \pi \,.\, \sin \omega^2 \cdot \frac{\sin H \,.\, \sin \alpha \,.\, \sin \varepsilon}{rr} \cdot ds,$$

so erhält man

$$kd\sigma \,.\, \cos \psi^5 \,.\, \cos (\varphi - \gamma) \,.\, \sin \varphi \,.\, d\varphi d\psi,$$

indem man der Kürze wegen

$$nl\pi \,.\, \sin \omega^2 \,.\, \sin \varepsilon \cdot \frac{a'a'}{AA} = k$$

setzt. Integrirt man zuerst nach ψ, so ist

$$\int d\psi \,.\, \cos \psi^5 = \sin \psi - \tfrac{1}{3} \,.\, \sin \psi^3,$$

und wie man aus der Figur sieht, mufs dies Integral von $\psi = -\tfrac{1}{2} \,.\, \pi$ bis $\psi = +\tfrac{1}{2} \,.\, \pi$ ausgedehnt werden. Dies giebt

$$\sin \psi - \tfrac{1}{3} \,.\, \sin \psi^3 = \tfrac{4}{3},$$

folglich wird obige Formel nach der ersten Integration

$$\tfrac{4}{3} \,.\, kd\sigma \,.\, \cos (\varphi - \gamma) \,.\, \sin \varphi \,.\, d\varphi.$$

Nun wird aber

$$\int \cos (\varphi - \gamma) \,.\, \sin \varphi \,.\, d\varphi$$
$$= \cos \gamma \int \cos \varphi \,.\, \sin \varphi \,.\, d\varphi + \sin \gamma \int \sin \varphi^2 \,.\, d\varphi$$
$$= \tfrac{1}{2} \,.\, \cos \gamma \,.\, \sin \varphi^2 + \tfrac{1}{2} \,.\, \sin \gamma \,.\, (\varphi - \sin \varphi \,.\, \cos \varphi).$$

Die Grenzen der Integration sind hierbei, wenn B den westlichen Mondsrand bedeutet, und der Mond im Zunehmen ist, $\varphi = o$ und $\varphi = \tfrac{1}{2} \,.\, \pi + \gamma$, und zwischen diesen Grenzen wird das Integral

$$= \tfrac{1}{2} \,.\, \sin \gamma \,.\, (\tfrac{1}{2} \,.\, \pi + \gamma) + \tfrac{1}{2} \,.\, \cos \gamma,$$

also haben wir die ganze Erleuchtung

1) $L = \frac{2}{3} . kd\omega . [(\frac{1}{2} . \pi + \gamma) . \sin \gamma + \cos \gamma]$.

Für den Neumond ist $\gamma = -\frac{1}{2} . \pi$, also $L = o$,

- das erste Viertel - $\gamma = o$, - $L = \frac{2}{3} . kd\omega$,

- den Vollmond - $\gamma = +\frac{1}{2} . \pi$, - $L = \frac{2}{3} . kd\omega$.

Nach dem Vollmond ist aber die Formel nicht richtig, weil dann die Grenzen $\varphi = o$ und $\varphi = (\frac{1}{2} . \pi + \gamma)$ nicht mehr gelten, indem von $\varphi = o$ bis zu $\gamma - \frac{1}{2} . \pi$ die Mondsoberfläche dunkel ist. Man muſs dann das Integral

$$\frac{1}{2} . \cos \gamma . \sin \varphi^2 + \frac{1}{2} . \sin \gamma . (\varphi - \sin \varphi . \cos \varphi)$$

zwischen den Grenzen $\varphi = \gamma - \frac{1}{2} . \pi$ und $\varphi = \pi$ nehmen. Hierdurch wird selbiges

$$= \frac{1}{2} . \sin \gamma . (\frac{3}{2} . \pi - \gamma) - \frac{1}{2} . \cos \gamma,$$

folglich der Ausdruck der Erleuchtung

2) $L = \frac{2}{3} . kd\omega . [\sin \gamma . (\frac{3}{2} . \pi - \gamma) - \cos \gamma]$.

Man sieht übrigens leicht, daſs $\gamma + \frac{1}{2} . \pi$ die Elongation des Mondes von der Sonne bedeutet. Bezeichnet man den scheinbaren Halbmesser des Monds durch ω', so wird $\frac{a'}{A} = \sin \omega'$, und der Werth von k läſst sich auch so schreiben:

$$k = nl\pi . \sin \varepsilon . \sin \omega^2 . \sin \omega'^2$$

§. 213.

Wir haben bisher immer nur von der Lichtmenge oder Erleuchtung gesprochen, die ein Körper von dem andern erhält, ohne weiter darauf zu achten, wie die Helligkeit und der Glanz der leuchtenden Körper unserm Auge erscheint, oder welchen scheinbaren Glanz die Körper besitzen, sie mögen selbstleuchtend oder erleuchtet seyn; im letztern Fall pflegt man statt scheinbaren Glanz auch scheinbare Klarheit zu setzen. Ohne uns hierbei auf eine genaue Berechnung des Weges der Strahlen durch die verschiedenen Flüssigkeiten, welche das Auge erhält, einzulassen, da diese in die Dioptrik gehört, brauchen wir bei vorliegenden Untersuchungen nur anzunehmen, daſs das Licht, welches

n einem Punkte ins Auge kommt, blofs durch die upille oder den Stern in dasselbe gelangen kann, und afs also unter sonst gleichen Umständen und gleicher age des Punkts, welcher Licht in das Auge schickt, ie einfallende Lichtmenge und die daher rührende röfsere oder mindere Klarheit mit der Gröfse der Pupille u- und abnimmt. Ferner können wir als richtig voraus-etzen, dafs die Gröfse des Bildes einer unendlich kleinen inie auf der Netzhaut, dem Gesichtswinkel, unter elchem diese Linie erscheint, proportional ist.

§. 214.

Zuerst wollen wir untersuchen, in wie fern die ichtmenge, welche von einem leuchtenden Punkt ins uge gelangt, von der Entfernung desselben und von einer Lage gegen die Gesichtsaxe abhängt (§. 40.). ierbei betrachten wir die Pupille als einen Kreis, dessen albmesser $= a$ gesetzt wird, und aus §. 187. haben ir die Lichtmenge, welche von einem leuchtenden unkt auf das Element einer ebenen Fläche fällt,

$$= \frac{lh \,.\, rdrd\varphi}{\sqrt{(mm + hh + rr - 2mr \,.\, \cos\varphi)^5}},$$

o die Integrationen von $\varphi = o$ bis $\varphi = 2\pi$, und von $= o$ bis $r = a$ ausgeführt werden müssen. Die änge des Perpendikels, welches vom leuchtenden Punkt if die Ebene gefällt ist, wird durch h, und der Ab-and des Fufspunkts des Perpendikels vom Mittelpunkt es Kreises wird durch m ausgedrückt. Setzt man also e Entfernung des leuchtenden Punkts vom Mittelpunkt er Pupille $= R$, und die Neigung dieser Linie gegen e Gesichtsaxe $= \theta$, so hat man

$$m = R \,.\, \sin\theta, \quad h = R \,.\, \cos\theta,$$

id voriger Ausdruck läfst sich auch so schreiben:

$$l \,.\, R \,.\, \cos\theta \cdot \frac{rdrd\varphi}{\sqrt{(RR + rr - 2Rr \,.\, \cos\varphi \,.\, \sin\theta)^5}}.$$

a nun im Allgemeinen R gegen r als sehr grofs be-achtet werden kann, so dürfen wir das Radical in

eine Reihe entwickeln, in welcher alle Potenzen von $\frac{r}{R}$, welche die zweite übersteigen, vernachlässigt werden können. Man hat dann

$$(RR + rr - 2Rr \cdot \cos\varphi \cdot \sin\mathcal{C})^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{R^3}$$

$$+\frac{1}{R^3}\cdot\left(3\cdot\frac{r}{R}\cdot\cos\varphi\cdot\sin\mathcal{C} - \tfrac{3}{2}\cdot\frac{rr}{RR}\right) + \tfrac{15}{2}\cdot\frac{rr}{R^5}\cdot\sin\mathcal{C}^2\cdot\cos\varphi^2.$$

Multiplicirt man dies mit $d\varphi$ und integrirt von $\varphi = o$ bis $\varphi = 2\pi$, so kommt

$$\frac{2\pi}{R^3} - \frac{3rr}{R^5}\cdot\pi + \tfrac{15}{2}\cdot\frac{rr}{R^5}\cdot\pi\cdot\sin\mathcal{C}^2.$$

Dieser Ausdruck mit rdr multiplicirt und integrirt giebt, da die Grenzen $r = o$ und $r = a$ sind,

$$\frac{\pi}{R^3}\cdot aa\cdot\left[1 - \tfrac{3}{4}\cdot\frac{aa}{RR} + \tfrac{15}{8}\cdot\frac{aa}{RR}\cdot\sin\mathcal{C}^2\right].$$

Hierzu füge man noch den Factor $lR\cdot\cos\mathcal{C}$, so kommt die Lichtmenge, welche durch die Pupille einfällt,

$$L = l\cdot\cos\mathcal{C}\cdot\frac{aa\pi}{RR}\cdot\left[1 - \tfrac{3}{4}\cdot\frac{aa}{RR} + \tfrac{15}{8}\cdot\frac{aa}{RR}\cdot\sin\mathcal{C}^2\right].$$

§. 215.

Vernachlässigt man noch die beiden Glieder $-\frac{3}{4}\cdot\frac{aa}{RR} + \frac{15}{8}\cdot\frac{aa}{RR}\cdot\sin\mathcal{C}^2$, von denen vorzüglich das letzte immer sehr klein ausfallen wird, da man gewöhnlich nur solche Punkte genau beachtet, welche der Gesichtsaxe nahe liegen, für die also $\mathcal{C}$ immer sehr klein ausfällt, so bleibt

$$L = l\cdot\cos\mathcal{C}\cdot\frac{aa\pi}{RR}.$$

Nun ist aber $aa\pi$ die Fläche der Pupille, also wird die Lichtmenge, welche von einem leuchtenden Punkt ins Auge fällt, dem Cosinus des Winkels, den die nach dem leuchtenden Punkt gezogene Gesichtslinie mit der Gesichtsaxe bildet, so wie der Fläche der Oeffnung der Pupille direct, und dem Quadrat der Entfernung um-

gekehrt proportional. Dieser Satz findet bei allen leuchtenden Gegenständen Statt, von welchen wir einzelne Theile nicht mehr unterscheiden können, wie dies z. B. bei den Fixsternen Statt findet, deren scheinbarer Glanz umgekehrt, wie das Quadrat ihrer Entfernung vom Auge, abnimmt. Wir bemerken noch, dafs die in voriger Formel angegebene Lichtmenge zu grofs ist, weil wir keine Rücksicht darauf genommen haben, dafs nicht alles auf das Auge fallende Licht in dasselbe eindringt, indem ein Theil desselben, wie von allen andern Körpern, theils regelmäfsig zurückgeworfen, theils zerstreut wird. Dieser Umstand hat aber auf unsere Schlüsse keinen weitern Einfluſs, indem der Lichtverlust immer der einfallenden Lichtmenge proportional ist, wir also nur in den vorigen Ausdrücken statt l, nl zu setzen brauchen, wo n eine constante Gröfse und kleiner als 1 ist, mithin die Sache darauf hinaus kommt, als ob die absolute Intensität des Lichts, das vom leuchtenden Punkt ausgeht, statt l, nl gewesen, also im Verhältnifs des Lichtverlustes vermindert wäre.

§. 216.

Ist der leuchtende Gegenstand eine ausgedehnte Fläche, so ist nach §. 192. die Lichtmenge, welche von einem Element ds' des leuchtenden Körpers auf ein Element ds der Oberfläche der Pupille fällt,

$$= \frac{lds \,.\, ds' \,.\, \sin\alpha \,.\, \sin\varepsilon}{rr}.$$

Da die Dimensionen der Pupille sehr klein sind, so wird es ohne merklichen Fehler erlaubt seyn, anzunehmen, der Ausflufswinkel α sey für alle von einem Punkte der leuchtenden Fläche auf die Pupille fallende Strahlen gleich grofs, und zwar demjenigen gleich, welchen ein auf die Mitte der Pupille fallender Strahl bildet. Wir dürfen also für ein bestimmtes Element des leuchtenden Gegenstandes α als constant betrachten, und die ganze vom Element ds' auf die Pupille fallende Lichtmenge wird durch

$$lds' \cdot \sin \alpha \cdot \int \frac{ds \cdot \sin \varepsilon}{rr}$$

angegeben. Statt des Integrals können wir die im vorigen Paragraph entwickelte Gröfse

$$\cos \theta \cdot \frac{aa\pi}{RR}$$

setzen, wodurch die Lichtmenge

$$= lds' \cdot \sin \alpha \cdot \cos \theta \cdot \pi \cdot \frac{aa}{RR}$$

wird. Die Gröfse des Bildes, welches von dem Element auf der Netzhaut entsteht, sey $= d\Sigma$, so findet man die Dichtigkeit des Lichts, indem die gesammte Lichtmenge durch die Gröfse dieses Elements dividirt wird,

$$= l \cdot \sin \alpha \cdot \cos \theta \cdot \pi \cdot \frac{aa}{RR} \cdot \frac{ds'}{d\Sigma},$$

und diese Dichtigkeit des Lichts auf einer bestimmten Stelle der Netzhaut ist nothwendig der Ausdruck des scheinbaren Glanzes des leuchtenden Elements. Es kommt nun blofs noch darauf an, das Verhältnifs $\frac{ds'}{d\Sigma}$ auszudrücken. Hierzu sey L der Mittelpunkt der Pupille (Fig. 28.), CB ein Element $= ds'$, $AB = d\sigma$ ein unendlich kleines Element einer Kugeloberfläche, welches mit CB zwischen gleichen Gesichtsgrenzen eingeschlossen ist; da ferner unserer vorigen Bezeichnung zufolge $AL = LB = R$, so wird der Gesichtswinkel jeder Linie $d\lambda$, die in diesem Kugelstück gezogen werden kann, gleich $\frac{d\lambda}{R}$ seyn, und die Gröfse der Linie auf der Netzhaut läfst sich durch $\frac{fd\lambda}{R}$ (§. 213.) ausdrücken, wo f eine Gröfse ist, die für alle Aenderungen von $d\lambda$ und R gleich bleibt und nur von θ abhängt. Da sich nun bekanntlich die Flächen verhalten, wie die Quadrate homologer Linien, so folgt hieraus, dafs

$$d\sigma : d\Sigma = d\lambda^2 : f^2 \cdot \frac{d\lambda^2}{R^2}.$$

so wird die Gleichung

$$d\varrho = - N\varrho \Delta ds$$

Statt finden, wo N eine Constante ist, die für jeden lichtverschluckenden Körper aus Beobachtungen bestimmt werden muſs. Aus voriger Gleichung wird

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - N\Delta ds,$$

und ist Δ in der ganzen Ausdehnung des Weges constant, so wird die Gleichung integrabel, und sie giebt, wenn man durch ϱ' die anfängliche Dichtigkeit des Lichts für $s = o$ bezeichnet,

$$\log \frac{\varrho}{\varrho'} = - N\Delta s$$

$$\varrho = \varrho' . e^{- N\Delta s}.$$

§. 218.

Die Gröſse $N\Delta$ giebt zugleich ein Maaſs der Durchsichtigkeit an; sagen wir z. B., ein Körper sey p mal durchsichtiger, als ein anderer, wenn ein Lichtstrahl den p fachen Weg durchlaufen hat, ehe er in demselben Maaſse geschwächt ist, so muſs der Factor $N\Delta$ für den p mal so durchsichtigen Körper p mal kleiner seyn. So wird z. B. im Meerwasser das Licht nach einem Wege von 1,6 Toisen im Verhältniſs von 3 : 2 vermindert, und hieraus findet sich

für Meerwasser, $N\Delta = 0{,}2535$.

In der Luft von der Dichtigkeit, wie sie an der Oberfläche der Erde Statt findet, kann das Licht einen Weg von 4000 Toisen durchlaufen, ehe es in dem Verhältniſs von 5 : 4 vermindert wird; man erhält also

für Luft, $N\Delta = 0{,}0000558$.

Die Luft wäre also hiernach $\frac{0{,}2535}{0{,}0000558} = 4543$ mal durchsichtiger als das Meerwasser.

§. 219.

Das auf diese Art gefundene Durchsichtigkeitsverhältniſs richtet sich aber, selbst bei Körpern, die aus

einerlei Materie bestehen, nach der verschiedenen Dichtigkeit, die der Körper vielleicht zufälligerweise hat, bezieht sich also auf den so eben Statt findenden Zustand der verglichenen Körper, weswegen man dasselbe das relative Durchsichtigkeitsverhältnifs nennen kann. Man kann nun aber eben so nach dem absoluten oder specifischen Durchsichtigkeitsverhältnifs fragen, welches blofs von der Kraft der Körpertheilchen, das Licht zu binden und im Innern des Körpers zu zerstreuen, abhängt. Man mufs dann die gefundenen Werthe von Nd durch die bekannte Dichtigkeit oder das specifische Gewicht des untersuchten Körpers dividiren, wodurch man den Werth von N erhält, dem die specifische Durchsichtigkeit umgekehrt proportional ist. Nimmt man das specifische Gewicht des destillirten Wassers als Einheit an, so erhält man für das specifische Gewicht

des Meerwassers $= 1{,}03$,
der Luft $= 0{,}00128$,

also, wenn man die im vorigen §. gefundenen Werthe von Nd nimmt,

für Meerwasser, $N = 0{,}246$;
für Luft, $N = 0{,}0435$;

hieraus folgt, dafs die specifische Durchsichtigkeit der Luft $\frac{0{,}246}{0{,}0435} = 5{,}651$ mal gröfser ist, als die des Meerwassers. Würde man also die Luft bis zu der Dichtigkeit des Meerwassers zusammenpressen, so könnte das Licht in der so verdichteten Luft, vorausgesetzt, dafs ihre chemische Constitution sich nicht änderte, einen ungefähr fünf und zwei Drittel mal gröfsern Weg zurücklegen, als im Meerwasser, ehe es in gleichem Grade geschwächt würde.

§. 220.

Geht das Licht nicht durch eine continuirliche durchsichtige Masse, sondern durch eine Anzahl auf einander gelegter Platten, wie z. B. durch Glasscheiben, so mufs

cksichtlich der Verminderung des Lichts noch eine ıdere Verbesserung angebracht werden, indem aufser er im Innern des Körpers verlorenen und zerstreuten ichtmasse noch ein Theil des Lichts beim Eintritt und ustritt aus den Tafeln verloren geht, der ebenfalls inen aliquoten Theil der vorhandenen Lichtmenge aus- ıacht. Es wird also nicht einerlei seyn, ob man das .icht durch 6 aufeinander gelegte Glasscheiben, jede on 2 Linien Dicke, oder durch eine Glasplatte von inem Zoll Dicke gehen läfst, und wir wollen die Ver- ınderungen untersuchen, die aus diesem Umstand her- orgehen. Was nun die Formel $\varrho = \varrho' . e^{-NAs}$ be- rifft, so sieht man leicht, dafs unter diesen Bedingungen ϱ' die Dichtigkeit des Lichts, nachdem es so eben die vordere Fläche durchdrungen hat, und ϱ diejenige be- deutet, wenn es so eben aus der hintern Fläche heraus- treten will. Statt des Factors NA setzen wir n, und s bedeutet die Dicke der Glasscheibe, indem wir an- nehmen, dafs das einfallende Licht senkrecht durchgehe.

§. 221.

Die anfängliche Dichtigkeit des Lichts sey R, und der Theil, welcher jedesmal bei dem Antreffen einer Oberfläche verloren geht, werde durch m bezeichnet, so tritt das Licht in die erste Glasplatte mit der Dichtigkeit $(1-m).R$, also wird die Dichtigkeit, ehe die Hinter- fläche erreicht wird,

$$\varrho = (1-m).R.e^{-ns},$$

und die Dichtigkeit des durch die Oberfläche austre- tenden Lichts

$$\varrho' = (1-m)^2.R.e^{-ns}.$$

Mit derselben Dichtigkeit kommt es an der Vorderfläche der zweiten Scheibe an, wo wieder der $m$te Theil ver- loren geht; es tritt also in die zweite Scheibe mit der Dichtigkeit

$$\varrho'' = (1-m)^3.R.e^{-ns},$$

und wenn die Dicke der zweiten Platte durch s' bezeichnet wird, so kommt an ihre Hinterfläche das Licht mit einer Dichtigkeit

$$= (1 - m)^5 . R . e^{-ns - ns'}.$$

Hiervon geht wieder der $m$te Theil verloren, also tritt das Licht aus der zweiten Scheibe mit einer Dichtigkeit

$$= (1 - m)^4 . R . e^{-ns - ns'}.$$

Geht man in diesen Schlüssen weiter fort, so ergiebt sich leicht die Dichtigkeit des Lichts nach seinem Austritt aus der dritten Scheibe

$$= (1 - m)^6 . R . e^{-n.(s + s' + s'')},$$

nach seinem Austritt aus der vierten Scheibe

$$= (1 - m)^8 . R . e^{-n.(s + s' + s'' + s''')}$$

u. s. w. fort, also allgemein nach seinem Austritt aus der $p$ten Scheibe, wenn die Dicke aller Scheiben zusammengenommen

$$s + s' + s'' + \ldots\ldots = \Sigma$$

gesetzt wird, ergiebt sich die Dichtigkeit des Lichts

$$\varrho = (1 - m)^{2p} . R . e^{-n\Sigma}.$$

§. 222.

Nach einem von Bouguer angestellten Versuch, wurde das Licht, wenn es durch sechs auf einander gelegte Spiegelglasscheiben gegangen war, im Verhältnifs von 10 : 3 vermindert; die Dicke aller Glasplatten zusammen betrug 11 $\frac{1}{2}$ Linien. Wir haben also, um die Formel

$$\varrho = (1 - m)^{2p} . R . e^{-n\Sigma}$$

anwenden zu können, die Werthe $\frac{R}{\varrho} = \frac{10}{3}$, $p = 6$, $\Sigma = 11\frac{1}{2}$. Aus andern Beobachtungen war ferner gefunden, dafs für Spiegelglas bei senkrechtem Einfall des Lichts, $m = \frac{1}{45}$ genommen werden könne. Es wird also

$$(1 - m)^{2p} = \left(\tfrac{22}{45}\right)^{12}$$

d wenn man in voriger Formel die natürlichen Lo-rithmen nimmt, so erhält man

$$n\Sigma = 12.(\log 39 - \log 40) + \log 10 - \log 3$$

$$\log 39 = 3,6635616$$
$$\log 40 = 3.6888795$$
$$-0.0253179 \times 12$$
$$-0.3038148$$
$$\log 10 = 2.3025851$$
$$1.9987703$$
$$\log 3 = 1.0986123$$
$$0.9001580 = n\Sigma,$$

o $n = 0{,}078274$, wenn der vom Licht durchlaufene eg in pariser Linien ausgedrückt wird. Hätte man e Zurückwerfung des Lichts an den Vorderflächen und interflächen der Gläser nicht mit berücksichtigt, so ürde man $n = 0.1047$ gefunden haben. Uebrigens t aber bei diesem Resultat zu bemerken, dafs der erth von n ungewöhnlich grofs zu seyn scheint, so dafs as Glas ziemlich undurchsichtig gewesen seyn mufs.

Einem andern Versuche zufolge, verminderte ein 6 par. Linien dickes Glas das Licht nur bis zur Hälfte, nd hieraus würde man für dieses Glas $n = 0{,}0178475$ nden.

§. 223.

Um die Grenze der Schwächung des Lichts rück-chtlich der Sichtbarkeit desselben ausfindig zu machen, gte Bouguer 16 Scheiben aus gemeinem Fenster-lase über einander, und fand, dafs das Sonnenlicht 247 al geschwächt wurde. Die vorhin entwickelte Formel

$$\varrho = (1 - m)^{2p} . R . e^{-n\Sigma},$$

ebt dann

$$\tfrac{1}{247} = (1 - m)^{32} . e^{-n\Sigma}.$$

i 76 bis 77 Scheiben war auch nicht das geringste onnenlicht mehr zu sehen (Bouguer *traité pag.* 262.), ndern das Glas verhielt sich, wie ein dunkler Körper.

Nimmt man statt dessen 80 Scheiben, und bezeichnet die Zahl, welche die Schwächung des Lichts durch 80 Scheiben ausdrückt, durch q, so hat man

$$\frac{1}{q} = (1 - m)^{160} \cdot e^{-5n\Sigma},$$

indem wir wohl annehmen dürfen, dafs 80 Scheiben fünf mal so dick waren, als 16. Aus diesen beiden Gleichungen folgt $q = 247^5$, und das in diesem Maafse verminderte Sonnenlicht wird also dem Auge völlig unempfindbar seyn. Man findet leicht, dafs, um eine in diesem Maafse geschwächte Erleuchtung hervorzubringen, die Sonne 958832 mal so weit von der Erde entfernt seyn mufs, als sie es jetzt ist *). Für Meerwasser fanden wir die Gleichung

$$e^{0{,}2535 \cdot s} = \frac{\varrho'}{\varrho},$$

und wenn das Licht der Sonne unsichtbar werden soll, so findet sich $s = 108{,}7$ Toisen. In dieser Tiefe würde man also die Sonne nicht mehr sehen können.

Für atmosphärische Luft hat man

$$\frac{\varrho'}{\varrho} = e^{0{,}0000558 \cdot s}$$

und es findet sich daher für Luft von der Dichtigkeit, wie sie an der Oberfläche der Erde Statt findet, der zu durchlaufende Raum 4543 mal gröfser, als für Meerwasser, also $s = 493824$ Toisen oder 130 geographische Meilen.

§. 224.

In so fern das Mittel, welches das Licht durchläuft, nicht gleichförmig dicht ist, läfst sich die für die Lichtschwächung gefundene Gleichung (§. 217.)

*) Für 76 Scheiben, welche der Versuch gab, erhält man $q = 247^{\frac{19}{4}}$ und um eine so geschwächte Erleuchtung hervorzubringen, müfste die Sonne 481533 mal so weit von uns entfernt seyn, als sie wirklich ist. Es möchten indessen nach Bouguer's Meinung für sehr empfindliche Augen doch 80 Scheiben nöthig seyn. G.

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - N\Delta ds$$

nicht direct integriren, weil man erst die Relation kennen mufs, welche zwischen der Dichtigkeit Δ und dem Wege s Statt findet. Ein Beispiel hierzu giebt das Licht, welches von den Himmelskörpern unsere Atmosphäre durchdringt. Bezeichnet man durch b die Höhe der Atmosphäre, durch z die Höhe des Punktes über der Erdoberfläche, wo die Dichtigkeit der Luft $= \Delta$ Statt findet, so hat man, wenn der Kürze wegen $\frac{z}{b} = x$ gesetzt wird, sehr nahe

$$\frac{\Delta}{\Delta'} = (1 - x)^5,$$

wo Δ' die Dichtigkeit an der Oberfläche der Erde bedeutet. Verbindet man diese Gleichung mit der vorigen

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = - N\Delta ds,$$

so ergiebt sich, indem Δ eliminirt wird,

$$\frac{\delta\varrho}{\varrho} = - N\Delta' . (1 - x)^5 . ds.$$

§. 225.

Es sey (Fig. 32.) C der Mittelpunkt der Erde, der innere Kreis die Oberfläche der Erde, der äufsere die Oberfläche der Atmosphäre, DA ein in der Atmosphäre sich bewegender Lichtstrahl, wobei wir die Krümmung desselben, welche durch die Brechung hervorgebracht wird, nothwendig bei Seite setzen müssen. AT sey eine Berührungslinie an der Erdoberfläche in A, wo dieselbe zuletzt vom Lichtstrahl getroffen wird, so ist der Winkel DAT der Höhe des Gestirns, von welchem das Licht herkommt, über dem Horizont gleich, und wir bezeichnen denselben durch μ. Man setze ferner den Halbmesser der Erde $AC = a$, so ist

$$DC = a + b, \quad MC = a + z,$$

und man hat in den beiden Dreiecken MAC, DAC,

wenn man bemerkt, dafs der Winkel $MAC = DA$ $= 90^0 + \mu$ wird, die Gleichungen

$$(a + z)^2 = aa + MA^2 + 2a \cdot MA \cdot \sin \mu$$
$$(a + b)^2 = aa + DA^2 + 2a \cdot DA \cdot \sin \mu.$$

Hieraus erhält man sogleich

$$MA + a \cdot \sin \mu = \sqrt{aa \cdot \sin \mu^2 + 2az + z}$$
$$DA + a \cdot \sin \mu = \sqrt{aa \cdot \sin \mu^2 + 2ab + bb}$$

und da $DA - MA = MD = s$ ist, so kommt

$$s = \sqrt{aa \cdot \sin \mu^2 + 2ab + bb} - \sqrt{aa \cdot \sin \mu^2 + 2az + z}$$

§. 226.

Der Ausdruck für s läfst sich aber für diejenig Fälle, wo die Höhe μ nicht gar zu klein ist, noch ve einfachen; da nämlich die Höhe der Atmosphäre, geg den Halbmesser der Erde genommen, sehr klein ist, wird man die Radicalgröfsen, welche im Ausdruck v s vorkommen, so entwickeln können, dafs alle Potenz der Verhältnisse $\frac{b}{a \cdot \sin \mu}$, $\frac{z}{a \cdot \sin \mu}$ vernachlässigt we den; dann bleibt blofs

$$s = \frac{b - z}{\sin \mu},$$

und da wir allgemein $z = bx$ setzten (§. 224.), wird auch

$$s = \frac{b}{\sin \mu} \cdot (1 - x)$$
$$ds = -\frac{b}{\sin \mu} \cdot dx,$$

folglich, wenn man diesen Werth in die Gleichung

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = -N\Delta' \cdot (1 - x)^5 \cdot ds$$

substituirt, so kommt

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = +N\Delta' \cdot \frac{b}{\sin \mu} \cdot (1 - x)^5 \cdot dx.$$

Hiervon ist das Integral

$$\log \varrho = -N\Delta' \cdot \frac{b}{\sin \mu} \cdot \frac{(1 - x)^6}{6} + C$$

An der Grenze der Atmosphäre sey $\varrho = \varrho'$, und da daselbst $x = b$, also $x = 1$ wird, so ist $C = \log \varrho'$, und man erhält

$$\log \frac{\varrho}{\varrho'} = - N\Delta' \cdot \frac{b}{\sin \mu} \cdot \frac{(1-x)^6}{6}.$$

Ist das Licht an der Oberfläche der Erde angelangt, so sey seine Dichtigkeit $\varrho = \varrho^0$, und man hat zugleich $x = o$, also

$$\log \frac{\varrho^0}{\varrho'} = - \tfrac{1}{6} \cdot N\Delta' \cdot \frac{b}{\sin \mu}.$$

§. 227.

Nun sey für zwei bestimmte Höhen μ', μ'', die Dichtigkeit des Lichts an der Oberfläche der Erde R', R'', so hat man die beiden Gleichungen

$$\log \frac{R'}{\varrho'} = - \tfrac{1}{6} \cdot N\Delta' \cdot \frac{b}{\sin \mu'},$$

$$\log \frac{R''}{\varrho'} = - \tfrac{1}{6} \cdot N\Delta' \cdot \frac{b}{\sin \mu''}.$$

Zieht man beide Gleichungen von einander ab, so bleibt

$$\log R' - \log R'' = \tfrac{1}{6} \cdot N\Delta' b \cdot \left(\frac{1}{\sin \mu''} - \frac{1}{\sin \mu'} \right).$$

Hieraus sieht man, dafs blofs das Verhältnifs $\frac{R'}{R''}$ der bei den Höhen μ', μ'' beobachteten Lichtstärken bekannt zu seyn braucht, um daraus die Gröfse $N\Delta'$ berechnen zu können, sobald man den Werth von b weifs.

§. 228.

Bouguer beobachtete das Licht des Vollmonds, als er 19° 16′ Höhe über dem Horizont hatte, und fand, dafs er eine weifse Fläche eben so hell erleuchtete, als vier Wachskerzen in einer Entfernung von 50 Fufs. Bei einer andern Beobachtung, wo der Mond 66° 11′ hoch stand, fand sich die Erleuchtung so grofs, wie die derselben vier Wachskerzen in der Entfernung von 41 Fufs. Bezeichnen wir also die Dichtigkeit des Lichts

bei der ersten Beobachtung durch R', bei der zweite durch R'', und bemerken, dafs die Erleuchtungen de weifsen Fläche sich umgekehrt, wie das Quadrat de Entfernung der Lichter, verhalten, so hat man di Proportion

$$R' : R'' = \frac{1}{50^2} : \frac{1}{41^2}.$$

Zugleich finden die Werthe

$$\mu' = 19^\circ 16', \quad \mu'' = 66^\circ 11'$$

Statt, und wenn man alle diese Zahlen in die Gleichung

$$\log R'' - \log R' = \tfrac{1}{6} \cdot N\Delta' b \cdot \left(\frac{1}{\sin \mu'} - \frac{1}{\sin \mu''} \right)$$

substituirt, so kommt

$$0{,}396902 = \tfrac{1}{6} \cdot N\Delta' b \,.\, 1{,}93754.$$

Nimmt man nun die Höhe der Atmosphäre, mit Rücksicht auf die in derselben Statt findende Temperaturabnahme, zu 49100 Meter an, so findet sich, da

$$1 \text{ Meter} = 0{,}513074 \text{ Toisen},$$

$$\frac{b}{6} = 4200 \text{ Toisen},$$

und hieraus ergiebt sich

$$N\Delta' = 0{,}0000488,$$

fast derselbe Werth, welcher §. 218. gefunden wurde.

§. 229.

Fällt das Licht horizontal ein, in der Richtung TA, so ist $\mu = o$, und der allgemeine Ausdruck

$$s = \sqrt{aa \,.\, \sin \mu^2 + 2ab + bb} - \sqrt{aa \,.\, \sin \mu^2 + 2az + zz}$$

wird dann, wenn wir auch hier die höhern Potenzen von z und b weglassen,

$$s = \sqrt{2ab} - \sqrt{2az}$$

$$ds = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{dz}{\sqrt{z}} \cdot \sqrt{2a} = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{2ab}.$$

Setzt man diesen Werth in die Gleichung (§. 224.)

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = -N\Delta' \,.\, (1 - x)^5 \,.\, ds,$$

so erhält man

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = N\Delta' \cdot \sqrt{\frac{ab}{2}} \cdot (1-x)^5 \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Man findet nun aber leicht, dafs zwischen den Grenzen $x = 1$ bis $x = o$ genommen, das Integral

$$\int (1-x)^5 \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}} = -2 \cdot \frac{2.4.6.8.10}{3.5.7.9.11},$$

und da zugleich, wenn ϱ' die Dichtigkeit des eintretenden Lichts und ϱ^0 die Dichtigkeit des an der Erdoberfläche ankommenden Lichts ist, $\int \frac{d\varrho}{\varrho} = \log \frac{\varrho^0}{\varrho'}$ wird, so hat man die Gleichung

$$\log \frac{\varrho'}{\varrho^0} = N\Delta' \cdot \sqrt{2ab} \cdot \tfrac{256}{693}.$$

Man hat nun die Zahlenwerthe

$$2a = 6543700 \text{ Toisen},$$
$$b = 25200 \text{ Toisen},$$
$$N\Delta' = 0{,}0000488,$$

und hieraus ergiebt sich

$$\log. \text{ nat } \frac{\varrho'}{\varrho^0} = 7{,}320445.$$

Hierzu gehört die Zahl 1511; also wird das Licht der Himmelskörper im Horizont etwa 1500 mal geschwächt.

§. 230.

Die in §. 226. entwickelte Formel für die Schwächung des Lichts in verschiedenen Höhen

$$\log \frac{\varrho^0}{\varrho'} = -\tfrac{7}{6} \cdot N\Delta' b \cdot \frac{1}{\sin \mu}$$

läfst sich in Zahlen so ausdrücken:

$$\log \frac{\varrho'}{\varrho^0} = \frac{0{,}20496}{\sin \mu},$$

wobei man die natürlichen Logarithmen erhält; will man die gewöhnlichen Tafellogarithmen haben, so mufs der Coefficient noch mit dem Modulus 0,4342944 der [illegible]schen Logarithmen multiplicirt werden, und dann [illegible]nnt

$$\log \frac{\varrho'}{\varrho^0} = \frac{0{,}08899}{\sin \mu}.$$

Nach dieser Formel ist, der bessern Uebersicht we folgende Tafel berechnet:

$\mu = 90^0$;	$\frac{\varrho'}{\varrho^0} = 1{,}23$
80^0 ;	1,23
70^0 ;	1,24
60^0 ;	1,27
50^0 ;	1,31
40^0 ;	1,38
30^0 ;	1,51
20^0 ;	1,82
10^0 ;	3,25
5^0 ;	10,49.

Weiter als 5 Grad darf man die Berechnung nach d Formel nicht ausdehnen, da sie bekanntlich nur so l als ziemlich richtig betrachtet werden darf, als a. s gegen b bedeutend erscheint, und bei 5^0 Höhe wird Verhältnifs $\frac{b}{a \cdot \sin \mu} = \frac{1}{11}$, also nicht mehr ganz k

Wenn man also genau die Erleuchtung haben welche ein Element der Erdoberfläche von der S empfängt, so mufs man in der Formel (§. 200.)

$$lds \cdot \pi aa \cdot \frac{\sin H}{RR}$$

für den absoluten Glanz l, der ohne die Lichtsc chung in der Atmosphäre Statt finden würde, den schwächten $l \cdot \frac{\varrho'}{\varrho^0}$ setzen, und man sieht leicht, wenn das erleuchtete Element auf der Kugelfläche Erde liegt, die Winkel H und μ gleichbedeutend

§. 231.

In allen vorigen Untersuchungen über die Sc chung des Lichts in durchsichtigen Mitteln, habe den Umstand vernachlässigt, dafs das Licht aufse noch im umgekehrten Verhältnifs des Quadrats Entfernung vom leuchtenden Punkt abnimmt. I Vernachlässigung war deswegen immer zulässig, wei leuchtende Punkt immer als sehr weit vom durchsich Mittel entfernt angenommen wurde, so dafs also ohn

Schwächung des Lichts, wegen der Undurchsichtigkeit, das Licht innerhalb des durchsichtigen Mittels merklich einerlei Dichtigkeit besessen haben würde. Allein, wenn ein leuchtender Punkt innerhalb des durchsichtigen Mittels sich befindet, so darf man die Abnahme des Lichts wegen zunehmender Entfernung nicht vernachlässigen. Bezeichnen wir die Abnahme des Lichts, wegen der Undurchsichtigkeit, durch $d\varrho'$, und die wegen der zunehmenden Entfernung durch $d\varrho''$, so wird der vollkommene Werth von $d\varrho$ durch die Summe $d\varrho' + d\varrho''$ ausgedrückt werden. Ist nun in der Entfernung $= s$ die Dichtigkeit des Lichts $= \varrho$, in der Entfernung $= s + ds$ die Dichtigkeit $= \varrho + d\varrho''$, so wird

$$\varrho . ss = (\varrho + d\varrho'').(s + ds)^2,$$

und hieraus ergiebt sich $d\varrho'' = -2 \cdot \frac{ds}{s} \cdot \varrho$. Nun haben wir früher schon

$$d\varrho' = -N\Delta\varrho ds$$

gefunden, also ergiebt sich $d\varrho' + d\varrho'' =$

$$d\varrho = -N\Delta\varrho ds - 2 \cdot \frac{ds}{s} \cdot \varrho.$$

Ist die Dichtigkeit der durchsichtigen Materie gleichförmig, d. h. Δ eine constante Gröfse, so erhält man durch Integration

$$\log \varrho = -N\Delta s - 2 . \log s + \text{Const};$$

für $s = 6$ sey $\varrho = \varrho'$, so wird

$$\log \varrho' = -N\Delta 6 - 2 . \log 6 + \text{Const},$$

also, wenn man die Constante eliminirt,

$$\log \frac{\varrho}{\varrho'} = -N\Delta . (s - 6) - \log \frac{66}{ss}$$

$$\varrho = \varrho' . e^{-N\Delta (s-6)} \cdot \frac{66}{ss}.$$

Vermittelst dieser Formel lassen sich z. B. die Lichtmengen vergleichen, die von einem an der Erdoberfläche befindlichen Gegenstand in verschiedenen Entfernungen ausfliefsen. Das Verhältnifs der Klarheit des Gegenstandes in verschiedenen Entfernungen hängt aber, den in §§. 215. 216. entwickelten Grundsätzen zufolge, blofs von der Gröfse $e^{-N\Delta s}$ ab.

Catoptrik.

§. 232.

Es ist schon früher erwähnt worden, dafs da
Licht, welches auf einen dunkeln Körper fällt, sich a
verschiedene Arten vertheilt (§. 206.). Ist die Obe
fläche des Körpers polirt, d. h. so viel als möglich v
Unebenheiten befreit, oder bietet der Körper von Nat
eine ebene Fläche dar, wie dies z. B. bei den trop
baren Flüssigkeiten Statt findet, so wird ein bedeutend
Theil des Lichts nach regelmäfsigen Gesetzen zurüc
geworfen, und mit den Erscheinungen des auf die
Art regelmäfsig zurückgeworfenen Lichts beschäftigt si
die Catoptrik. Oberflächen, welche das Licht reg
mäfsig zurückwerfen, nennt man spiegelnde Obe
flächen oder blofs Spiegel. Die über die Zurüc
werfung des Lichts angestellten Beobachtungen hab
nun gelehrt, dafs immer folgende zwei Gesetze gelte
wie auch die Gestalt des Spiegels beschaffen seyn ma
Fällt ein Lichtstrahl auf einen bestimmten Punkt ein
Oberfläche, und errichtet man in diesem Punkt ei
Normale, das Einfallsloth, so ist der Winkel, w
eben der einfallende Strahl mit der Normale bildet, d
Einfallswinkel, so grofs als der Winkel, welch
der zurückgeworfene Strahl mit der Normale mac
der Zurückwerfungswinkel. Das erste Gese
läfst sich also auch so aussprechen: der Einfallswink

ahls ist dem Zurückwerfungswinkel gleich. Das Gesetz erfordert, dafs der einfallende Strahl, die e und der zurückgeworfene Strahl in einer und en Ebene befindlich seyn müssen.

§. 233.

seyen die Coordinaten des leuchtenden Punktes mit den drei Coordinaten der x, y, z resp. , die Coordinaten des Einfallspunktes auf der den Fläche x, y, z, so werden die Gleichungen fallenden Strahls

$$Y - y = \frac{b - y}{a - x} \cdot (X - x)$$

$$Z - z = \frac{c - z}{a - x} \cdot (X - x).$$

net man ferner die partiellen Differentialcoefficien-

$\left(\frac{z}{x}\right)$, $\left(\frac{dz}{dy}\right)$ durch p, q, so werden die Gleichun-

r Normale

$$Y - y = \frac{q}{p} \cdot (X - x)$$

$$Z - z = -\frac{1}{p} \cdot (X - x).$$

rückgeworfene Strahl geht durch den Einfalls- dessen Coordinaten x, y, z sind; nimmt man selben noch einen zweiten Punkt an, dessen un- e Coordinaten ξ, η, ζ sind, so werden die Glei- n des zurückgeworfenen Strahls

$$Y - y = \frac{\eta - y}{\xi - x} \cdot (X - x)$$

$$Z - z = \frac{\zeta - z}{\xi - x} \cdot (X - x).$$

net man ferner den Einfallswinkel durch α, den werfungswinkel durch G, so hat man nach den

bekannten Regeln der analytischen Geometrie aus de gegebenen Gleichungen der drei Linien

$$\cos\alpha = \frac{p.(a-x) + q.(b-y) - (c-z)}{\sqrt{1+pp+qq}.\sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2+(c-z)}}$$

$$\cos\beta = \frac{p.(\xi-x) + q.(\eta-y) - (\zeta-z)}{\sqrt{1+pp+qq}.\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)}}$$

und da dem ersten Gesetz zufolge die beiden Wink gleich sind, so hat man

$$\frac{p.(a-x) + q.(b-y) - (c-z)}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}.} = \frac{p.(\xi-x) + q.(\eta-y) - (\zeta-z)}{\sqrt{(\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + (\zeta-z)^2}},$$

welches die erste Gleichung zur Bestimmung der u bekannten ξ, η, ζ ist.

§. 234.

Die Gleichung der Ebene, welche durch diese dr Linien geht, läfst sich bekanntlich unter der Form

$$Z = AX + BY + C$$

darstellen, und da in derselben auch der Einfallspunk liegt, dessen Coordinaten x, y, z sind, so hat man auc

$$z = Ax + By + C,$$

oder, wenn man beide Gleichungen von einander abzieh

$$Z - z = A.(X - x) + B.(Y - y).$$

Setzt man hierin nach und nach statt der Verhältniss $\frac{Z-z}{X-x}$, $\frac{Y-y}{X-x}$ ihre Werthe aus den Gleichunge der drei Linien, so erhält man

$$\begin{aligned}(c - z) &= A.(a - x) + B.(b - y)\\ -\ 1 &= Ap + Bq\\ (\zeta - z) &= A.(\xi - x) + B.(\eta - y).\end{aligned}$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen A und B so bleibt

$$\begin{aligned}&[(c - z).p + (a - x)].(\eta - y)\\ &+ [(a - x).q - (b - y).p].(\zeta - z)\\ &- [(c - z).q + (b - y)].(\xi - x) = 0\end{aligned}$$

elches die zweite Gleichung zur Bestimmung von
, η, ζ ist, und durch welche die Bedingung ausge-
rückt ist, dafs der einfallende Strahl, die Normale
nd der zurückgeworfene Strahl in einerlei Ebene liegen.

§. 235.

Eine dritte Bedingungsgleichung läfst sich aus der
ufgabe selbst nicht weiter ableiten, wie schon in der
atur der Sache liegt, indem der Punkt, dessen Coor-
naten ξ, η, ζ seyn sollen, beliebig in der Linie, die
n ausfahrenden Strahl bildet, gewählt werden kann,
d daher die absoluten Werthe von ξ, η, ζ unbestimmt
eiben; es ist daher hinreichend, nur die Verhältnisse

$$\frac{\zeta - z}{\xi - x}, \quad \frac{\eta - y}{\xi - x}$$

funden zu haben. Setzt man daher

$$\frac{\zeta - z}{\xi - x} = \zeta', \quad \frac{\eta - y}{\xi - x} = \eta'$$

$$\frac{c - z}{a - x} = c', \quad \frac{b - y}{a - x} = b',$$

lassen sich die beiden entwickelten Gleichungen so
hreiben:

$$\frac{p + qb' - c'}{\sqrt{1 + b'b' + c'c'}} = \frac{p + q\eta' - \zeta'}{\sqrt{1 + \eta'\eta' + \zeta'\zeta'}}$$

$$(c'p + 1).\eta' + (q - b'p).\zeta' = c'q + b',$$

s welchen Gleichungen sich η', ζ' bestimmen lassen.

§. 236.

Setzt man der Kürze wegen

$$(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2 = rr$$

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2 = r'r',$$

ist der Weg eines Lichttheilchens, welches durch
rückwerfung von einem Punkte, dessen Coordinaten
, b, c sind, bis zu einem andern Punkt geht, dessen
oordinaten durch ξ, η, ζ ausgedrückt werden,

$$s = r + r'.$$

Hieraus ergiebt sich

$$-ds = \frac{\xi - x}{r'} \cdot dx + \frac{\eta - y}{r'} \cdot dy + \frac{\zeta - z}{r'} \cdot dz$$
$$+ \frac{a - x}{r} \cdot dx + \frac{b - y}{r} \cdot dy + \frac{c - z}{r} \cdot dz.$$

Um nun die Werthe von x, y, z zu bestimmen, welche $ds = o$ geben, mufs man bedenken, dafs der Punkt, dessen Coordinaten x, y, z sind, auf einer Oberfläche liegt, deren Gleichung durch das Differential

$$dz = pdx + qdy$$

ausgedrückt wird. Man mufs also diesen Werth von dz in die vorige Gleichung substituiren, und dann den Coefficienten von dx sowohl, als den von dy Null setzen. Hierdurch ergeben sich folgende zwei Gleichungen

$$\frac{(\xi - x) + p.(\zeta - z)}{r'} + \frac{(a - x) + p.(c - z)}{r} = o$$
$$\frac{(\eta - y) + q.(\zeta - z)}{r'} + \frac{(b - y) + q.(c - z)}{r} = o,$$

oder, wenn wir die vorhin angenommenen Werthe b', c', η', ζ' substituiren,

$$\frac{1 + p\zeta'}{\sqrt{1 + \eta'\eta' + \zeta'\zeta'}} = -\frac{1 + pc'}{\sqrt{1 + b'b' + c'c'}}$$
$$\frac{\eta' + q\zeta'}{\sqrt{1 + \eta'\eta' + \zeta'\zeta'}} = -\frac{b' + qc'}{\sqrt{1 + b'b' + c'c'}}.$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man zuerst

$$(1 + p\zeta').(b' + qc') = (1 + c'p).(\eta' + q\zeta'),$$

oder, wenn man die Producte entwickelt, und die sich aufhebenden Glieder wegläfst,

$$(c'p + 1).\eta' + (q - b'p).\zeta' = c'q + b',$$

welche dieselbe Gleichung ist, die im vorigen §. entwickelt wurde.

§. 237.

Setzt man der Kürze wegen

$$\sqrt{1 + \eta'\eta' + \zeta'\zeta'} = R$$
$$\sqrt{1 + b'b' + c'c'} = A,$$

so gehen die beiden obern Gleichungen über in:

$$p = -\frac{A + R}{A\zeta' + Rc'}$$

$$q = -\frac{A\eta' + Rb'}{A\zeta' + Rc'},$$

und hieraus erhält man sogleich

$$\frac{p + qb' - c'}{A} = -\frac{(1 + b'\eta' + c'\zeta') + RA}{A\zeta' + Rc'}.$$

Der hinter dem Gleichheitszeichen stehende Ausdruck läßt sich auch so schreiben:

$$\frac{1}{R}\cdot\frac{R}{A\zeta' + Rc'} + \frac{\eta'}{R}\cdot\frac{b'R}{A\zeta' + Rc'} + \frac{RA + c'\zeta'}{A\zeta' + Rc'}.$$

Nun ist aber aus den Gleichungen für p und q

$$\frac{R}{A\zeta' + Rc'} = -p - \frac{A}{A\zeta' + Rc'}$$

$$\frac{b'R}{A\zeta' + Rc'} = -q - \frac{A\eta'}{A\zeta' + Rc'},$$

folglich erhält man durch Substitution dieser Werthe jenen Ausdruck

$$= -\frac{p}{R} - \frac{A}{R.(A\zeta' + Rc')} - \frac{q\eta'}{R} - \frac{A\eta'\eta'}{R.(A\zeta' + Rc')} + \frac{RA + c'\zeta'}{A\zeta' + Rc'}$$

$$= -\frac{p + q\eta'}{R} - \frac{A}{R}\cdot\frac{1 + \eta'\eta' - RR}{A\zeta' + Rc'} + \frac{c'\zeta'}{A\zeta' + Rc'}.$$

Es ist ferner $1 + \eta'\eta' - RR = -\zeta\zeta$, also wird vorige Gröfse auch

$$= -\frac{p + q\eta'}{R} + \frac{A\zeta'\zeta' + Rc'\zeta'}{R.(A\zeta' + Rc')}$$

$$= -\frac{p + q\eta' - \zeta'}{R}.$$

Man hat daher

$$\frac{p + qb' - c'}{A} = \frac{p + q\eta' - \zeta'}{R},$$

welche Gleichung ebenfalls im §. 235. entwickelt worden ist.

t, und daſs auch der ganze Weg der Kugel in
i Ebene liegt. Allein betrachtet man die Sache
er, so sieht man, daſs diese Erklärungsweise wohl
ann als genügend angenommen werden könnte,
die Oberflächen der Körper Flächen von regel-
er Krümmung wären. Nun ist aber bekannt, daſs
die beste Politur nur die merklichen Rauhigkeiten
nebenheiten an der Oberfläche der Körper weg-
men werden, allein keinesweges eine regelmäſsige
hervorgebracht wird, so daſs die spiegelnden
n für die so kleinen Lichttheilchen immer noch
röſsten Unebenheiten darbieten, in welchem Fall,
an leicht begreift, der bei weitem gröſste Theil
infallenden Lichts unregelmäſsig zerstreut wer-
und das regelmäſsig zurückgeworfene Licht so
eutend seyn würde, daſs man es kaum bemerkte.
widerspricht aber der Erfahrung, denn wir sehen,
Oberflächen, die nur einigermaſsen polirt sind,
einen bedeutenden Theil des einfallenden Lichts
regelmäſsigen Gesetzen zurückwerfen, und daher
iegel dienen können.

§. 240.

ach Newton's Ansichten wird die Zurückwerfung
eine abstoſsende Kraft hervorgebracht, welche
örpertheilchen auf das Licht ausüben, und daher
gen die Lichttheilchen gar nicht bis zur Ober-
der spiegelnden Körper selbst, sondern wenden
chon vorher in einer krummlinigen Bahn von dem
r ab, wodurch also die geringern Unebenheiten
piegelnden Fläche weniger Einfluſs haben. Man
freilich hierbei voraussetzen, daſs die abstoſsende
ein solches Gesetz befolgt, vermöge dessen die
ng derselben in jeder merklichen Entfernung von
berfläche unmerklich ist, weil sonst die Bahn des
nicht als aus graden Linien bestehend erschei-
önnte. Wie nun auch die Kraft, welche die Licht-

theilchen abstöfst, beschaffen seyn mag, so mufs
doch immer annehmen, sie sey eine Function des
standes des Lichttheilchens von der spiegelnden Flä
und senkrecht gegen dieselbe gerichtet. Nimmt
nun der Kürze wegen an, die spiegelnde Fläche
eine horizontale Ebene, und zerlegt die Geschwindig
des Lichts in zwei andere, eine horizontale, par
mit dem Spiegel, und eine verticale, senkrecht ge
den Spiegel, so sieht man ohne weitere Rechnung
gleich ein, dafs die horizontale Geschwindigkeit,
deren Richtung keine Kraft wirkt, immer densel
Werth behalten mufs, während die verticale durch
entgegenwirkende abstofsende Kraft immer mehr
ringert wird, bis sie den Werth Null erreicht. Da
Kraft immer zu wirken fortfährt, so wird das Li
theilchen nach und nach in entgegengesetzter Richt
seine frühere Geschwindigkeit wieder erlangen, und
die Kraft blofs eine Function der Entfernung ist,
sieht man ein, dafs in gleichen Entfernungen von
Spiegel auch die senkrechte Geschwindigkeit, sow
beim Einfallen der Lichttheilchen, als beim Zurückge
einerlei Werth, nur im entgegengesetzten Sinne,
Indem ferner die horizontale Geschwindigkeit gl
grofs blieb, so wird auch die Geschwindigkeit des Li
theilchens in seiner Bahn in gleichen Entfernungen
Spiegel, sowohl im einfallenden als im zurückgeworfe
Strahl, gleich grofs seyn, und die Richtung der
wegung vor und nach dem Einfall gleiche Winkel
der Ebene des Spiegels, oder dem im Einfallspu
errichteten Perpendikel bilden. Unter Einfallspunkt
man hier denjenigen Punkt der Bahn verstehen, in welc
das Lichttheilchen dem Spiegel am nächsten ist, wo
seine verticale Geschwindigkeit Null wird, und es
während eines Augenblicks parallel mit dem Spiegel bew

§. 241.

Nach der Vibrationstheorie würden sich die an
gebenen Gesetze der Reflexion des Lichts folgend

ıfsen erklären lassen. Es sey in L (Fig. 33.) ein ıchtender Punkt, so setzt dieser den Aether nach der Richtung hin in Vibrationen, die sich also kugelrmig auf den Radien LM, LN fort verbreiten. Nun y $LM = r$, die Zeit, welche das Licht gebraucht, n diesen Raum zu durchlaufen, $= t$, die Geschwingkeit des Lichts $= c$, so hat man $t = \frac{r}{c}$; ferner ey LN dem ersten Radius LM unendlich nahe, und $= r + dr$, so ist die Zeit $t + dt$, nach welcher ieser Lichtstrahl an der Oberfläche des Spiegels auffifft, $= \frac{r + dr}{c}$. Die Punkte M, N lassen sich nun iederum als gleichsam leuchtende Punkte betrachten, on denen aus nach allen Seiten Vibrationen ausgehen, nd hierdurch die in der Undulationstheorie sogenannten ecundären Wellen bilden. Zur Zeit t' wird nun die reisförmige Welle von M um eine Entfernung fortgechritten seyn, die man findet, indem die Zeit $t' - t$ it der Geschwindigkeit c des Lichts multiplicirt, d. h. er Halbmesser der kreisförmigen Welle ist,

$$= (t' - t).c = t'c - r,$$

ıdem wir annehmen müssen, dafs das zurückgeworfene ıcht sich mit derselben Geschwindigkeit bewegt, als as einfallende, da die Fortpflanzung in Aether von leicher Dichtigkeit geschieht. Setzen wir nun $BM = \alpha$, nd betrachten BA als die Abscissenlinie, indem in B er Anfangspunkt der Abscissen angenommen wird, so at man die Gleichung der kreisförmigen Welle, die ur Zeit t' Statt findet:

$$yy + (x - \alpha)^2 = (t'c - r)^2.$$

Eben so geht aus dem Punkte N eine kreisförmige Welle aus, die aber zu der Zeit t' noch keinen so grofsen Abstand von N haben wird, als die aus M ausgehende, weil der Punkt N um die Zeit $dt = \frac{dr}{c}$ später in Vibration gesetzt wurde, und man findet leicht,

dafs zur Zeit t' der Halbmesser der von N ausgehenden Welle

$$= (t' - t - dt).c = t'c - r - dr$$

seyn wird. Die Gleichung dieses Kreises ist also, wenn wir $NM = d\alpha$ setzen:

$$yy + (x - \alpha - d\alpha)^2 = (t'c - r - dr)^2,$$

oder wenn man entwickelt und die Potenzen von $d\alpha$ und dr, den Regeln der Differenzialrechnung zufolge, vernachlässigt:

$$yy + (x-\alpha)^2 - 2.(x-\alpha).d\alpha = (t'c-r)^2 - 2.(t'c-r).dr.$$

Beschreibt man aus L mit dem Halbmesser LM den unendlich kleinen Kreisbogen PM, so ist $NP = dr$, und setzt man den Winkel $LNB = \varepsilon$, so hat man in dem bei P rechtwinkligen Dreieck PNM, $NP = NM.\cos\varepsilon$, oder $dr = d\alpha.\cos\varepsilon$, folglich läfst sich vorige Gleichung auch so schreiben:

$$yy + (x-\alpha)^2 - 2.(x-\alpha).d\alpha = (t'c-r)^2 - 2.(t'c-r).d\alpha.\cos\varepsilon,$$

wo ε das Complement des Einfallswinkels ist.

§. 242.

Wir sehen hieraus, dafs der leuchtende Punkt L bei der Reflexion der aus ihm hervorgehenden Lichtwelle, eine unendliche Menge secundärer Wellen hervorbringt, deren Vibrationen sich aber meistentheils unter einander stören, und blofs diejenigen Vibrationen werden zu dem regelmäfsig reflectirten Licht gehören, die bei zwei auf einander folgenden secundären Wellen mit einander parallel fortgehen. Dies kann nun an keiner andern Stelle geschehen, als da, wo sich die beiden auf einander folgenden unendlich nahen secundären Wellen durchschneiden. Wir müssen also aus den beiden Gleichungen

$$yy + (x - \alpha)^2 = (t'c - r)^2$$

$$yy + (x-\alpha)^2 = (t'c-r)^2 + 2d\alpha.(x-a) - 2d\alpha.(t'c-r).\cos\varepsilon$$

die Coordinaten x, y des Durchschnittspunktes bestimmen. Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, so bleibt

$$2d\alpha.(x-\alpha) = 2d\alpha.(t'c-r).\cos\varepsilon$$
$$x-\alpha = \cos\varepsilon.(t'c-r).$$

stituirt man diesen Werth in die erste Gleichung, so ält man

$$y = (t'c-r).\sin\varepsilon.$$

n sey G dieser Durchschnittspunkt, so hat man

$$MQ = x-\alpha, \quad GQ = y,$$

$$\text{tang } GMQ = \frac{GQ}{QM} = \frac{y}{x-\alpha} = \text{tang } \varepsilon.$$

Winkel GMQ wird also = dem Winkel LMB, d. h. Einfallswinkel gleich dem Zurückwerfungswinkel.

§. 243.

Aus dem Gesagten folgt also, dafs die Zurückwer- g des Lichts, welche nach regelmäfsigen Gesetzen chieht, durch jede der drei Hypothesen genügend lärt wird, indem sich aus denselben die vermittelst Beobachtung gefundenen Erscheinungen, welche 32. dargestellt wurden, erklären lassen. Nur bei der anationstheorie entsteht noch die Frage, wie es mt, dafs bei der Wirkung einer abstofsenden Kraft das einfallende Licht nicht alles Licht zurückgeworfen d. Hierbei mufs man sich mit der von Newton ebenen Erklärung begnügen, nach welcher die Licht- lchen an ihren verschiedenen Seiten auch verschiedene ationen zu den Körpern besitzen, und nicht alle ttheilchen sich grade in der Stellung befinden, wel- nöthig ist, damit die abstofsende Kraft des Körpers verticale Geschwindigkeit des Lichttheilchens bis auf l herabbringen könne. Aufserdem werden wir sehen, den Körpern aufser den abstofsenden Kräften auch iehende zugeschrieben werden müssen.

§. 244.

Wir betrachten zuerst den einfachsten Fall der ückwerfung des Lichts, nämlich den, wo die zurück- fende Fläche eine Ebene bildet, also ein ebener egel angenommen wird. Es sey L (Fig. 33.) der

[illegible] Punkt. AB der Durchschnitt des Sp[illegible] [illegible] indem eine Ebene durch den [illegible] Punkt senkrecht auf den Spiegel gelegt [illegible] zugleich die Einfallsebene und die Zurü[illegible] [illegible] stellt, da in ihr der einfallende [illegible] Strahl und das Einfallsloth [illegible]. Von dem leuchtenden Punkt gehen die St[illegible] LM, LN aus, die eine willkürliche Lage haben [illegible] mit einander nicht unendlich nahe zu seyn [illegible]. Die Strahlen LM, LN werden nach den [illegible] MH, NH zurückgeworfen, und einem i[illegible] [illegible] CH befindlichen Auge werden diese St[illegible] [illegible] Punkten herzukommen scheinen, die auf den g[illegible] [illegible] liegen, durch welche diese Strahlen vorgestell[illegible]. Man verlängere diese Strahlen, bis sie sich hinte[illegible] [illegible] in R durchschneiden, so wird R ein Bild des [illegible] L darstellen, indem man in der Catoptrik sowol [illegible] Dioptrik, unter dem Bild eines Punktes de[illegible] [illegible] Punkt versteht, in welchem sich zwei oder me[illegible] [illegible] ausfahrenden Punkt ausgegangene und dann [illegible] Zurückwerfung oder Brechung zusammengebrachte S[illegible] [illegible] durchschneiden. Da nun dem catoptrischen G[illegible] [illegible] $LMB = GMQ$, $LNB = HNQ$, so [illegible] auch die Dreiecke NLM, NRM sich decken [illegible] [illegible], wenn wir von L ein Perpendikel LT [illegible] [illegible], denselben verlängert durch R gehen, [illegible] $LT = RT$ seyn. Da nun dieser Satz [illegible] auf die einfallenden Strahlen gezogen seyn m[illegible] [illegible] wir hieraus schliefsen, dafs alle auf [illegible] Spiegel fallende Strahlen so zurückgew[illegible] [illegible], wenn man sie rückwärts verlängert [illegible] in und denselben Punkte durchschne[illegible] [illegible] hinter dem Spiegel liegt, als der leucht[illegible] [illegible] denselben sich befindet, und zwar wird [illegible] Vereinigungspunkt und den leuchtenden P[illegible] [illegible] senkrecht auf der Ebene des Spi[illegible]

§. 245.

Um zu zeigen, wie man dasselbe Resultat aus den ier entwickelten allgemeinen Formeln ableiten könne, men wir die Ebene des Spiegels selbst für die Ebene x, y an, so wird die Gleichung der spiegelnden erfläche $z = o$, folglich

$$\left(\frac{dz}{dx}\right) = p = o, \quad \left(\frac{dz}{dy}\right) = q = o.$$

stituirt man diese Werthe in die Gleichungen (§. 235.)

$$\frac{p + qb' - c'}{\sqrt{1 + b'b' + c'c'}} = \frac{p + q\eta' - \zeta'}{\sqrt{1 + \eta'\eta' + \zeta'\zeta'}}$$

$$(c'p + 1).\eta' + (q - b'p).\zeta' = c'q + b',$$

erhält man ganz einfach

$$= b', \quad c'.\sqrt{1 + \eta'\eta' - \zeta'\zeta'} = \zeta'.\sqrt{1 + b'b' + c'c'},$$

l aus der letzten Gleichung ergiebt sich $c' = -\zeta'$.

n waren die Gleichungen des zurückgeworfenen Strahls 233.)

$$Y - y = \frac{\eta - y}{\xi - x}.(X - x)$$

$$Z - z = \frac{\zeta - z}{\xi - x}.(X - x),$$

r, da $\frac{\eta - y}{\xi - x} = \eta'$, $\frac{\zeta - z}{\xi - x} = \zeta'$ gesetzt wurde, l $\eta' = b'$, $\zeta' = -c'$ gefunden ist, und aufserdem h (§. 235.)

$$b' = \frac{b - y}{a - x}, \quad c' = \frac{c - z}{a - x},$$

angenommenen Bezeichnungen zufolge, war, so den die Gleichungen eines von einem ebenen Spiegel ückgeworfenen Strahls

$$Y - y = \frac{b - y}{a - x}.(X - x)$$

$$Z = -\frac{c}{a - x}.(X - x),$$

em man bedenkt, dafs $z = o$ ist. Setzt man in sen Gleichungen $x + dx$ statt x, und $y + dy$ statt

leuchtende [illegible] eines andern zuri
welcher e[illegible] [illegible] Punkte reffe
tenden P[illegible] [illegible] $+ dy$ sind, w
die also [illegible] auf einen Einf
fungsebe[illegible] durch x, y bezeich
der zuri[illegible] [illegible] Paare von Gleich
müssen. [illegible] gen, aus denen
LM, I [illegible] Strahlen, vermöge sei
nen, u[illegible] [illegible] werden kann. M
chen. [illegible] die vierte Gleichung zuglei
tungen [illegible] enthält, d. h. in welch
Gegen[illegible] [illegible] des Spiegels fortschreit
von P[illegible] [illegible] Strahlen wirklich ein
Linien [illegible] Man wird also zuerst d
den.
Spie[illegible] [illegible] der vier Gleichungen for
tes [illegible] [illegible] übrig bleiben, die z
in [illegible] [illegible] X, Y, Z hinreichen
ge[illegible] [illegible] einzusehen, dass, anstat
vo[illegible] [illegible] $- dx$ und $y + dy$ z
Z[illegible] [illegible] beiden vorigen Gleichunge
le[illegible] [illegible] x und y als veränder
z[illegible] [illegible] Man erhält dann

$$[illegible] - \frac{b-y}{a-x} \cdot dx$$

[illegible]

[illegible] die andere wird
[illegible] Richtung von einem
[illegible] eines ebenen
[illegible] Strahlen wer-
[illegible] Setzt man ferner
[illegible] ursprünglichen Glei-
[illegible] Da nun a,
[illegible] Strahls waren, so
[illegible] Strahlen einen einzigen
[illegible] dass dieser Durchschnitts-

unkt, oder das Bild des leuchtenden Punkts, so weit inter dem Spiegel liegt, als der leuchtende Punkt vor em Spiegel, und zwar in der Verlängerung eines auf ie Fläche des Spiegels vom leuchtenden Punkt gefällten erpendikels.

§. 246.

Da wir bei dem ebenen Spiegel die merkwürdige igenschaft gefunden haben, dafs die aus einem leuchnden Punkt ausfliefsenden Strahlen, welche den Spiegel effen, von diesem so zurückgeworfen werden, dafs sie le aus einem Punkt zu kommen scheinen, so ist es er Mühe werth, zu untersuchen, ob noch andere lächen diese Eigenschaft besitzen, und von welcher atur sie sind. Der Kürze wegen betrachten wir blofs olche Oberflächen, die durch Umdrehung entstanden nd, und hierbei ist es dann nur nöthig, einen Schnitt er krummen Oberfläche zu nehmen, der durch den urchschnitt mit einer Ebene entsteht, die durch den uchtenden Punkt und die Umdrehungsaxe des Körpers eht. Diese Ebene betrachten wir als die Ebene der , y, so dafs also z, c, ζ Null werden, also auch die röfsen c', ζ' verschwinden (§. 234.). Nimmt man die leichung

$$\frac{p + qb' - c'}{\sqrt{1 + b'b' + c'c'}} = \frac{p + q\eta' - \zeta'}{\sqrt{1 + \eta'\eta' + \zeta'\zeta'}},$$

o giebt dieselbe im vorliegenden Fall

$$\frac{1 + \frac{q}{p} \cdot b'}{\sqrt{1 + b'b'}} = \frac{1 + \frac{q}{p} \cdot \eta'}{\sqrt{1 + \eta'\eta'}}.$$

Nun war die Gleichung der krummen Oberfläche im llgemeinen $dz = pdx + qdy$, also wenn man $dz = o$ etzt, so wird

$$o = pdx + qdy, \quad \frac{q}{p} = -\frac{dx}{dy},$$

nd indem wir das Differentialverhältnifs $\frac{dy}{dx}$ durch t

bezeichnen, so wird $p = -qt$, folglich geht vorige Gleichung in diese über

$$\frac{t - b'}{\sqrt{1 + b'b'}} = \frac{t - \eta'}{\sqrt{1 + \eta'\eta'}}.$$

Hieraus ergiebt sich, wenn man quadrirt

$$\eta'\eta' . (tt - 2b't) - (2tb' - b'b') = b'b' . (tt - 2t\eta') - (2t\eta' - \eta'\eta'),$$

welches sich auch so schreiben läfst:

$$(\eta'\eta' - b'b') . (tt - 1) + 2t . (\eta' - b') - 2tb'\eta' . (\eta' - b') = 0,$$

und man sieht leicht, dafs diese Gleichung durch $\eta' - b'$ theilbar ist. Führt man die Division wirklich aus, so kommt

$$(\eta' + b') . (tt - 1) + 2t - 2tb'\eta' = 0$$

$$\eta' = \frac{(1 - tt) . b' - 2t}{(tt - 1) - 2tb'}.$$

§. 247.

Nach §. 233. sind die Gleichungen des zurückgeworfenen Strahls

$$Y - y = \frac{\eta - y}{\xi - x} \cdot (X - x)$$

$$Z - z = \frac{\zeta - z}{\xi - x} \cdot (X - x),$$

und da die Coordinaten parallel mit der Axe der z Null sind, so bleibt blofs

$$Y - y = \eta' . (X - x),$$

wenn wir bemerken, dafs $\frac{\eta - y}{\xi - x} = \eta'$ gesetzt wurde.

Da wir den Anfangspunkt der Coordinaten willkürlich wählen können, so können wir ihn in den Punkt verlegen, wo sich alle reflectirte Strahlen durchschneiden; dann müssen wir in vorige Gleichung $Y = o$, $X = o$ setzen, so dafs

$$\eta' . x = y$$

bleibt. In dem Ausdrucke von η', der im vorigen § entwickelt wurde, kommt die Gröfse b' vor; diese ist nach unsern frühern Bezeichnungen §. 235. nichts anders

als der Quotient $\frac{b-y}{a-x}$, wo a und b die Coordinaten des leuchtenden Punktes parallel mit den Axen der x und y sind. Da ferner die Lage der Abscissenlinie auch noch unserer Willkür überlassen ist, so dürfen wir dieselbe durch den leuchtenden Punkt legen; dies giebt $b = o$, und es bleibt $b' = -\frac{y}{a-x}$. Substituirt man diesen Werth in vorigen Ausdruck von η', so kommt

$$\eta' = \frac{(tt-1).y - 2t.(a-x)}{(tt-1).(a-x) + 2ty},$$

und da aufserdem $\eta' = \frac{y}{x}$, so erhält man die Gleichung für die Curve, welche alles Licht, das aus einem Punkt ausgeht, wieder in einen vereinigt,

$$(tt-1).xy - 2tx.(a-x) = (tt-1).(a-x).y + 2tyy.$$

Löst man diese quadratische Gleichung nach t auf, so kommt

$$ty.(a-2x) + yy + ax - xx = \pm\sqrt{xx+yy}.\sqrt{xx+yy+a.(a-2x)}.$$

Um diese Gleichung zu integriren, setze man zuerst

$$yy = rr - xx,$$

wo r den aus dem Sammlungspunkt der zurückgeworfenen Strahlen nach irgend einem Punkt der Curve gezogenen Radius vector bedeutet. Differentürt man, so kommt

$$r\cdot\frac{dr}{dx} - x = y\cdot\frac{dy}{dx} = ty,$$

da wir $\frac{dy}{dx}$ durch t bezeichnet haben. Setzt man diesen Werth von ty und von yy in vorige Gleichung, so erhält man, da aufserdem die ganze Gleichung durch r theilbar wird, den Ausdruck:

$$\frac{dr}{dx}\cdot(a-2x) + r = \pm\sqrt{rr + a.(a-2x)}.$$

Man setze ferner

$$r = u.\sqrt{a - 2x},$$

so erhält man nach den gehörigen Reductionen

$$\frac{du}{\sqrt{a + uu}} = \pm \frac{dx}{a - 2x},$$

und hiervon läfst sich das Integral nach den bekannten Regeln vermittelst der Logarithmen finden. Es ergiebt sich

$$\log\left[\frac{u}{\sqrt{a}} + \sqrt{\frac{uu}{a} + 1}\right]$$
$$= \mp \log\sqrt{a - 2x} + \text{Const},$$

und wenn man den Werth von u durch r und x ausgedrückt wieder restituirt

$$\log\frac{r + \sqrt{rr + aa - 2ax}}{\sqrt{aa - 2ax}}$$
$$= \mp \log\sqrt{a - 2x} + \text{Const.}$$

Um die Constante zu bestimmen, sey für $x = o$, $r = k$, so kommt

$$\log\frac{k + \sqrt{kk + aa}}{a} = \mp \log\sqrt{a} + \text{Const},$$

folglich, wenn man die Constante aus beiden Gleichungen eliminirt

$$\log\frac{r + \sqrt{rr + aa - 2ax}}{k + \sqrt{kk + aa}} \cdot \frac{a}{\sqrt{aa - 2ax}}$$
$$= \mp \log.\sqrt{\frac{a - 2x}{a}}.$$

Nimmt man das obere Zeichen, so wird, indem man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht, und der Kürze wegen $k + \sqrt{kk + aa} = 6$ setzt,

$$r + \sqrt{rr + aa - 2ax} = 6.$$

Setzt man r auf die andere Seite und quadrirt, so kommt

$$r - \frac{a}{6} \cdot x = \frac{66 - aa}{26}.$$

Dies ist bekanntlich die Gleichung eines Kegelschnitts, in welcher r den aus dem Brennpunkt gezogenen Radius vector bedeutet, und die Abscissen x von demselben Brennpunkte ab auf der Axe gezählt werden. Errichtet man im Brennpunkte eine Ordinate und nennt ihre Länge p, so ist p der halbe Parameter, und da man die gleichzeitigen Werthe $r = p$, $x = o$ hat, so erhält man

$$p = \frac{66 - aa}{26}.$$

Man findet leicht, indem der oben angegebene Werth von 6 substituirt wird, dafs $p = k$ ist. Bezeichnet man die Eccentricität durch $2e$, so sieht man leicht, dafs der Radius vector, welcher nach einem senkrecht über dem andern Brennpunkt liegenden Punkt gezogen ist, $= \sqrt{kk + 4ee}$ wird. Man hat also die gleichzeitigen Werthe

$$x = 2e, \quad r = \sqrt{kk + 4ee}.$$

Substituirt man diese Werthe in die Gleichung

$$r = \frac{a}{6} \cdot x + \frac{66 - aa}{26},$$

und bemerkt, dafs $66 - aa = 26k$ ist, so kommt

$$\sqrt{kk + 4ee} = 2 \cdot \frac{a}{6} \cdot e + k.$$

Quadrirt man, läfst die sich aufhebenden Glieder weg, und dividirt die ganze Gleichung durch $4e$, so erhält man

$$e = \frac{aa}{66} \cdot e + \frac{a}{6} \cdot k$$

$$e = \frac{a6k}{66 - aa} = \frac{a6k}{26k} = \tfrac{1}{2} \cdot a.$$

Die Gröfse a ist also nichts anders, als die doppelte Eccentricität, und hieraus sieht man, dafs, wenn die Strahlen aus dem einen Brennpunkt des Kegelschnittes ausgehen, sie zurückgeworfen sich im andern Brennpunkt vereinigen.

§. 248.

Nimmt man in der Gleichung

$$\log \frac{r + \sqrt{rr + aa - 2ax}}{k + \sqrt{kk + aa}} \cdot \frac{a}{\sqrt{aa - 2ax}} = \mp \log \sqrt{\frac{a - 2x}{a}}$$

das untere Vorzeichen, so erhält man

$$ar + a.\sqrt{rr + aa - 2ax} = 6.(a - 2x),$$

und nach den gehörigen Reductionen kommt

$$r + \frac{6}{a} \cdot x = \frac{66 - aa}{26}.$$

Diese Gleichung gilt ebenfalls für einen Kegelschnitt, und zwar für die Hyperbel, wenn erstere Gleichung für die Ellipse gilt, wobei man jedoch beobachten muſs, daſs die positiven Abscissen x immer von dem einen Brennpunkt nach dem andern hin gezählt werden müssen. Setzt man in der Gleichung

$$r - \frac{a}{6} \cdot x = \frac{66 - aa}{26}$$

a unendlich groſs, so ist das Verhältniſs $\frac{a}{6} = 1$, und da $\frac{66 - aa}{26} = p$, so bleibt

$$r - x = p$$

die Gleichung einer Parabel. Nimmt man $a = o$, d. h. sollen die zurückgeworfenen Strahlen sich in demselben Punkte vereinigen, aus welchem sie ausgingen, so wird $r = \frac{1}{2} \cdot 6 = k$, also die Curve ein Kreis, in dessen Mittelpunkt der leuchtende Punkt und der Sammlungspunkt der reflectirten Strahlen sich zugleich befinden.

§. 249.

Wir sehen aus dieser allgemeinen Auflösung, daſs die Kegelschnitte allein Flächen von der Beschaffenheit darbieten, daſs die von ihnen zurückgeworfenen Strahlen auch wieder genau in einen Punkt vereinigt werden,

und zwar findet dieses nur Statt, wenn der leuchtende Punkt und der Sammlungspunkt sich in den Brennpunkten des Kegelschnitts befinden. Ist die zurückwerfende Curve von anderer Beschaffenheit, so bilden die Durchschnitte der auf einander folgenden zurückgeworfenen Strahlen eine krumme Linie, die sogenannte, durch Zurückwerfung entstandene Brennlinie (Catacaustica). Diese läfst sich in jedem besondern Fall leicht finden, sobald die Natur der zurückwerfenden Curve bekannt ist. Die Gleichung des zurückgeworfenen Strahls ist nämlich, insofern wir blofs die Strahlen betrachten, die in der Ebene der Curve liegen (§. 247.),

$$Y - y = \eta' . (X - x),$$

und der Werth von η' fand sich (§. 246.)

$$\eta' = \frac{(1 - tt) . b' - 2t}{(tt - 1) - 2tb'},$$

wo $t = \frac{dy}{dx}$, $b' = \frac{b - y}{a - x}$, x und y die Coordinaten der zurückwerfenden Curve, und a, b die Coordinaten des leuchtenden Punkts, auf dieselben Axen bezogen, bedeuten. Setzt man nun in der Gleichung

$$Y - y = \eta' . (X - x)$$

$y + dy$ statt y, $x + dx$ statt x, so erhält man eine neue Gleichung

$$Y - y - dy = (\eta' + d\eta') . (X - x - dx),$$

welche für den Strahl gilt, der auf einen Punkt fällt, dessen Coordinaten $x + dx$, $y + dy$ sind. Da nun die Natur der krummen Linie, welche das Licht zurückwirft, als bekannt angenommen wird, so hat man y als Function von x; es lassen sich also auch die Gröfsen $\frac{dy}{dx}$ oder t und η' durch x ausdrücken, so dafs in den beiden Gleichungen

$$Y - y = \eta' . (X - x)$$
$$Y - y - dy = (\eta' + d\eta') . (X - x - dx),$$

die sich auch so schreiben lassen:

$$Y - y = \eta' . (X - x)$$
$$- dy = d\eta' . (X - x) - \eta' dx,$$

aufser X, Y nur noch x vorkommt; eliminirt man dann aus beiden Gleichungen die Gröfse x, so bleibt eine Gleichung zwischen X und Y, welche die gesuchte Gleichung der Brennlinie ist.

§. 250.

Man findet aus den beiden vorigen Gleichungen

$$Y - y = \eta' . (X - x)$$
$$- dy = d\eta' . (X - x) - \eta' dx$$

die Werthe von $X - x$, $Y - y$

$$X - x = \frac{\eta' - t}{\frac{d\eta'}{dx}}$$

$$Y - y = \frac{\eta' - t}{\frac{d\eta'}{dx}} \cdot \eta',$$

Differentiirt man die Gleichung

$$\eta' = \frac{(1 - tt) . b' - 2t}{(tt - 1) - 2tb'},$$

und setzt der Kürze wegen $dt = \nu dx$, so dafs also t und ν die ersten und zweiten Differentialcoefficienten von y darstellen, so erhält man nach den gehörigen Reductionen

$$\frac{d\eta''}{dx} = \frac{2\nu \cdot (1 + b'b') - \frac{db'}{dx} \cdot (1 + tt)}{[(tt - 1) - 2tb']^2} \cdot (1 + tt).$$

Eben so ergiebt sich auch

$$\eta' - t = \frac{(b' - t) . (1 + tt)}{(tt - 1) - 2tb'},$$

folglich hieraus

$$X - x = \frac{(b' - t) \cdot [(tt - 1) - 2tb']}{2\nu \cdot (1 + b'b') - \frac{db'}{dx} \cdot (1 + tt)}$$

$$Y - y = \frac{(b' - t) \cdot [(1 - tt) \cdot b' - 2t]}{2p \cdot (1 + b'b') - \frac{db'}{dx} \cdot (1 + tt)}.$$

Liegt der leuchtende Punkt in unendlicher Entfernung auf der Abscissenlinie, so ist $b' = o$, $\frac{db'}{dx} = o$, und in diesem Fall bleibt

$$X - x = - \frac{t \cdot (tt - 1)}{2p}$$

$$Y - y = + \frac{tt}{p}.$$

Die Untersuchungen über die Brennlinien sind im Allgemeinen sehr verwickelt, und es würde überflüssig scheinen, besondre Curven in dieser Rücksicht zu untersuchen, da die Gleichungen der Brennlinien in ihrer ganzen Ausdehnung in der Praxis nicht gebraucht werden, und theoretisch betrachtet ihre Untersuchung mehr in die Geometrie als in die Optik gehört.

§. 251.

Wir kehren jetzt wieder zu den ebenen Spiegeln zurück, und wollen einige Aufgaben vornehmen, die sich auf die Zurückwerfung des Lichts von denselben beziehen. Es sey ein leuchtender Punkt gegeben, und ein anderer Punkt, nach welchem hin reflectirtes Licht von einem gegebenen Punkte des Spiegels gebracht werden soll; es fragt sich, welche Lage soll man dem Spiegel geben, um dies zu bewerkstelligen. Man denke sich von der Stelle des Spiegels aus, wo das Einfallsloth errichtet werden muſs, die Richtungslinien nach dem leuchtenden und dem dunklen Punkt hin bis an die Himmelskugel verlängert, und sie mögen dieselbe in L und in D schneiden (Fig. 33 *a*.). AB sey der Horizont, P das Zenith; zieht man durch D und L die Bogen gröſster Kreise PD', PL', und legt durch L und D den gröſsten Kreis LD, so läſst sich die Lage der Punkte D und L durch die Bogen

$$BD' = \alpha, \quad DD' = \delta$$
$$BL' = A, \quad LL' = B$$

bestimmen. Verlängert man ebenfalls das Einfallsloth bis an die Himmelskugel, so wird es dieselbe in einem Punkt S schneiden, der in der Mitte des Bogens LD liegt. Man setze $BS' = \varphi$, $SS' = \psi$, so hat man in den beiden Dreiecken SPD, SPL

$$\cos SD = \sin\psi . \sin\delta + \cos\psi . \cos\delta . \cos(\varphi - \alpha)$$
$$\cos SL = \sin\psi . \sin B + \cos\psi . \cos B . \cos(A - \varphi),$$

und da $SD = SL$ seyn mufs, so kommt

$$\sin\psi . \sin\delta + \cos\psi . \cos\delta . \cos(\varphi - \alpha)$$
$$= \sin\psi . \sin B + \cos\psi . \cos B . \cos(A - \varphi).$$

Man hat ferner in denselben Dreiecken

$$\sin(\varphi - \alpha) : \sin SD = \sin PSD : \cos\delta$$
$$\sin(A - \varphi) : \sin SD = \sin PSL : \cos B.$$

Hieraus ergiebt sich sogleich, da $\sin PSD = \sin PSL$ ist,

$$\sin(\varphi - \alpha) . \cos\delta = \sin(A - \varphi) . \cos B,$$

und wenn man die Gröfsen $\sin(\varphi - \alpha)$, $\sin(A - \varphi)$ entwickelt, und das Ganze durch $\cos\varphi$ dividirt, so erhält man

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{\sin A . \cos B + \sin\alpha . \cos\delta}{\cos\alpha . \cos\delta + \cos A . \cos B}.$$

Ist vermittelst dieses Ausdrucks φ bestimmt, so giebt die Gleichung

$$\operatorname{tang}\psi = \frac{\cos\delta . \cos(\varphi - \alpha) - \cos B . \cos(A - \varphi)}{\sin B - \sin\delta}$$

den Werth des Winkels ψ.

§. 252.

Ist aufserdem noch ein anderer leuchtender Punkt gegeben, dessen Lage durch die Winkel A', B' bestimmt wird, und soll man die Lage eines zweiten Spiegels aufsuchen, die so beschaffen ist, dafs die von diesem leuchtenden Punkt herkommenden Strahlen nach derselben Richtung reflectirt werden, als die vom ersten Spiegel, so hat man, wenn die Lage des Einfallsloths auf diesem Spiegel durch die Winkel ψ', φ' bestimmt wird, die Gleichungen

$$\text{g } \varphi' = \frac{\sin A \,.\, \cos B' + \sin \alpha \,.\, \cos \delta}{\cos \alpha \,.\, \cos \delta + \cos A \,.\, \cos B'}$$

$$\text{g } \psi' = \frac{\cos \delta \,.\, \cos (\varphi' - \alpha) - \cos B' \,.\, \cos (A - \varphi)}{\sin B' - \sin \delta}$$

em man nur in den beiden Gleichungen des vorigen statt A, B, φ, ψ, die Gröfsen A', B', φ', ψ' setzt.

§. 253.

Aus dem Gesetze, welches §. 244. entwickelt wurde, s nämlich das Bild eines jeden Punktes eben so weit ter dem Spiegel erscheine, als der Punkt vor dem iegel liegt, lassen sich mehrere Erscheinungen er- ren, die die Lage der Bilder ausgedehnter Gegen- nde betreffen. Ist z. B. der Gegenstand eine grade nie, die einen gewissen Winkel α mit der Ebene des iegels macht, so wird das Bild derselben nothwendig enfalls eine grade Linie seyn, die mit dem Spiegel en Winkel $= \alpha$ bildet, folglich ist der Winkel, wel- en der Gegenstand mit dem Bilde einschliefst, $= 2\alpha$. enn daher der Gegenstand senkrecht auf dem Spiegel eht, oder $\alpha = 90^0$ ist, so wird $2\alpha = 180^0$, also hat s Bild eine völlig verkehrte Lage. Diese Erschei- ng sieht man ganz deutlich bei Gebäuden, Bäumen s. w., die am Rande des Wassers stehen, dessen hige Oberfläche als Spiegel wirkt, und die Bilder er am Ufer befindlichen Gegenstände in umgekehrter age darstellt.

Macht die spiegelnde Fläche einen Winkel von) Grad mit dem Horizont, so zeigen sich die Bilder er horizontalen Gegenstände in verticaler Lage, und ngekehrt.

§. 254.

Wenn ein Mensch aufrecht vor einem senkrecht ingenden Spiegel steht, so braucht der Spiegel nur alb so lang zu seyn, als der Mensch, wenn dieser ch völlig darin erblicken soll. Denn es sey AB der piegel (Fig. 34.), CD der Mensch, so wird FG sein

Bild seyn, wenn wir CF, DG senkrecht auf AB zi
und $CF = CC'$, $D'G = DD'$ machen. Befindet
ferner das Auge in E, und zieht man die Linien
EG, die den Spiegel in H und K durchschneiden
ist blofs das Stück HK des Spiegels wirksam.
hat nun in den beiden Dreiecken EHK, EFG die
portion

$$EH : EF = HK : FG,$$

und da $EH = \frac{1}{2} EF$, so wird auch $HK = \frac{1}{2} FG = \frac{1}{2}$
werden. Dasselbe, was über die Länge des Spi
gesagt ist, gilt natürlich auch von der Breite desse

§. 255.

Läfst man das Sonnenlicht oder das Mondlicht
einen Spiegel von beliebiger Gestalt fallen, und f
das zurückgeworfene Licht vermittelst einer wei
Fläche auf, so zeigt das zurückgeworfene Licht auf
weifsen Fläche, solange dieselbe dem Spiegel sehr
ist, eine helle Stelle, die die Gestalt des Spiegels
sitzt, und erst, wenn man die Fläche weit genug
Spiegel entfernt, giebt das reflectirte Licht ein krei
miges Bild. Diese Erscheinung ist derjenigen ganz
log, welche das durch Oeffnungen scheinende Sonnen
zeigt, indem hierbei das Bild der Sonne, welche
weit hinter dem Spiegel liegt, als die Sonne selbst
demselben, als der Strahlen aussendende Gegenst
und der Spiegel als die Oeffnung betrachtet we
kann, und wir haben hinreichend gezeigt, dafs
gröfserer Nähe der auffangenden Fläche der Um
des Bildes ziemlich mit dem der Oeffnung übe
stimmt, bei gröfserer Entfernung der auffange
Fläche hingegen das Bild sich mehr der Gestalt
strahlenden Gegenstandes nähert.

§. 256.

Hält man einen Gegenstand vor einen bele
Glasspiegel, und betrachtet das Bild in einer sol

ge des Auges, dafs die nach demselben gezogene sichtslinie nur einen kleinen Winkel mit der Ebene i Spiegels bildet, so erhält man aufser dem deut- ien Bilde noch ein schwächeres, welches das erste f der einen Seite umgiebt, und die Entfernung der nder beider Bilder von einander wird desto gröfser n, je dicker das Glas des Spiegels ist. Das erste utliche Bild entsteht durch die Zurückwerfung des chts von der hintern belegten Seite des Spiegels, die r wie ein Metallspiegel wirkt, während das schwache ld durch diejenigen Strahlen hervorgebracht wird, welche der vordern Fläche des Glases, ehe sie in den rchsichtigen Körper eindringen, reflectirt werden. an sieht hieraus, dafs, streng genommen, blofs das hwache, und wegen seiner geringen Helligkeit un- auchbare Bild, ein rein catoptrisches ist, während e zur Hervorbringung des eigentlich brauchbaren ldes nöthigen Strahlen innerhalb des Glases eine Bre- ung erleiden, wodurch eine, wiewohl bei der gewöhn- h geringen Dicke des Glases unmerkliche, Verzerrung s Bildes hervorgebracht wird. Obgleich nun dieses optrisch catoptrische Bild eine für den gewöhnlichen ebrauch hinreichende Aehnlichkeit mit dem Gegen- ande hat, so darf man doch bei Gelegenheiten, o starke Vergröfserungen eintreten, sich der Glas- iegel aus dem angeführten Grunde nicht bedienen, ndern mufs sie durch Metallspiegel, die nur ein ein- ges wirklich catoptrisches Bild geben, ersetzen. Um e beiden angeführten Bilder bei einem Glasspiegel eutlich zu sehen, mufs man deswegen das Auge in ne solche Lage bringen, dafs die Gesichtslinie nur inen geringen Winkel mit der Ebene des Spiegels acht, weil bei gröfsern Winkeln die Umrisse beider ilder einander zu nahe kommen, und dann das schwä- here Licht keinen hinreichenden Eindruck auf das ge machen kann. Uebrigens werden die genauern ntersuchungen, welche die Veränderungen des Bildes

in Glasspiegeln wegen der Brechung des Lichts men, in der Dioptrik vorkommen.

§. 257.

Wenn alles Licht, welches auf einen Spieg auch wieder von demselben zurückgeworfen wü müfste nothwendig das Bild eines Gegenstandes scheinbare Klarheit oder denselben scheinbaren besitzen, als der Gegenstand selbst. Dieses i niemals der Fall, indem alle reflectirende Obe einen bedeutenden Theil des auffallenden Lich schlucken. Ferner wird es auch noch darauf ank unter welchem Winkel die Gesichtslinie, welch dem Bilde gezogen wird, die Ebene des S schneidet, indem bei verschiedenen Einfallswink reflectirte Lichtmenge auch verschieden ausfäll zwar wächst die Lichtmenge mit dem Einfall wenn die Benennung des Einfallswinkels in dem genommen wird, in welchem wir ihn bisher gen haben, d. h. dafs unter dem Einfallswinkel der verstanden wird, welchen der einfallende Strahl im Einfallspunkte errichteten Normale bildet. Di merkung war deswegen nothwendig, weil manche steller unter Einfallswinkel auch den Winkel verste der einfallende Strahl mit der Ebene des Spiegels

Das Gesetz, nach welchem sich die reflectirte menge in Bezug auf den Einfallswinkel richtet, i unbekannt, und die empirischen Formeln, welc aufzustellen gesucht hat, um die in dieser Rü angestellten Beobachtungen zu umfassen, scheine in mancher Hinsicht sich blofs auf besondere F beziehen. So hat Bouguer aus seinen Ver über die Zurückwerfung des Lichts von den Ober des Glases und des Wassers geschlossen, dafs s zurückgeworfene Lichtmenge l durch einen Au von der Form

$$l = a + b \cdot \sin \frac{\varepsilon}{2}^{6} + c \cdot \sin \frac{\varepsilon}{2}^{12}$$

stellen liefse, wo ε den Einfallswinkel, und a, b, c bestimmte Coefficienten bedeuten, die von der Natur zurückwerfenden Materie abhängen.

Man erhält aus dieser Formel durch Differentiation

$$\frac{dl}{d\varepsilon} = 3 . \cos\frac{\varepsilon}{2} \cdot \sin\frac{\varepsilon}{2}^5 \cdot \left(b + 2c . \sin\frac{\varepsilon}{2}^6\right),$$

d dies wird Null, wenn entweder $\cos \frac{1}{2} . \varepsilon = o$, $\frac{1}{2} . \varepsilon = o$ oder $b + 2c . \sin\frac{\varepsilon}{2}^6 = o$ wäre. Ersterer erth giebt $\varepsilon = 180^0$ und dies kann nicht mit zu unserer trachtung gezogen werden. Der zweite Werth giebt $= o$, und dies ist der Werth, welcher die Lichtmenge zu einem Minimum macht, indem hierdurch $l = a$ rd, also a die bei senkrecht einfallendem Licht reflectirte Lichtmenge darstellt. Der dritte Werth giebt $\frac{\varepsilon}{2}^6 = -\frac{b}{2c}$, und dies erfordert, dafs b und c rschiedene Vorzeichen haben, und da ferner $\frac{1}{2} . \varepsilon$ nicht öfser als 45^0 werden kann, dafs auch ohne Rücksicht f die Vorzeichen $\frac{b}{c} < \frac{1}{4}$ sey. Nun wächst aber die chtmenge l mit dem Einfallswinkel ε immerfort, folgh wird die Gleichung

$$b + 2c . \sin\frac{\varepsilon}{2}^6 = o$$

inen reellen Werth für ε geben, weil sonst für diesen erth von ε ein Maximum oder Minimum für die Lichtnge l Statt finden würde; es haben also b und c iche Zeichen, und wie man leicht sieht, müssen ide Gröfsen immer positiv ausfallen. Da nun bei lasspiegeln sowohl, als bei Metallspiegeln, die Lichtnge, welche bei senkrecht einfallendem Licht reflectirt rd, bedeutend ist, und wohl nicht viel kleiner, als $\frac{1}{2}$ setzt werden darf, so läfst sich leicht zeigen, dafs Allgemeinen die zurückgeworfene Lichtmenge, selbst nn der Einfallswinkel 10 bis 20 Grad betragen sollte, n der bei senkrecht einfallendem Licht reflectirten ht merklich abweichen werde. Denn setzen wir

$= 90°$, also $\frac{1}{2}.\varepsilon = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}$, so wird die zurückgeworfene Lichtmenge

$$= a + \tfrac{1}{8}.b + \tfrac{1}{64}.c.$$

Im vorhergehenden Fall wird nun höchstens das ganze einfallende Licht zurückgeworfen, welches wir als die Einheit betrachteten, also ist gewifs

$$a + \tfrac{1}{8}.b + \tfrac{1}{64}.c < 1,$$

und da a ungefähr $= \frac{1}{2}$

$$b + \tfrac{1}{8}.c < 4,$$

also auch gewifs b kleiner, als 4, da b und c beide positiv sind. Setzen wir nun $\varepsilon = 20°$, so ist doch $b.\frac{\varepsilon^6}{2} < .4.(\frac{1}{6})^6$, also ganz unbedeutend. Ebenso zeigen auch die über diesen Gegenstand angestellten Versuche, dafs die reflectirte Lichtmenge in der Nähe der Normale nur unmerklich zunimmt. Da nun bei den Anwendungen, die wir in der Folge von diesem Gegenstand bei der Erleuchtung durch gekrümmte Spiegel machen müssen, das Licht fast immer nahe senkrecht einfällt und reflectirt wird, so können wir die Lichtmenge als vom Einfallswinkel unabhängig betrachten, und sie nur in dem Verhältnifse vermindert ansehen, in welchem das senkrecht einfallende Licht durch die Zurückwerfung vermindert wird.

§. 258.

Es ist bekannt, dafs, wenn man zwischen zwei Spiegel einen leuchtenden Gegenstand, z. B. eine Lichtflamme, bringt, man in denselben eine grofse Menge Lichter erblickt, die immer in gröfsern Entfernungen und mit schwächerm Licht auf einander folgen. Zuerst wollen wir den Fall betrachten, wo beide Spiegel einander parallel liegen; wir bezeichnen dieselben durch A und B, und setzen die Entfernung der Lichtflamme vom Spiegel $A = a$, vom Spiegel $B = b$, so dafs also die Entfernung der Spiegel von einander $a + b$ beträgt. Von der Lichtflamme entsteht ein Bild hinter A in der Entfernung $= a$; dies Bild hat die Entfer-

ng $2a + b$ von B, folglich entsteht ein Bild in der ıtfernung $2a + b$ hinter B; von diesem entsteht ein ld hinter A in der Entfernung $3a + 2b$, von diesem eder hinter B in der Entfernung $4a + 3b$ u. s. w. rt. Folglich liegen, wenn die erste Zurückwerfung ın A ausgeht, die Bilder

hinter A in den Entfernungen

a, $3a + 2b$, $5a + 4b$, $7a + 6b$ u. s. w.

hinter B in den Entfernungen

$2a + b$, $4a + 3b$, $6a + 5b$ u. s. w.

benso findet man leicht, dafs, wenn die erste Reflexion ım Spiegel B ausgeht, so liegen die Bilder

hinter B in den Entfernungen

b, $3b + 2a$, $5b + 4a$, $7b + 6a$ u. s. w.

hinter A in den Entfernungen

$2b + a$, $4b + 3a$, $6b + 5a$ u. s. w.

§. 259.

Sind die Spiegel gegen einander geneigt, wie z. B. B, AD (Fig. 35.), so mufs man folgendermafsen verhren, um die Bilderreihen zu erhalten. Durch den urchschnitt der beiden Spiegelebenen A ziehe man e grade Linie FG, welche als Abscissenlinie betrachtet erden soll, setze den Winkel

$$BAG = a, \quad DAG = 6.$$

M sey der leuchtende Punkt, dessen Coordinaten $P = a$, $PM = b$ sind, und M' sein Bild, dessen ordinaten wir durch $AP' = a'$, $P'M' = b'$ bechnen. Die Gleichung der graden Linie AB ist, da A der Anfangspunkt der Coordinaten angenommen rd, $y = \text{tang}\, a \,.\, x$. Da ferner die Coordinaten der iden Punkte M und M' gegeben sind, so läfst sich Gleichung der durch sie gelegten graden Linie fin; sie wird

$$y - b = \frac{b' - b}{a' - a} \cdot (x - a).$$

n steht aber die Linie MM' senkrecht auf der

Linie AB, folglich hat man, einem Lehrsatze der analytischen Geometrie zufolge

$$\frac{b' - b}{a' - a} = -\cot \alpha,$$

mithin läfst sich die Gleichung der Linie MM' auch so schreiben:

$$y - b = -\cot \alpha . (x - a).$$

Verbindet man diese Gleichung mit der frühern $y = x.\tang \alpha$, so erhält man, indem x und y gesucht wird, die Coordinaten des Durchschnitts N. Bezeichnen wir die hieraus sich ergebenden Werthe von x und y durch x' und y', so wird

$$MN^2 = (x' - a)^2 + (y' - b)^2$$
$$M'N^2 = (x' - a')^2 + (y' - b')^2,$$

und da $MN = M'N$ ist, so kommt

$$2x'.(a' - a) - (a'a' - aa) + 2y'.(b' - b) = (b'b' - bb),$$

und wenn man die ganze Gleichung durch $a' - a$ dividirt, und bedenkt, dafs $\frac{b' - b}{a' - a} = -\cot \alpha$, so erhält man

$$(2x' - a' - a) = (2y' - b' - b) . \cot \alpha.$$

Vermöge der Gleichung $y = x . \tang \alpha$ ist aber auch $2y' . \cot \alpha = 2x'$, folglich, wenn man diesen Werth in vorige Gleichung setzt, so wird

$$a' + a = (b' + b) . \cot \alpha,$$

und wird diese Gleichung mit der vorigen

$$a' - a = -(b' - b) . \tang \alpha$$

verbunden, so erhält man zwei Gleichungen, aus denen sich a' und b' bestimmen lassen.

§. 260.

Führt man die Rechnung wirklich aus, so kommt, nach den gehörigen Reductionen,

$$a' = a . \cos 2\alpha + b . \sin 2\alpha$$
$$b' = a . \sin 2\alpha - b . \cos 2\alpha.$$

Man setze noch, um die Formeln einfacher zu machen,

$$a = r \cdot \cos \mu, \quad b = r \cdot \sin \mu$$
$$a' = r' \cdot \cos \mu', \quad b' = r' \cdot \sin \mu',$$

ben die vorigen Gleichungen

$$r' \cdot \cos \mu' = r \cdot \cos (2\alpha - \mu)$$
$$r' \cdot \sin \mu' = r \cdot \sin (2\alpha - \mu),$$

auch $r' = r$, $\mu' = 2\alpha - \mu$. Man sieht hieraus, der Abstand des Bildes vom Anfangspunkt der dinaten so grofs ist, als der Abstand des Gegen- es selbst, welches auch natürlicherweise bei allen den Zurückwerfungen Statt finden mufs; wir brau- uns also nur mit den Winkeln μ, μ', μ'' u. s. w. zu äftigen, die die aus A nach den Bildern gezoge- inien mit der Abscissenlinie FG bilden. Das Bild iebt nun ein Bild hinter dem Spiegel AD, und wir für dieses den Winkel durch μ'' bezeichnen, det man denselben aus der Gleichung $\mu' = 2\alpha - \mu$, statt μ', α, μ die Winkel μ'', 6, μ' gesetzt wer- also wird

$$\mu'' = 2\beta - \mu'.$$

Bild bringt wieder ein neues Bild hinter dem el AB hervor, und wenn für dieses der Winkel '' gesetzt wird, so ist $\mu''' = 2\alpha - \mu''$. Man hat folgende Reihe von Gleichungen

$$\mu' = 2\alpha - \mu$$
$$\mu'' = 2\beta - \mu'$$
$$\mu''' = 2\alpha - \mu''$$
$$\mu^{IV} = 2\beta - \mu'''$$ u. s. w.

aus ergiebt sich auch

$$\mu' = 2\alpha - \mu$$
$$\mu'' = 2\beta - 2\alpha + \mu$$
$$\mu''' = 4\alpha - 2\beta - \mu$$
$$\mu^{IV} = 4\beta - 4\alpha + \mu$$
$$\mu^{V} = 6\alpha - 4\beta - \mu$$ u. s. w.

ilden daher die Bilder folgende Reihen von Winkeln

hinter dem Spiegel AB

$- \mu$, $4\alpha - 2\beta - \mu$, $6\alpha - 4\beta - \mu$, u. s. w.

hinter dem Spiegel AD

$- 2\alpha + \mu$, $4\beta - 4\alpha + \mu$, $6\beta - 6\alpha + \mu$, u. s. w.

zurückgeworfenen Strahlen zu untersuchen, blofs d Durchschnitt BAD und die in dieser Ebene liegend Strahlen zu betrachten, da für jeden andern Dur schnitt ganz dasselbe gilt.

§. 263.

Nun sey L (Fig. 36.) der leuchtende Punkt, L der einfallende Strahl, CM der nach dem Einfallspu gezogene Halbmesser oder das Einfallsloth, MP d zurückgeworfene Strahl, der die Axe in P schneid so werden alle Strahlen, die auf den Kugelspiegel der Entfernung AM von der Axe auffallen, die Axe P schneiden, und daselbst ein Bild des Punktes darstellen. Man setze nun $CL = h$, $AC = r$, $CP =$ und fälle das Perpendikel MQ. Die Lage des einf lenden Strahls ist durch den Winkel $MCA = \alpha$ b stimmt, und man hat

$$MQ = r \cdot \sin \alpha, \quad CQ = r \cdot \cos \alpha$$

$$\text{tang } MLQ = \frac{MQ}{QL} = \frac{r \cdot \sin \alpha}{h + r \cdot \cos \alpha} = \text{tang } \lambda$$

indem wir $MLQ = \lambda$ setzen.

Ferner hat man $CML = CMP = \alpha - \lambda$, MP $= 2\alpha - \lambda$, folglich, da im Dreieck MPC die Pr portion Statt findet

$$MC : PC = \sin MPQ : \sin CMP,$$

so erhält man, mit Einführung unserer Bezeichnunge

$$r : x = \sin (2\alpha - \lambda) : \sin (\alpha - \lambda)$$

$$r \cdot \sin (\alpha - \lambda) = x \cdot \sin (2\alpha - \lambda).$$

Entwickelt man die Gröfsen $\sin (\alpha - \lambda)$, $\sin (2\alpha -$ so wird

$$x = r \cdot \frac{\sin \alpha - \cos \alpha \cdot \text{tang } \lambda}{\sin 2\alpha - \cos 2\alpha \cdot \text{tang } \lambda},$$

oder, wenn man statt $\text{tang } \lambda$ seinen Werth $\frac{r \cdot \sin \alpha}{h + r \cdot \cos}$ setzt

$$x = r \cdot \frac{\sin \alpha \cdot (h + r \cdot \cos \alpha) - r \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{\sin 2\alpha \cdot (h + r \cdot \cos \alpha) - r \cdot \cos 2\alpha \cdot \sin}$$

und wenn man gehörig reducirt:

$$x = \frac{rh}{2h \cdot \cos\alpha + r}.$$

§. 264.

Der Nenner des Bruchs $2h \cdot \cos\alpha + r$ nimmt ab, während α wächst, also wird x immer gröfser, je gröfser α ist, und für einen bestimmten Spiegel ist x am gröfsten, sobald die Strahlen vom leuchtenden Punkt auf den Rand des Spiegels fallen. Bezeichnet man also den äufsersten Werth von α durch α', so wird der gröfste Werth von x

$$= \frac{rh}{2h \cdot \cos\alpha' + r},$$

und der kleinste, wenn man $\alpha = o$ nimmt, $= \frac{rh}{2h + r}$.

Zwischen diesen beiden Abständen vom Mittelpunkt der Kugel aus liegt eine continuirliche Reihe von Bildern, die alle von dem einzigen Punkt L gebildet werden, und bezeichnet man diesen Raum durch l, so kommt

$$l = \frac{rh}{2h \cdot \cos\alpha' + r} - \frac{rh}{2h + r}$$

$$= \frac{2rhh \cdot (1 - \cos\alpha')}{(2h + r) \cdot (2h \cdot \cos\alpha' + r)}.$$

Diese Gröfse wird die Längenabweichung des Spiegels genannt, und sie wird in zwei Fällen Null; entweder wenn $h = o$, oder wenn $1 - \cos\alpha' = o$, d. h. wenn entweder das Object im Mittelpunkt der Kugel sich befindet, oder wenn der Spiegel eine unendlich kleine Ausdehnung hat.

§. 265.

Fällt das Bild der von der Mitte des Spiegels A reflectirten Strahlen nach E, das Bild der vom Rande reflectirten Strahlen nach G, so ist EG die im vorigen §. angegebene Längenabweichung. Zieht man dann den vom Rande zurückgeworfenen Strahl BG und verlängert ihn, bis er ein in E auf der Axe AL errichtetes

Perpendikel EH in H trifft, so wird EH die Seitenabweichung des Spiegels angeben. Um diese zu finden, hat man

$$EH = EG \cdot \text{tang}\, EGH = EG \cdot \text{tang}\, BGK = EG \cdot \frac{BK}{KG}.$$

Man hat ferner $KG = CK - CG$, und da CG der gröfste Werth von x ist, so hat man den Ausdruck

$$KG = r \cdot \cos\alpha' - \frac{rh}{2h \cdot \cos\alpha' + r}$$

$$= r \cdot \frac{h \cdot (2 \cdot \cos\alpha'^2 - 1) + r \cdot \cos\alpha'}{2h \cdot \cos\alpha' + r}$$

$$BK = r \cdot \sin\alpha'.$$

Bezeichnet man also die Seitenabweichung durch s, so wird

$$s = \frac{2rhh \cdot (1 - \cos\alpha') \cdot \sin\alpha'}{(2h + r) \cdot (2h \cdot \cos\alpha' + r)} \cdot \frac{(2h \cdot \cos\alpha' + r)}{h \cdot (2 \cdot \cos\alpha'^2 - 1) + r \cdot \cos\alpha'}$$

$$= \frac{2rhh \cdot (1 - \cos\alpha') \cdot \sin\alpha'}{(2h + r) \cdot (h \cdot \cos 2\alpha' + r \cdot \cos\alpha')}.$$

Beide Abweichungen nennt man insgemein die Abweichung der Strahlen wegen der Kugelgestalt, weil, wenn z. B. der Spiegel BMD eine elliptische Krümmung besäfse und der Brennpunkt der Ellipse in L sich befände, gar keine Abweichung Statt finden würde, sondern alle reflectirte Strahlen sich im andern Brennpunkt durchschneiden müfsten. Für einen unendlich entfernten Gegenstand, oder überhaupt schon für einen solchen, für den $\frac{r}{h}$ sehr klein wird, hat man die Längenabweichung

$$l = \tfrac{1}{2} r \cdot \frac{1 - \cos\alpha'}{\cos\alpha'},$$

und die Seitenabweichung

$$s = r \cdot \frac{(1 - \cos\alpha') \cdot \sin\alpha'}{\cos 2\alpha'}.$$

Da nun bei den im Gebrauch vorkommenden Hohlspiegeln der Winkel α' nur wenige Grade faſst, so sieht man hieraus, daſs die Längenabweichung sowohl als die Seitenabweichung immer sehr klein ausfallen werden.

§. 266.

Betrachtet man irgend einen reflectirten Strahl, z. B. MP, so läfst sich derselbe durch die Gleichung einer graden Linie darstellen; diese Gleichung sey

$$Y = mX + N,$$

wo wir die Abscissen vom Mittelpunkt C des Kreises aus rechnen. Die Linie geht durch den Punkt M, dessen Coordinaten $r.\cos\alpha$, $r.\sin\alpha$ sind; setzt man also diese Werthe statt X, Y in vorige Gleichung, so kommt

$$r.\sin\alpha = mr.\cos\alpha + N$$
$$Y - r.\sin\alpha = m.(X - r.\cos\alpha).$$

Es ist ferner $m = \text{tang}\, MPQ$, und da (§. 263.) $MPQ = 2\alpha - \lambda$ gefunden ist, so kommt

$$m = \text{tang}\,(2\alpha - \lambda) = \frac{\text{tang}\, 2\alpha - \text{tang}\,\alpha}{1 + \text{tang}\, 2\alpha.\text{tang}\,\lambda}.$$

Substituirt man hierin den Werth von $\text{tang}\,\lambda = \frac{r.\sin\alpha}{h + \cos\alpha}$, so ergiebt sich

$$m = \frac{\text{tang}\, 2\alpha.(h + r.\cos\alpha) - r.\sin\alpha}{h + r.\cos\alpha + r.\text{tang}\, 2\alpha.\sin\alpha}$$
$$= \frac{h.\sin 2\alpha + r.\sin\alpha}{h.\cos 2\alpha + r.\cos\alpha},$$

folglich wird die vollständige Gleichung des zurückgeworfenen Strahls

$$Y - r.\sin\alpha = \frac{h.\sin 2\alpha + r.\sin\alpha}{h.\cos 2\alpha + r.\cos\alpha}.(X - r.\cos\alpha).$$

Setzt man hierin $Y = o$, so erhält man $X = \frac{rh}{2h.\cos\alpha + r}$, wie im §. 263.

§. 267.

Die vorige Gleichung läfst sich auch so schreiben:

$$Y = \frac{h.\sin 2\alpha + r.\sin\alpha}{h.\cos 2\alpha + r.\cos\alpha}.X$$
$$- \frac{r.\sin\alpha}{h.\cos 2\alpha + r.\cos\alpha}.h,$$

und setzt man hierin $\alpha = \alpha'$, so erhält man die Glei-

... EH (Fig. 36.), der vom Rande zu- ... wird. Da nun G der Punkt ist, welcher ... dem Spiegel am nächsten liegt, so ist ein- ... dass alle vom Spiegel AB zurückgeworfene ... der Randstrahl BG zwischen B und G durch- ... müssen. Ferner sieht man sogleich, dafs die ... welche von Stellen des Spiegels nahe bei A ... werden, sehr nahe bei G den Randstrahl ... und dasselbe geschieht auch für Strahlen, ... Stellen des Spiegels zurückgeworfen werden, ... am Rande befinden. Es wird also einen ... Werth von α geben, für welchen der Durch- ... am weitesten von G abliegt, und wir wollen ... nach den bekannten Regeln bestimmen.

§. 268.

... NP dieser Strahl, welcher die Eigenschaft ... dass NG am gröfsten wird, so mufs auch zu- ... die Perpendikel NR ein Maximum werden. ... wir die Gleichung dieses Strahls der Kürze

$$Y = mX + N,$$

... die vorhin entwickelten Functionen von α ... bezeichnen ferner die Gleichung des Rand-

$$Y = m'X + N',$$

... wenn wir X eliminiren,

$$Y = m'N - mN'$$

$$Y = \frac{m'N - mN'}{m' - m}.$$

... man, so wird, wenn man bemerkt, dafs ... constante Gröfsen sind, m und N aber von ... veränderlichen Gröfse α abhängen,

$$\frac{(N' - N)dm - m'dm.(N' - N)}{(m' - m)^2} = dY,$$

... nämlich, um das Maximum oder Minimum ... finden, $dY = o$ gesetzt werden mufs, so ... dm nicht Null seyn kann,

$$dN.(m' - m) = dm.(N' - N)$$
$$Ndm - mdN = N'dm - m'dN.$$

n hat man aber

$$N = -\frac{hr.\sin\alpha}{h.\cos 2\alpha + r.\cos\alpha}$$

$$m = +\frac{h.\sin 2\alpha + r.\sin\alpha}{h.\cos 2\alpha + r.\cos\alpha}$$

$$dN = -rh.\frac{h.\cos\alpha + h.\sin 2\alpha.\sin\alpha + r}{(h.\cos 2\alpha + r.\cos\alpha)^2}.d\alpha$$

$$dm = \frac{2hh + 3hr.\cos\alpha + rr}{(h.\cos 2\alpha + r.\cos\alpha)^2}.d\alpha$$

$$dm - mdN = \frac{2rhh.\sin\alpha^3}{(h.\cos 2\alpha + r.\cos\alpha)^3}.d\alpha$$

$$'dm - m'dN = \frac{2hhr.\sin\alpha' d\alpha}{(h.\cos 2\alpha + r.\cos\alpha)^2.(h.\cos 2\alpha' + r.\cos\alpha')}$$

$$[(h.\cos\alpha + h.\sin 2\alpha.\sin\alpha + r).\cos\alpha' - (h + r.\cos\alpha^3)].$$

etzt man diese beiden Werthe einander gleich, so bleibt

$$\sin\alpha^3.(h.\cos 2\alpha' + r.\cos\alpha')$$
$$(h.\cos\alpha + h.\sin 2\alpha.\sin\alpha + r).\sin\alpha'.\cos\alpha' - (h + r.\cos\alpha^3).\sin\alpha'.$$

§. 269.

Es würde nun eine überflüssige Arbeit seyn, durch ie vollständige Auflösung den Werth von α hieraus chen zu wollen, da wir in allen Fällen, wie schon 265. erwähnt wurde, die Winkel α und α' als hin- ichend klein betrachten können, so dafs die höhern otenzen der Sinus von α, α' vernachlässigt werden rfen, und hierdurch reducirt sich vorige Gleichung auf $\sin\alpha^3 = h.(\frac{3}{2}.\sin\alpha'.\sin\alpha^2 - \frac{1}{2}.\sin\alpha'^3) + \frac{3}{2}.r.\sin\alpha'(\sin\alpha^2 - \sin\alpha'^2)$, d nimmt man aufserdem an, dafs h in Vergleich mit ehr grofs sey, so kommt

$$\sin\alpha^3 = \tfrac{3}{2}.\sin\alpha'.\sin\alpha^2 - \tfrac{1}{2}.\sin\alpha'^3$$

er

$$\sin\alpha^2.(\sin\alpha - \sin\alpha') = \tfrac{1}{2}.\sin\alpha'.(\sin\alpha^2 - \sin\alpha'^2).$$

eilt man diese Gleichung durch $\sin\alpha - \sin\alpha'$, so bleibt

$$\sin\alpha^2 = \tfrac{1}{2}.\sin\alpha'.(\sin\alpha + \sin\alpha'),$$

und diese quadratische Gleichung giebt

$$\sin\alpha = \sin\alpha' \text{ und } \sin\alpha = -\tfrac{1}{2}.\sin\alpha',$$

wovon hier blofs der letzte Werth in Betracht zu zieh ist. Man hat nun, mit Vernachlässigung der höhe Potenzen von $\sin\alpha$,

$$m = \frac{2h+r}{h+r}\cdot\sin\alpha\left[1-\frac{h}{2h+r}\cdot\sin\alpha^2+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{4h+r}{h+r}\cdot\sin\alpha^4\right.$$

$$N = -\frac{hr}{h+r}\cdot\sin\alpha\left[1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{4h+r}{h+r}\cdot\sin\alpha^2\right],$$

woraus sich die Werthe von m', N' ergeben, we man α' statt α substituirt. Nun war (§. 268.)

$$Y = \frac{m'N - mN'}{m' - m},$$

und wenn man die hier angegebenen Werthe substitui so kommt

$$Y = \frac{h}{2h+r}\cdot\frac{hr}{h+r}\cdot\sin\alpha'.\sin\alpha\,(\sin\alpha' + \sin\alpha),$$

oder da für den gesuchten Werth $\sin\alpha = -\tfrac{1}{2}.\sin$ gesetzt werden mufs, so kommt

$$Y = -\tfrac{1}{4}\cdot\frac{h}{2h+r}\cdot\frac{hr}{h+r}\cdot\sin\alpha'^5.$$

Dieser Werth von Y, um dessen negatives Vorzeich wir uns weiter nicht zu kümmern brauchen, da dies blofs anzeigt, dafs der Durchschnitt auf der Verlänge rung GH des Strahls BG genommen werden mufs, w durch das Perpendikel unter die Axe fällt, giebt un den Halbmesser des Kreises an, durch welchen al Strahlen gehen, und der der kleinste Sammlungs kreis genannt wird. Man findet übrigens leicht, da unter der Voraussetzung einer geringen Ausdehnun des Spiegels, dieser Halbmesser der vierte Theil de in §. 265. entwickelten Seitenabweichung ist.

§. 270.

Um nun den Abstand dieses kleinsten Sammlungs kreises vom Mittelpunkt C des Spiegels zu finden, neh men wir wieder die beiden Gleichungen

$$Y = mX + N$$
$$Y = m'X + N'$$

, aus denen man

$$X = \frac{N - N'}{m' - m}$$

hält. Es ist nun aber, mit Vernachlässigung der hern Potenzen von α und α',

$$N - N' = (\alpha' - \alpha) \cdot \frac{hr}{h + r}$$

$$m' - m = (\alpha' - \alpha) \cdot \frac{2h + r}{h + r},$$

glich wird der gesuchte Abstand

$$X = \frac{hr}{2h + r}.$$

§. 271.

Nimmt man die Formel (§. 263.)

$$x = \frac{rh}{2h \cdot \cos\alpha + r} = \frac{r}{2 \cdot \cos\alpha + \frac{r}{h}}$$

d setzt h unendlich, so bleibt $x = \frac{r}{2 \cdot \cos\alpha}$; wenn n ferner blofs die Strahlen betrachtet, welche unend- h nahe bei der Axe auffallen, so wird $\cos\alpha = 1$, d es bleibt $x = \frac{1}{2} \cdot r$. Da nun Strahlen, welche von em unendlich entfernten Punkt herkommen, als unter ander parallel laufend angesehen werden können, so gt man, dafs solche Strahlen, welche parallel mit der e auf die Mitte A des Spiegels fallen, sich mitten ischen dieser und dem Centrum des Spiegels ver- igen. Diesen Vereinigungspunkt nennt man den ennpunkt, und seinen Abstand von der Mitte des iegels die Brennweite desselben, die man also $\frac{1}{2} \cdot r$ findet, und welche durch f bezeichnet werden l. Durch Einführung des Werthes $r = 2f$ wird

$$x = \frac{fh}{h \cdot \cos\alpha + f},$$

und für solche Strahlen, welche unendlich nahe bei de Axe auffallen,

$$x = \frac{hf}{h+f} \text{ oder } \frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{f}.$$

§. 272.

Aus der Gleichung $x = \frac{hf}{h+f}$ läfst sich nun im Allgemeinen übersehen, wie der Ort des Bildes von dem Ort des leuchtenden Punktes in der Axe abhängt, und wir bemerken, dafs für den Normalfall, von welchem wir ausgingen, h die Entfernung des Objects vom Mittelpunkt C des Spiegels vom Spiegel abwärts, x die Entfernung des Bildes vom Mittelpunkt C nach dem Spiegel hin bedeutet, welche Umstände man wegen der etwanigen Veränderung der Vorzeichen wohl bemerken mufs. Setzt man $h = \infty$, so erhält man $x = f$, und man sieht leicht, dafs dieses der gröfste Werth von x ist, solange der Gegenstand vom Spiegel abwärts liegt, d. h. h positiv ist, denn in der Formel $\frac{1}{x} = \frac{1}{h} + \frac{1}{f}$ wird die Gröfse $\frac{1}{h} + \frac{1}{f}$ desto gröfser, je kleiner h wird, also auch $\frac{1}{x}$ desto gröfser oder x desto kleiner, folglich nehmen x und h zugleich zu und ab. Rückt nun der Gegenstand bis in den Mittelpunkt C des Spiegels, so ist $h = o$, $x = o$, also fällt das Bild mit dem Gegenstand zusammen. Befindet sich der leuchtende Punkt zwischen dem Spiegel und dem Mittelpunkt, so wird h negativ, und die Formel läfst sich so schreiben: $x = -\frac{hf}{f-h}$, welche einen negativen Werth für x giebt, solange $f > h$, d. h. solange der leuchtende Punkt sich zwischen dem Mittelpunkt C des Spiegels und dem Brennpunkt befindet, und dieser negative Werth von x bedeutet, dafs die Entstehung des Bildes jenseits de

Mittelpunkts C vom Spiegel abwärts geschieht. Fällt der leuchtende Punkt in den Brennpunkt, so wird $x = \infty$, d. h. die zurückgeworfenen Strahlen gehen parallel mit der Axe fort. Rückt endlich der leuchtende Punkt dem Spiegel noch näher, als der Brennpunkt selbst liegt, so wird $f - h$ negativ, folglich $x = \frac{hf}{h-f}$ wieder positiv. Man setze in diesem Fall $h = f + p$, wo p immer eine positive Gröfse bedeutet, so ist $x = f \cdot \frac{f+p}{p}$. Da nun der Gegenstand sich immer vor dem Spiegel befinden mufs, so wird p immer kleiner als f bleiben; man hat also

$$f > p, \quad f + p > 2p, \quad \frac{f+p}{p} > 2,$$

also ist $x > 2f$, und hieraus folgt, dafs das Bild hinter den Spiegel fällt; es kann daher kein wirkliches physisches Bild des Gegenstandes entstehen, sondern blofs ein sogenanntes geometrisches oder virtuelles. Für das Auge wird aber der Anschein da seyn, als ob die zurückgeworfenen Strahlen von einem hinter dem Spiegel liegenden Punkte herkämen.

Endlich kann der Fall eintreten, dafs die Strahlen convergent auf den Hohlspiegel fallen, indem dieselben entweder schon von einem andern Hohlspiegel reflectirt sind, oder durch eine Glaslinse gebrochen wurden. In diesem Fall wird man den Gegenstand als hinter dem Spiegel liegend annehmen müssen, und in der allgemeinen Formel $x = \frac{fh}{f+h}$ wird $h = -2f - q$ gesetzt werden, wo q eine fortwährend positive Gröfse bedeutet. Hierdurch wird $x = \frac{2f+q}{f+q} \cdot f$, also durchaus positiv, und zwar, wie sich leicht beweisen läfst, immer kleiner als $2f$; denn es ist auch

$$x = 2f \cdot \frac{2f+q}{2f+2q},$$

und da $2f + q < 2f + 2q$, so wird der Factor $\frac{2f+}{2f+}$ kleiner als die Einheit seyn, folglich auch x kleiner $2f$ werden. Der kleinste Werth, den der Bruch $\frac{2f+}{2f+}$ erhalten kann, findet für $q = \infty$ Statt, und dann hält er den Werth $\frac{1}{2}$, folglich ist x zwischen den Gren f und $2f$ enthalten. Hieraus schliefsen wir, dafs Bild, welches vermittelst convergenter Strahlen dur einen Hohlspiegel gebildet wird, immer zwischen d Spiegel und seinem Brennpunkt liegt.

§. 273.

Wir wollen nun den Halbmesser des kleinsten Sam lungskreises und seine Entfernung vom Mittelpunkt Spiegels aufsuchen, wenn der leuchtende Punkt im Bre punkte liegt. Nimmt man die beiden in §. 269 und 2 entwickelten Ausdrücke dieser Gröfsen

$$Y = -\tfrac{1}{4} \cdot \frac{hr}{h+r} \cdot \frac{h}{2h+r} \cdot \sin \alpha'^5$$

$$X = \frac{hr}{2h+r},$$

so mufs man in denselben, wenn sich der leuchte Punkt im Brennpunkt befindet, $h = -\frac{1}{2} \cdot r$ setz wodurch aber beide Ausdrücke einen unendlich gro Werth erhalten. Es wird also für diesen Fall nöt seyn, auf die ursprünglichen Ausdrücke zurückzugeh Setzt man in den Gleichungen

$$N = -\frac{hr \cdot \sin \alpha}{h \cdot \cos 2\alpha + r \cdot \cos \alpha}$$

$$m = +\frac{h \cdot \sin 2\alpha + r \cdot \sin \alpha}{h \cdot \cos 2\alpha + r \cdot \cos \alpha}$$

$h = -\frac{1}{2} \cdot r$, so kommt

$$N = \tfrac{1}{2} \cdot r \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha - \frac{1}{2} \cdot \cos 2\alpha}$$

$$m = \frac{\sin \alpha \cdot (1 - \cos \alpha)}{\cos \alpha - \frac{1}{2} \cdot \cos 2\alpha},$$

und wenn man diese Ausdrücke in Reihen entwickelt,

$$N = r.\sin\alpha.(1 - \sin\alpha^2 + \tfrac{5}{4}.\sin\alpha^4)$$
$$m = \sin\alpha^3.(1 - \tfrac{3}{4}.\sin\alpha^2)$$
$$m'N - mN' = r.\sin\alpha.\sin\alpha'.(\sin\alpha'^2 - \sin\alpha^2)$$
$$m' - m = \sin\alpha'^3 - \sin\alpha^3.$$

Da nun im §. 268. allgemein $Y = \frac{m'N - mN'}{m' - m}$ gefunden ist, so erhält man durch Substitution dieser Werthe, wenn man zugleich Zähler und Nenner durch $\sin\alpha' - \sin\alpha$ dividirt, den Ausdruck

$$Y = r.\frac{\sin\alpha'.\sin\alpha.(\sin\alpha' + \sin\alpha)}{\sin\alpha'^2 + \sin\alpha'.\sin\alpha + \sin\alpha^2}.$$

Hierin mufs man, nach §. 269., um Y zu einem Maximum zu machen, $\sin\alpha = -\frac{1}{2}.\sin\alpha'$ setzen, und dann wird

$$Y = -\tfrac{1}{2}.r.\sin\alpha'.$$

Was nun den Werth von X betrifft, so hat man denselben nach §. 270.

$$X = \frac{N - N'}{m' - m},$$

und da man aus vorigen Ausdrücken

$$N - N' = r.(\sin\alpha - \sin\alpha') - r.(\sin\alpha^3 - \sin\alpha'^3)$$
$$m' - m = \sin\alpha'^3 - \sin\alpha^3$$

findet, so kommt

$$X = \frac{-r}{\sin\alpha^2 + \sin\alpha.\sin\alpha' + \sin\alpha'^2} + r$$
$$= -\frac{4r}{3.\sin\alpha'^2} + r,$$

indem man $-\frac{1}{2}.\sin\alpha'$ statt $\sin\alpha$ setzt.

§. 274.

Wir können aus den Formeln, welche für die Erscheinungen des hohlen Kugelspiegels gelten, unmittelbar auch die Erscheinungen ableiten, die der erhabene Kugelspiegel darbietet, wobei wir uns ebenfalls nur auf den Fall beschränken, in welchem blofs die der Axe

unendlich nahe liegenden Strahlen betrachtet werd
Die allgemeine Formel war

$$x = \frac{hr}{2h + r}.$$

Setzen wir den Abstand des leuchtenden Punkts von
Mitte oder dem Scheitel A des Spiegels $= h'$,
Abstand des Bildes von demselben Punkte $= x'$, so
man die beiden Gleichungen

$$x = r - x'$$
$$h = h' - r;$$

und durch Substitution dieser Werthe in vorige
chung kommt auch

$$r - x' = \frac{(h' - r).r}{2h' - r}$$

$$x' = \frac{h'r}{2h' - r},$$

welche Gleichung ebenfalls für den Hohlspiegel

**Um dieselbe nun dem erhabenen Kugelspiegel anpa
zu können, braucht man nur den Radius r negati
nehmen; hierdurch wird**

$$x' = -\frac{h'r}{r + 2h'}.$$

**Da nun h nie negativ werden kann, so sieht man
aus, dafs x' immerwährend negativ bleibt, d. h.
leuchtende Punkt mag sich vor dem Spiegel befi
wo er will, so wird doch immer sein Bild hinter
erhabenen Spiegel zu liegen scheinen, also findet
dem erhabenen Kugelspiegel immer nur ein geom
sches oder virtuelles Bild des Gegenstandes Statt.
man in einer der Formeln, welche x' ausdrücken, $r =$
so erhält man $x' = -h'$, d. h. das Bild liegt so
hinter dem Spiegel, als der Gegenstand vor dems
sich befindet. Dies liefs sich leicht voraussehn, i
wir durch die Annahme, der Halbmesser des Spi
sey unendlich grofs, denselben auf einen Plansp
reducirt haben, von welchem dieses angegebene G
a früher erwiesen worden.**

§. 275.

Wir haben bis jetzt blofs den Fall betrachtet, wo der Punkt, von welchem Lichtstrahlen auf den Spiegel fielen, in der Axe selbst lag; und der allgemeinere Fall, wo der leuchtende Punkt sich aufserhalb der Axe befindet, läfst sich durch eine einfache Betrachtung auf jenen zurückführen. Bedenkt man nämlich, dafs bei einem Kugelspiegel die Axe keine absolut bestimmte Linie ist, die sich durch besondere Eigenschaften von andern durch den Mittelpunkt C nach dem Spiegel gezogenen Linien auszeichnet, wie dies z. B. bei einem Spiegel der Fall seyn würde, dessen Durchschnitt eine Parabel, Ellipse, Hyperbel oder andere krumme Linien gäbe, so wird eine jede Linie, welche durch den leuchtenden Punkt und den Mittelpunkt des Spiegels gelegt ist, wenn sie auch nicht die Mitte des Spiegels trifft, als Axe betrachtet werden können, und wir wollen diese Linie die Nebenaxe nennen. Man lege nun durch diese Nebenaxe und die Hauptaxe eine Ebene, so schneidet diese den hohlen Kugelspiegel in einem Kreisbogen BAD (Fig. 37.), und alle Strahlen, welche in dieser Ebene auf den Spiegel fallen, werden in derselben Ebene wieder zurückgeworfen.

§. 276.

Es sey C der Mittelpunkt des Spiegels (Fig. 37.), AC seine Hauptaxe, L' ein aufserhalb der Axe gelegener leuchtender Punkt, so wird $L'CE$ die Nebenaxe seyn, welche in E senkrecht auf der Oberfläche des Spiegels steht. $L'M$ sey irgend ein auf den Spiegel fallender Strahl, der, zurückgeworfen, die Nebenaxe in N schneidet, so hat man, wenn der Halbmesser der Kugel, aus welchem der Spiegel geschnitten wird, wie früher die Bezeichnung r erhält, ganz analog mit der Formel

$$x = \frac{hr}{2h \cdot \cos \alpha + r},$$

die für diesen Fall passende

$$CN = \frac{CL' \cdot r}{2CL' \cdot \cos MCE + r}.$$

Nun sey der Winkel $L'CG = ACE = \delta$, und $MAC = \alpha$, so wird, wenn aufserdem $CL' = H$ gesetzt wird,

$$CN = \frac{Hr}{2H \cdot \cos(\alpha + \delta) + r}.$$

Fällt man das Perpendikel NP auf die Hauptaxe, und setzt $CP = \xi$, $NP = -\eta$, um die unterhalb der Axe liegende Lage anzudeuten, so wird

$$\eta = -CN \cdot \sin\delta = \frac{-Hr \cdot \sin\delta}{2H \cdot \cos(\alpha + \delta) + r}$$

$$\xi = +CN \cdot \cos\delta = \frac{Hr \cdot \cos\delta}{2H \cdot \cos(\alpha + \delta) + r},$$

und durch diese beiden Coordinaten ist die Lage des Bildes eines aufserhalb der Axe liegenden Punktes gegen die Hauptaxe bestimmt, da die Ordinate η immer in der Ebene liegt, die durch den leuchtenden Punkt und die Hauptaxe gelegt ist.

§. 277.

Fällt man das Perpendikel $L'G$ und bezeichnet dessen Länge durch l, so ist dieser Abstand des leuchtenden Punkts von der Hauptaxe $l = H \cdot \sin\delta$, folglich läfst sich der Werth von η auch so schreiben:

$$\eta = -\frac{lr}{2H \cdot \cos(\alpha + \delta) + r},$$

oder wenn wir, wie immer geschehen kann, die Winkel α, δ als sehr klein betrachten, so dafs $\cos(\alpha + \delta) = 1$ gesetzt wird, so erhalten wir

$$\eta = -\frac{lr}{2H + r}.$$

Solange also der Factor $\frac{r}{2H + r}$ positiv ist, bleibt η negativ; d. h. das Bild eines ausgedehnten Gegenstandes wird in diesem Fall verkehrt erscheinen. Nun ist $\frac{r}{2H + r}$ positiv, solange H positiv ist, d. h. während

der Gegenstand jenseits des Mittelpunkts L liegt, ferner auch dann, wenn H negativ, aber r gröfser als $2H$ ist, d. h. während der Gegenstand sich zwischen dem Mittelpunkt des Spiegels und dem Brennpunkt befindet. Liegt endlich der leuchtende Punkt zwischen dem Brennpunkt und dem Mittelpunkt des Spiegels, so wird der Factor $\frac{r}{2H+r}$ negativ, also η positiv, und dies ist ein Anzeichen, dafs der Gegenstand mit dem Bilde einerlei Lage hat.

§. 278.

Wenn man das Licht betrachtet, welches, von einem in der Axe befindlichen leuchtenden Punkt ausgehend, auf eine unendliche schmale Zone des hohlen Kugelspiegels fällt, so wird dasselbe Licht nach der Reflexion, wenn es durch eine senkrecht auf der Axe stehende Ebene aufgefangen wird, auf dieser Ebene einen Kreisring von unendlich schmaler Breite bilden, dessen Mittelpunkt in der Axe befindlich ist. Das Verhältnifs der Breite der Zone auf dem Kugelspiegel zu der des Kreisringes auf der Tafel ist natürlich von der Lage der Ebene gegen den Spiegel und von der Beschaffenheit des Spiegels selbst abhängig, und wir wollen uns jetzt damit beschäftigen, dieses Verhältnifs im Allgemeinen zu bestimmen.

§. 279.

Die Gleichung des zurückgeworfenen Strahls ist in §. 268. gefunden worden

$$Y = mX + N,$$

wo, mit Vernachlässigung der höhern Potenzen von $\sin\alpha$, die Gröfsen m und N durch folgende Ausdrücke dargestellt werden:

$$m = \frac{2h+r}{h+r} \cdot \sin\alpha \left[1 - \frac{h}{2h+r} \cdot \sin\alpha^2 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{4h+r}{h+r} \cdot \sin\alpha^2\right]$$

$$N = -\frac{hr}{h+r} \cdot \sin\alpha \left[1 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{4h+r}{h+r} \cdot \sin\alpha^2\right].$$

Gesetzt nun, der Abstand der schneidenden Ebene vom Mittelpunkt C des Spiegels sey, nach dem Spiegel zu gezählt, $= t$, so wird der Werth von Y, welcher für $X = t$ Statt findet, durch die Gleichung

$$Y = mt + N$$

gegeben; dann ist aber dieser Werth von Y nichts anders, als der Abstand des Durchschnittspunktes des reflectirten Strahls mit der auffangenden Ebene von der Axe, oder der Halbmesser des einen Kreises, der zur Bildung des concentrischen Kreisringes dient. Bezeichnet man diesen Werth von Y durch u, so ist

$$u = mt + N.$$

§. 280.

Wächst nun der Winkel um $d\alpha$, so erhielte man, durch Substitution von $\alpha + d\alpha$, statt α in voriger Gleichung, den Werth des Abstands des Durchschnittspunktes für den nächst folgenden Strahl, und so wie u dem Werth α entsprach, so wird $u + du$ dem Werth $\alpha + d\alpha$ zugehören, wo, wie man leicht sieht, du die Breite des concentrischen Kreisringes ist, während $rd\alpha$ die Breite der reflectirenden Zone auf dem Kugelspiegel angiebt. Durch Differentiation der Gleichung

$$u = mt + N$$

erhält man nun den Werth von du,

$$du = tdm + dN,$$

und es ergeben sich die Werthe von dm und dN folgendermafsen:

$$dm = -\frac{2h+r}{h+r}\cdot\cos\alpha\left[1-\frac{3h}{2h+r}\cdot\sin\alpha^2+\tfrac{3}{2}\cdot\frac{4h+r}{h+r}\cdot\sin\alpha^2\right]d\alpha$$

$$dN = -\frac{hr}{h+r}\cdot\cos\alpha\left[1+\tfrac{3}{2}\cdot\frac{4h+r}{h+r}\cdot\sin\alpha^2\right]d\alpha,$$

oder, wenn man noch statt $\cos\alpha$ seinen Werth $1-\frac{1}{2}\cdot\sin\alpha^2$ setzt,

$$dm = -\frac{2h+r}{h+r}\cdot d\alpha\left[1-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{8h+r}{2h+r}\cdot\sin\alpha^2+\tfrac{3}{2}\cdot\frac{4h+r}{h+r}\cdot\sin\alpha^2\right]$$

$$dN = -\frac{hr}{h+r}\cdot d\alpha\left[1+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{11h+2r}{h+r}\cdot\sin\alpha^2\right].$$

§. 281.

r Inhalt der ganzen Zone, welche reflectirtes uf die auffangende Ebene wirft, ist bekanntlich n $\alpha . d\alpha$, und der Inhalt des concentrischen Kreis- der das reflectirte Licht auffängt, $= 2\pi u du$. net man also die Dichtigkeit des Lichts auf dem egel durch ϱ', auf der auffangenden Tafel durch müssen die Producte aus den Flächen in die keiten gleich grofs seyn, wenn auf dem Wege cht verloren geht. Man hat also

$$\varrho' rr . \sin \alpha . d\alpha = \varrho u du$$

$$\varrho = \frac{\varrho' rr d\alpha}{u du} \cdot \sin \alpha.$$

nken wir uns auf den Fall, wo der leuchtende n sehr grofser Entfernung vom Spiegel sich be- so wird

$= 2 . \sin \alpha \ (1 + \frac{3}{2} . \sin \alpha^2)$
$= - r . \sin \alpha \ (1 + 2 . \sin \alpha^2)$
$= 2 d\alpha \ (1 + 4 . \sin \alpha^2)$
$= - r d\alpha \ (1 + \frac{11}{2} . \sin \alpha^2)$
$= \sin \alpha \ [2t - r + (3t - 2r) \sin \alpha^2]$
$= d\alpha \ [2t - r + (8t - \frac{11}{2} . r) \sin \alpha^2]$
$= \sin \alpha d\alpha \ [(2t - r) + (11t - \frac{11}{2} . r) \sin \alpha^2] (2t - r).$

hält also allgemein

$$= \frac{\varrho' rr}{(2t - r)^2} \left[1 - \frac{11t - \frac{11}{2} . r}{2t - r} \cdot \sin \alpha^2 \right].$$

§. 282.

r diesen besondern Fall, wo $\frac{r}{h} = o$ angenom- rd, lassen sich die genauern Formeln ohne zu Weitläufigkeit anwenden. Man hat nämlich (§. 268.)

$$= \frac{h . \sin 2\alpha + r . \sin \alpha}{h . \cos 2\alpha + r . \cos \alpha}$$

$$V = - \frac{hr . \sin \alpha}{h . \cos 2\alpha + r . \cos \alpha},$$

also für den Fall, daſs $\frac{r}{h} = o$ ist,

$$m = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \frac{\cos \alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$N = -r \cdot \sin \alpha \cdot \frac{1}{\cos 2\alpha}$$

$$u = \frac{2t \cdot \cos \alpha - r}{\cos 2\alpha} \cdot \sin \alpha$$

$$du = \frac{2t - r\,(\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha)}{\cos 2\alpha^2} \cdot d\alpha$$

$$\varrho = \frac{\varrho' r \cdot \cos 2\alpha}{2t \cdot \cos \alpha - r} \cdot \frac{r \cdot \cos 2\alpha^2}{2t - r \cdot \cos \alpha - r \cdot \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha}.$$

Geht die auffangende Ebene durch den Brennpunkt, so daſs also $2t = r$ ist, so läſst sich die im vorigen §. entwickelte Formel für die Bestimmung der Dichtigkeit nicht gebrauchen, weil dann die einzelnen Glieder unendlich groſs werden. Die genaue giebt hingegen

$$\varrho = \frac{\varrho' \cdot \cos 2\alpha}{\cos \alpha - 1} \cdot \frac{\cos 2\alpha^2}{(1 - \cos \alpha) - \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha},$$

und aus dieser findet sich, daſs, wenn die auffangende Tafel durch den Brennpunkt geht, in der Axe selbst die Dichtigkeit des Lichts unendlich groſs ist.

§. 283.

Wenn man in der Gleichung

$$du = \frac{2t - r\,(\cos \alpha + \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha)}{\cos 2\alpha^2} \cdot d\alpha$$

das Differentialverhältniſs $\frac{du}{d\alpha} = o$ setzt, so ergiebt sich

$$2t = r \cdot \cos \alpha + r \cdot \sin \alpha \cdot \sin 2\alpha,$$

oder auch, da $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ und $\sin \alpha^2 = 1 - \cos \alpha^2$, die Gleichung

$$\cos \alpha^3 = \tfrac{3}{2} \cdot \cos \alpha - \frac{t}{r},$$

und der hieraus folgende Werth des $\cos \alpha$ giebt die Gröſse des Winkels α an, für welchen u ein Maxi-

d, also den Halbmesser des Kreises, innerhalb dessen s reflectirte Licht aufgefangen wird. Man kann aber facher hierzu durch die Betrachtung des Ausdrucks 281.)

$$u = \sin\alpha\,[(2t - r) + (3t - 2r).\sin\alpha^2]$$

langen. So lange nämlich die beiden Glieder $2t - r$, $- 2r$ gleiche Zeichen haben, wächst u mit α fort- hrend, also findet der gröfste Werth von α dann tt, wenn man α' für α setzt, also den Werth von α, lcher für die Randstrahlen gilt. Diese Bedingung d immer Statt finden, solange die auffangende Tafel seits des Mittelpunkts C von dem Spiegel abwärts halten wird; ferner auch noch solange, als $3t > 2r$; denn dann hat man $3t - 2r$ und $2t - r$ positiv. ischen den Grenzen $t = r$ bis $t = \frac{2}{3}.r$ giebt also h der Werth von $\alpha = \alpha'$ den gröfsten Werth von Ist aber t zwischen den Grenzen $\frac{2}{3}.r$ und $\frac{1}{2}.r$ ent- ten, so haben beide Glieder ungleiche Zeichen. Von $= \frac{1}{2}.r$ bis $t = o$ sind aber beide Zeichen wieder ich. Es würde also blofs zwischen den Werthen $= \frac{2}{3}.r$ und $t = \frac{1}{2}.r$ nöthig seyn, einen andern Werth t α als den gewöhnlichen für die Randstrahlen gel- den α' zu substituiren. Allein man würde dann mei- ntheils einen Werth von α finden, der weit aufserhalb Grenze α' fällt, und bedenkt man, dafs von den den Gliedern, welche u ausdrücken, das erste im gemeinen bedeutend gröfser als das zweite ist, da Hohlspiegel immer nur wenig Grade fassen, so gt der Werth von u hauptsächlich von dem Gliede $- r).\sin\alpha$ ab, das mit α immer wächst, bis $\alpha = \alpha'$ d. Man darf also allgemein den Halbmesser des ises, der alles Licht in sich fafst,

$$u' = \sin\alpha'\,[(2t - r) + (3t - 2r).\sin\alpha'^2]$$

zen.

§. 284.

Nur der eine Fall ist noch näher zu betrachten, die auffangende Ebene dem Brennpunkt sehr nahe

liegt. Dann ist nämlich $2t - r$ beinahe Null, so dass dieses Glied leicht einerlei Werth mit dem darauf folgenden

$$(3t - 2r) \cdot \sin \alpha'^2$$

haben könnte, also die letzte Formel des vorigen §. unrichtig würde, weil die Bedingungen, auf welche sie gegründet ist, nicht mehr gültig sind. Man setze daher $2t - r = ir$, wo i eine sehr kleine Zahl ist, und substituirt man diesen Werth von t in die Gleichung (§. 281.)

$$du = da\,[(2t - r) + (8t - \tfrac{1}{2}r) \cdot \sin \alpha^2],$$

so erhält man, mit Vernachlässigung des Productes $i \cdot \sin \alpha^2$,

$$du = rda\,(i - \tfrac{3}{2} \cdot \sin \alpha^2),$$

also ist die Gleichung, welche den Werth von α für das Maximum von u bestimmt,

$$i - \tfrac{3}{2} \cdot \sin \alpha^2 = o.$$

Hieraus ergiebt sich $\sin \alpha^2 = \frac{2}{3} \cdot i$; da aber α nie gröfser als α' werden soll, so wird i den Werth $\frac{3}{2} \cdot \sin \alpha'^2$ nicht übersteigen dürfen, und man kann daher allgemein

$$i = \tfrac{3}{2} \cdot \sin \alpha'^2 \cdot \sin \beta^2,$$

$$\sin \alpha = \sin \alpha' \cdot \sin \beta$$

setzen, wo β einen völlig willkürlichen Winkel bedeutet. Solange also

$t = \frac{1}{2} \cdot r + \frac{3}{4} \cdot r \cdot \sin \alpha'^2 \cdot \sin \beta^2$, d. h. $t - \frac{1}{2} \cdot r > \frac{3}{4} \cdot r \cdot \sin \alpha'^2$ ist, wird der Werth von $\alpha = \alpha'$ keinem Maximum entsprechen. Nun hatten wir

$$u = \sin \alpha\,[(2t - r) + (3t - 2r) \cdot \sin \alpha^2],$$

also, wenn man vorigen Werth von t hierin substituirt, so wird

$$u = r \cdot \sin \alpha\,(\tfrac{3}{2} \cdot \sin \alpha'^2 \cdot \sin \beta^2 - \tfrac{1}{2} \cdot \sin \alpha^2),$$

oder, wenn man für das Maximum von u $\sin \alpha = \sin \alpha' \cdot \sin \beta$ setzt,

$$u' = r \cdot \sin \alpha'^3 \cdot \sin \beta^3.$$

§. 285.

Die ganze Lichtmenge, welche auf den Kreis fällt, wird gefunden, indem man die Dichtigkeit des Lichts

it dem Element des Kreises, das wir hier als einen ncentrischen unendlich schmalen Kreisring betrachteten, ultiplicirt, und das Product durch Integration über e ganze Kreisfläche ausdehnt. Nun war die Dichtigit $= \varrho$, das Element des Kreises $= 2\pi u du$, also ird die Lichtmenge

$$= 2\pi \int \varrho u du.$$

ach §. 281. hat man aber $\varrho u du = \varrho' rr . \sin\alpha . d\alpha$, also e Lichtmenge

$$L = 2\pi\varrho' rr \int \sin\alpha . d\alpha.$$

immt man das Integral von $\alpha = o$ bis $\alpha = \alpha'$, so giebt sich

$$L = 4\pi\varrho' rr . \sin \tfrac{1}{2}\alpha'^2,$$

d theilt man die Lichtmenge durch die Fläche des reises $= \pi uu$

$$= 4\pi . \sin \tfrac{1}{2}\alpha'^2 . \cos \tfrac{1}{2}\alpha'^2 \; (2t - r)^2,$$

it Vernachlässigung der höhern Potenzen von $\sin\alpha$, so hält man, wie in der Lehre von der Erleuchtung beesen wurde, die mittlere Dichtigkeit des Lichts auf r erleuchteten Fläche, und diese wird natürlich auch r scheinbaren Helligkeit proportional seyn. Bezeichnet an dieselbe durch ϱ^0, so kommt

$$\varrho^0 = \frac{\varrho'}{\cos \frac{1}{2}\alpha'^2} \cdot \left(\frac{r}{2t - r}\right)^2.$$

ählt man die Abstände statt vom Mittelpunkt der Krümung des Spiegels vom Brennpunkte aus, und setzt ese Abstände $= t'$, so ist $t = \frac{1}{2}.r + t'$, $2t - r = 2t'$, d wenn man die Brennweite des Spiegels selbst $\frac{1}{2}.r = f$ mmt, so kommt

$$\varrho^0 = \frac{\varrho'}{\cos \frac{1}{2}\alpha'^2} \cdot \frac{ff}{t't'}.$$

an sieht hieraus, dafs nach dieser Theorie die Erchtung der Ebene in gleichen Abständen auf beiden iten des Brennpunkts auch gleich grofs sind.

§. 286.

Wir haben nun freilich bei diesen Untersuchungen er die Erleuchtung einer Ebene vermittelst des von

einem Hohlspiegel reflectirten Lichts, den Umstand nic
weiter berücksichtigt, dafs nicht von allen Stellen d
Spiegels das Licht unter gleichen Winkeln zurückg
worfen wird, wodurch freilich, streng genommen, ei
Abänderung der gefundenen Formeln Statt finden könnt
Allein nach dem, was in §. 257. über die bei verschi
denen Einfallswinkeln Statt findende Vermehrung od
Verminderung der zurückgeworfenen Lichtmenge g
sagt ist, sieht man leicht ein, dafs, da der zurückg
worfene Strahl bei den gewöhnlichen Hohlspiegeln imm
nur wenige Grade von dem Einfallslothe abweicht, di
Aenderung der Lichtstärke nur äufserst gering, un
wohl immer unmerklich seyn wird. Man sollte als
durchaus geneigt seyn, zu glauben, dafs die im vorige
§. entwickelte Formel über die Erleuchtung von Ebenen
die in verschiedenen Entfernungen vom Spiegel aufge
stellt sind, da sie auf lauter Sätzen beruht, gegen di
im Allgemeinen, so weit wir die Natur des Lichts ken-
nen, nichts einzuwenden ist, mit der Erfahrung über-
einstimmen müfste. Nichts desto weniger findet hierbe
ein bedeutender Unterschied zwischen der Theorie und
der Beobachtung Statt, indem z. B., wenn man in
gleichen Entfernungen diesseits und jenseits des Brenn-
punkts eines Hohlspiegels weifse Flächen aufstellt, die
jenseits des Brennpunkts aufgestellte bei Weitem schwä-
cher erleuchtet erscheint, als die andere, obgleich der
Theorie nach, in gleichen Abständen vom Brennpunkt,
die Erleuchtung auch gleich seyn sollte.

§. 287.

Um die Gröfse der Schwächung des Lichts hinter
dem Brennpunkt, in Vergleich mit der Lichtstärke in
derselben Entfernung vor dem Brennpunkt, genauer
auszumitteln, stellte Captain Kater eine Reihe von
Versuchen an, die er in den *Philosophical Transactions
of the Royal Society of London for the Year* 1814
genauer beschrieben hat (pag. 234 bis 247.), und wir

n hier einen kurzen Auszug der von ihm erhaltenen ltate geben.

Der bei diesen Versuchen angewandte Hohlspiegel aus einem sehr schönen Newtonianischen Telescop mmen; der Durchmesser seiner Oeffnung betrug Zoll, seine Brennweite 22,5 Zoll; der Winkel α' le also durch die Gleichung $\sin \alpha' = \frac{1}{4} \cdot \frac{4,6}{22,5} = \frac{23}{450}$ ben werden, d. h. $\alpha' = 2^0 55' 47''$. Kater zog nun einer Karte eine Linie, die er in Zehntheile eines s theilte, und fing das von einer vierzehn Fufs rnten Lichtflamme reflectirte Licht auf, zuerst diesdes Brennpunkts, prägte sich die Helligkeit des chteten Kreises so genau als möglich ein, und dann die Karte jenseits des Brennpunkts, bis ihm Helligkeit gleich grofs schien. Zugleich wurden die hmesser der auf dem Blatte erscheinenden leuchn Kreise gemessen. Bezeichnen wir den Durchr vor dem Brennpunkt durch $2U^0$, den Durchr des Kreises hinter dem Brennpunkt durch $2U'$, b ihm eine erste Reihe von Versuchen

$2U^0$	= 2,4 Zoll;	$2U'$	= 1,7 Zoll
-	= 2,5 - ;	-	= 1,7 -
-	= 2,5 - ;	-	= 1,7 -
-	= 2,5 - ;	-	= 1,8 -

zweite Reihe von Versuchen gab

$2U^0$	= 2,43 Zoll;	$2U'$	= 1,575
-	= 2,43 - ;	-	= 1,600
-	= 2,43 - ;	-	= 1,450
-	= 2,43 - ;	-	= 1,625
-	= 2,43 - ;	-	= 1,625
-	= 2,43 - ;	-	= 1,600
-	= 2,43 - ;	-	= 1,650
-	= 2,43 - ;	-	= 1,500
ttel $2U^0$	= 2,43 ;	$2U'$	= 1,578.

§. 288.

Obgleich nun Kater diese Beobachtungen in Verng mit mehrern Personen angestellt hatte, die

ebenfalls ihr Urtheil über die Gleichheit der Helligkeit abgeben mufsten, so schien es ihm doch der Genauigkeit in der Beurtheilung etwas nachtheilig zu seyn, dafs man sich bei der Vergleichung auf die Treue des Gedächtnisses rücksichtlich der Helligkeit des diesseits des Brennpunkts liegenden Kreises verlassen mufste. Er suchte daher den Versuch so einzurichten, dafs man beide Bilder zu gleicher Zeit erhielt. Er fand dann, dafs in folgenden Entfernungen von dem Bilde der Lichtflamme die Erleuchtungen gleich stark waren, wenn wir die Entfernungen nach dem Spiegel zu durch T^0, von dem Spiegel abwärts durch T' bezeichnen

T^0	= 15,25 Zoll;	T'	= 10 Zoll
-	= 15,75 - ;	-	= 10 -
-	= 15,30 - ;	-	= 10 -
-	= 15,13 - ;	-	= 10 -
-	= 16,25 - ;	-	= 10 -
-	= 15,25 - ;	-	= 10 -
-	= 14,25 - ;	-	= 10 -
-	= 15,37 - ;	-	= 10 -
-	= 14,75 - ;	-	= 10 -
Mittel T^0	= 15,26 Zoll;	T'	= 10 Zoll.

§. 289.

Bezeichnen wir, wie früher, den Abstand des leuchtenden Punktes vom Mittelpunkt der Krümmung des Spiegels durch h, den Halbmesser der Krümmung des Spiegels durch r, den Abstand des Durchschnitts des zurückgeworfenen Strahls mit der Axe durch x, so ist (§. 263.)

$$x = \frac{rh}{2h \cdot \cos\alpha + r}$$

Nun ist in vorliegendem Beispiel $r = 2f = 45$ Zoll, $h + r = 14$ Fufs $= 168$ Zoll, $h = 123$ Zoll, also wird

$$x = \frac{41 \times 45}{82 \cdot \cos\alpha + 15}$$
$$= 19{,}02 + 8{,}04 \cdot \sin\alpha^2.$$

Da nun $\sin\alpha' = \frac{23}{450}$, so beträgt das zweite Glied höch-

ens 0,02 Zoll, und wir können also allgemein $x = 19{,}03$ oll setzen. Bezeichnet man ferner den Abstand der hneidenden Ebene vom Mittelpunkt der Krümmung es Spiegels durch t, so hat man, nach §. 279., den lalbmesser des erleuchteten Kreises

$$u = mt + N,$$

o m und N folgende Werthe haben:

$$m = \frac{2h + r}{h + r} \cdot \sin \alpha' = 0{,}08853$$

$$N = -\frac{hr}{h + r} \cdot \sin \alpha' = -1{,}68393,$$

a man nach §. 283. in den allgemeinen Ausdrücken der röfsen m und N, um das Maximum von u zu erhal-n, nur α durch seinen gröfsten Werth α' zu ersetzen raucht. Nun hat man aus §. 287. die zwei beobachteten Verthe von

$$u = 1{,}215; \quad u = -0{,}789,$$

nd hieraus ergeben sich die entsprechenden Werthe von t

$$t = 32{,}75; \quad t = 10{,}11.$$

ieht man hiervon den Werth von $x = 19{,}03$ ab, so bleibt

$$T^0 = 13{,}72, \quad T' = 8{,}92,$$

so ist nach der in §. 287. angegebenen Reihe von eobachtungen die Erleuchtung in den Entfernungen von 3,74 Zoll diesseits des Sammlungspunktes der Strahlen, nd 8,93 Zoll jenseits desselben gleich grofs, mithin das erhältnifs $\frac{T^0}{T'} = 15{,}75$; welches Resultat mit dem in .288. so genau übereinstimmt, als es die Natur der ache nur erlauben mag.

§. 290.

Hierauf nahm Captain Kater zwei Lampen, deren ichtflammen so genau als möglich gleich gemacht wa-en, stellte die eine in der constanten Entfernung von 16 Fufs vom Spiegel auf, und die andere nach und nach in den Abständen von 5, 6, 7 Fufs. Da die Lampen etwas neben die Axe des Spiegels auf verschiedene

Seiten gestellt waren, so konnten die reflectirten Li
kegel abgesondert von einander aufgefangen werd
Man nahm nun zwei gleich grofse, ein Viertelzoll im Dur
messer haltende Scheibchen von weifsem Papier, t
schob sie zwischen den beiden Sammlungspunkten o
Bildern der beiden Lampen hin und her, bis be
Scheibchen gleich stark erleuchtet erschienen. Es
nun bekannt, dafs das Bild der entferntesten Lam
dem Spiegel näher liegen mufste, als das der nähe
Bezeichnen wir das Bild der entfernteren Lampe dur
A, das der nähern durch B, so fand Kater, dafs
5 Fufs Entfernung der Lampe der Abstand des Schei
chens von A 1,745 Zoll, der von B 8,765 Zoll betru
wenn die Erleuchtung gleich grofs war. Bei 6 Fufs E
fernung war der Abstand von $A = 1{,}52$, von $B = 5{,}$
Bei 7 Fufs Entfernung war der Abstand von $A = 1{,}$
von $B = 4{,}01$. Es versteht sich von selbst, dafs
Abstände von A hinter dem Sammlungspunkt, die
B hingegen vor demselben gemessen sind.

§. 291.

Wir haben in §. 285. die mittlere Dichtigkeit d
Lichts in einem Kreise, dessen Entfernung vom Bren
punkt $= t'$ ist, unter der Voraussetzung entwick
dafs die Entfernung des leuchtenden Punktes unendli
grofs sey, und es ist nur noch nöthig, diese mittl
Dichtigkeit oder Helligkeit für den allgemeinen Fall d
zustellen, wo der leuchtende Punkt eine beliebige E
fernung hat. Uebrigens vernachlässigen wir hierbei a
Potenzen von α. Die ganze auf den Kreis fallen
Lichtmenge ist, nach §. 285.,

$$L = 4\pi\varrho' . rr . \sin \tfrac{1}{2}\alpha'^2,$$

und theilt man diesen Ausdruck durch die Fläche d
Kreises $= \pi uu$, so kommt die mittlere Dichtigkeit d
Lichts

$$\varrho^0 = 4\varrho' \cdot \frac{rr}{uu} \sin \tfrac{1}{2}\alpha'^2.$$

ach §. 289. ist aber

$$u = mt + N$$
$$= \frac{\sin \alpha'}{h + r} \cdot [t \cdot (2h + r) - hr],$$

lso kommt, wenn man den Divisor $\cos \frac{1}{2}\alpha'^2 = 1$ setzt,

$$\varrho^0 = \frac{\varrho' rr \cdot (h + r)^2}{[t \cdot (2h + r) - hr]^2}.$$

Die Gröfse t ist hier der Abstand der schneidenden Ebene vom Mittelpunkt der Krümmung nach dem Spiegel zu gezählt. Setzt man nun den Abstand derselben vom Bilde des leuchtenden Punktes $= t'$, so ist

$$t = \frac{hr}{2h + r} + t'$$
$$\varrho^0 = \frac{\varrho' rr \cdot (h + r)^2}{t't' \cdot (2h + r)^2}.$$

Eben so ist h der Abstand des leuchtenden Punkts vom Mittelpunkt der Krümmung des Spiegels; setzt man daher seinen Abstand vom Spiegel selbst $= h'$, so ist

$$h' = h + r,$$

nd wenn $f = \frac{1}{2} \cdot r$ die Brennweite bedeutet, so kommt

$$\varrho^0 = \frac{\varrho' ff h' h'}{t't' \cdot (h' - f)^2}.$$

§. 292.

Um diese Formel zur Vergleichung der in §. 290. ngegebenen Beobachtungen anwenden zu können, bezeichnen wir die Werthe von ϱ^0, ϱ', h', t' für die entrnteste Lampe durch R^0, R', H', T', für die nächste ampe durch R^{00}, R'', H'', T'', so hat man die beien Gleichungen

$$R^0 = \frac{R' ff \cdot H' H'}{T' T' \cdot (H' - f)^2}$$
$$R^{00} = \frac{R'' ff \cdot H'' H''}{T'' T'' \cdot (H'' - f)^2}.$$

Hieraus engiebt sich

$$\frac{R^0}{R^{00}} = \frac{R'}{R''} \cdot \left(\frac{H' T''}{H'' T'}\right)^2 \cdot \left(\frac{H'' - f}{H' - f}\right)^2.$$

Nun sind aber R', R'' die Dichtigkeiten des Lichts auf der Spiegeloberfläche, das von den in den Entfernungen H', H'' aufgestellten Lampen herkommt, und da sich, bei gleicher Intensität der Lichtflammen, diese Dichtigkeiten umgekehrt wie die Quadrate der Entfernungen der leuchtenden Punkte verhalten müssen, so hat man

$$R' . H'H' = R'' . H''H'',$$

folglich bleibt blofs

$$\frac{R^0}{R^{00}} = \left(\frac{T''}{T'}\right)^2 \cdot \left(\frac{H'' - f}{H' - f}\right)^2.$$

§. 293.

Aus den in §. 290. angeführten Beobachtungen ergeben sich nun folgende gleichzeitige Werthe der in dieser Formel vorkommenden Gröfsen, wenn alles in Zollen ausgedrückt wird,

$H' =$	192;	$T' =$	− 1,745;	$H'' =$	60;	$T'' =$	+ 8,765
	192;		− 1,520;		72;		+ 5,710
	192;		− 1,230;		84;		+ 4,010

und man erhält hieraus die Werthe von

$$\frac{R^0}{R^{00}} = 1{,}235;\ 1{,}204;\ 1{,}399,$$

also ziemlich bedeutend von der Einheit abweichend, während die Beobachtung die Helligkeiten als gleich grofs angab. Kater bekennt nun freilich selbst, dafs bei dieser Reihe von Versuchen die gleiche Helligkeit sehr schwer zu bestimmen sey, da die Scheibchen sich sehr nahe bei den Bildern der Lampenflamme selbst befanden, und daher der Kreis theils sehr klein, theils in seinen einzelnen Theilen sehr ungleich erleuchtet erschien, so dafs die mittlere Helligkeit schwierig zu bestimmen war. Aufserdem wurde die Vergleichung noch durch den Umstand erschwert, dafs hinter dem Sammlungspunkt das aufgefangene Licht eine viel dunklergelbe Farbe besafs, als vor demselben.

§. 294.

Es dürfte wohl schwierig seyn, eine genaue auf den Calcul gegründete Erklärung der in den vorigen

Paragraphen angeführten Erscheinung über die Schwächung des Lichts und ungleiche Lichtstärke in gleichen Abständen vor und hinter dem Sammlungspunkt zu geben. Man hat gesagt, das Licht störe sich gegenseitig bei seinem Durchgang durch den Sammlungspunkt, wo eine grofse Lichtmasse in einen sehr kleinen Raum zusammengedrängt wird, wodurch dann die besagte Erscheinung freilich erklärt seyn würde. Unter Beihülfe dieser Hypothese würde man also annehmen müssen, die Lichtstärke werde plötzlich in einem bestimmten Verhältnifs verändert, sobald man die Durchschnitte des Lichtkegels betrachtet, welche hinter dem Sammlungspunkt der Strahlen oder dem Bilde liegen. Das Verhältnifs dieser Verminderung werde durch die Zahl m angedeutet, so hat man die Lichtstärke in der Entfernung t' hinter dem Sammlungspunkt

$$= \frac{m\varrho' ffh'h'}{t't'.(h'-f)^2},$$

und in der Entfernung t'' vor dem Sammlungspunkt

$$= \frac{\varrho' ffh'h'}{t''t''.(h'-f)^2},$$

folglich erhält man das Verhältnifs beider Lichtstärken $= \frac{mt''t''}{t't'}$. Setzt man nun hierin, den Versuchen des §. 288. zufolge,

$$t' = 10 \text{ Zoll}, \quad t'' = 15{,}26,$$

und bedenkt, dafs für diese Entfernungen die Lichtstärken als gleich grofs beobachtet wurden, so ergiebt sich

$$m = \left(\frac{1000}{1526}\right)^2 = 0{,}4294.$$

Aus den in §. 289. angegebenen Beobachtungen hatte man ferner

$$t' = 8{,}91 \text{ Zoll}, \quad t'' = 13{,}72 \text{ Zoll},$$

folglich $m = \left(\frac{891}{1372}\right)^2 = 0{,}4218$, welcher Werth von dem vorigen äufserst wenig abweicht, und da beide

Beobachtungsreihen auf ganz verschiedene Weise angestellt sind, so darf man wohl an der Richtigkeit des Resultats nicht zweifeln.

Nimmt man nun aber die in §. 290. angegebenen und in dem vorigen §. berechneten Versuche, so müßten die daselbst gefundenen Verhältnißzahlen

1,235; 1,204; 1,399,

wenn sie mit 0,4294 multiplicirt werden, die Einheit geben, welches aber keinesweges der Fall ist, indem die Producte dann noch mehr von der Einheit verschieden sind, als die anfänglichen Verhältnißzahlen selbst. Man wird also genöthigt seyn, diese Hypothese einer plötzlichen Schwächung des Lichts, bei der Durchkreuzung der Strahlen im Sammlungspunkt, bei Seite zu legen. Wollte man annehmen, daſs die Abnahme der Lichtstärke continuirlich nach den Gesetzen der gewöhnlichen Lichtschwächung Statt fände, so ließe sich folgendermaſsen eine Formel dafür finden. Das auf den unendlich kleinen Raum VM fallende Licht (Fig. 36.) wird so zurückgeworfen, daſs es immer in dem pyramidalischen oder kegelförmigen Raum MPV enthalten ist. Insofern bloſs die Lichtstrahlen betrachtet werden, für welche der Winkel α sehr klein ist, kann man $VP = AP =$ der Entfernung des Sammlungspunktes der Strahlen vom Spiegel setzen; wir bezeichnen diese Entfernung durch b. Gesetzt nun, in der Entfernung s vom Spiegel sey die Dichtigkeit ϱ, in der Entfernung $s + ds$, $\varrho + d\varrho$, so besteht $d\varrho$ aus zwei Theilen, $d\varrho'$, $d\varrho''$, von denen der erste die Schwächung des Lichts andeutet, insofern die Verminderung des Lichts so betrachtet wird, als ob es in einer nur zum Theil durchsichtigen Masse fortginge, und die wir in vorliegendem Fall als aus der Störung der Strahlen hervorgehend ansehen können. Dann hat man $d\varrho' = -n\varrho ds$. Der zweite Theil drückt die Vermehrung der Dichtigkeit des Lichts aus, weil die Lichtmasse in einen immer schmäler werdenden Raum zusammengedrängt wird. Dieser be-

mt sich aus der Gleichung

$$\varrho . (b - s)^2 = (\varrho + d\varrho'') . (b - s - ds)^2,$$

nittelst welcher man $d\varrho'' = \frac{2\varrho ds}{b-s}$ erhält. Es ergiebt

also, da $d\varrho = d\varrho' + d\varrho''$ seyn mufs, die Differen-
gleichung

$$d\varrho = - n\varrho ds + \frac{2\varrho ds}{b - s}.$$

idirt man die ganze Gleichung durch ϱ, und integrirt
an, so erhält man

$$\log \varrho = - ns - 2 . \log (b - s) + \text{Const},$$

l, wenn wir für $s = o$ die Dichtigkeit $\varrho = \varrho'$ setzen,

$$\log \varrho' = - 2 . \log b + \text{Const},$$

glich, indem die Constante eliminirt wird, und man
gleich von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht,

$$\varrho = \varrho' \cdot \left(\frac{b}{b - s}\right)^2 \cdot e^{- ns.}$$

e Sammlungsweite b wird nach unsern frühern Be-
chnungen $= \frac{h'f}{h' - f}$, so wie der Werth von

$= b - t' = \frac{h'f}{h' - f} - t'$ ist. Man hat daher

$$\varrho = \varrho' \cdot \frac{bb}{t't'} \cdot e^{- n . (b - t')}$$

d die hierin vorkommende Gröfse n liefse sich nach
n Beobachtungen des §. 288. bestimmen. Setzt man
mlich für $t' = T^0$, $\varrho = R^0$, für $t' = T'$, $\varrho = R'$,
kommt

$$R^0 = \varrho' \cdot \frac{bb}{T^0 T^0} \cdot e^{- n . (b - T^0)}$$

$$R' = \varrho' \cdot \frac{bb}{T' T'} \cdot e^{- n . (b - T')}$$

$$\frac{R^0}{R'} = \left(\frac{T'}{T^0}\right)^2 \cdot e^{- n . (T' - T^0)}$$

d da den Versuchen zufolge für

$T^0 = 15{,}26$ Zoll, $T' = - 10$ Zoll, $R^0 = R'$

ird, so hat man

$$\left(\frac{763}{500}\right)^2 = e^{n \,.\, 25{,}26}$$

$$n = \frac{\log 763 - \log 500}{12{,}63} = \frac{0{,}42265}{12{,}63} = \frac{1}{30}.$$

Es würde also unter der angeführten Hypothese die Erleuchtung durch

$$\varrho = \varrho' \cdot \frac{bb}{t't'} \cdot e^{-\frac{b-t'}{30}}$$

ausgedrückt werden müssen, und man sieht leicht, daſs in gleichen Entfernungen vor und hinter dem Sammlungspunkt die Erleuchtungen sich wie $e^{\frac{t'}{30}} : e^{-\frac{t'}{30}}$ verhalten werden.

§. 295.

In den vorigen Paragraphen, von §. 278. an, haben wir bei der Erleuchtung der auffangenden Fläche immer bloſs den Fall betrachtet, wo das Licht von einem leuchtenden Punkt ausging; es ist nun aber auch noch nöthig, diesen Gegenstand rücksichtlich der Erleuchtung etwas genauer zu untersuchen, und den allgemeinern Fall zu betrachten, wo die Erleuchtung durch eine ausgedehnte Oberfläche bewirkt wird, und also die leuchtenden Elemente nicht bloſs in der Axe des Spiegels liegen, wobei wir jedoch von der eben angegebenen Lichtschwächung abstrahiren. Die allgemeinen Formeln für die Lage des Bildes eines Punktes auſserhalb der Axe des Spiegels, haben wir §. 276. angegeben. Es sey nun die Gröſse irgend eines Elements der leuchtenden Oberfläche $= dt$, die Lichtstärke $= \lambda$, der Ausfluſswinkel des Strahls $= 6$, der Einfallswinkel desselben auf dem Spiegel $= \varepsilon$, das Element des Spiegels $= ds'$, die gegenseitige Entfernung beider Elemente $= R$, so ist die auf den ganzen Spiegel von diesem Element ds fallende Lichtmenge §. 192.

$$L = \lambda ds \int \frac{ds' \,.\, \sin \varepsilon \,.\, \sin 6}{RR},$$

nn man die weitläufigen Rechnungen nicht scheuen
o liefse sich aus dieser Formel durch Integration
gliche Lichtmenge für jede Entfernung R und
röfse des Spiegels finden.

§. 296.

a aber die Entfernungen der Elemente der leuch-
Oberfläche von dem Spiegel gegen die Breite
ie Oeffnung des Spiegels bei den meisten An-
gen immer sehr grofs sind, so wird man für die
Ausdehnung des Spiegels die Gröfsen ε, ϑ, R
stant betrachten können, und zwar darf man den
winkel $\varepsilon = 90^0$ setzen, da die Richtung des
nden Objects immer nur einen geringen Winkel
r Axe des Spiegels macht. Hierdurch erhält man
htmenge, welche das Element auf den Spiegel wirft,

$$L = \lambda \cdot ds \cdot \frac{s' \cdot \sin \vartheta}{RR},$$

die Oberfläche des Spiegels bedeutet. Diese ist
. 281.

$$= 2\pi rr \int d\alpha \cdot \sin \alpha$$
$$= 4\pi \, (r \cdot \sin \tfrac{1}{2}\alpha)^2.$$

lem kann man für die Gröfse R, im Mittel, den-
Abstand vom Spiegel setzen, wo die nach dem
l gezogene Linie durch den Mittelpunkt der
ung desselben geht. Bezeichnet man dann die
ung des Elements der leuchtenden Oberfläche
ittelpunkt der Krümmung, wie früher in §. 276.,
H, so wird $R = H + r$, folglich

$$L = 4\pi\lambda ds \cdot \sin \vartheta \cdot \left(\frac{r \cdot \sin \tfrac{1}{2}\alpha}{H + r}\right)^2.$$

§. 297.

as den Ausflufswinkel ϑ betrifft, so kann derselbe
ls constant betrachtet werden, sobald nur die
ung des Elements einigermafsen bedeutend gegen
mensionen des Spiegels ist, und man kann für
mittlern Werth denjenigen wählen, welcher dann

§. 299.

Durch dieses Element geht alles vom Spiegel zurückgeworfene Licht, welches vorher vom correspondirenden Element der leuchtenden Oberfläche auf den Spiegel gefallen war. Nehmen wir nun an, dafs das zurückgeworfene Licht im Verhältnifs von $1 : \mu$ geschwächt werde, und bedenken, dafs die Fläche des Spiegels

$$= 4\pi rr \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\alpha'^2$$

war, die wir durch s' bezeichnen wollen, so bleibt die Lichtmenge, welche durch das besagte Element geht,

$$= \lambda\mu \,.\, d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi \,.\, s' \,.\, \left(\frac{H}{H+r}\right)^2,$$

und theilen wir diesen Ausdruck durch die Gröfse des Elements

$$= \left(\frac{Hr}{2H+r}\right)^2 . d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi,$$

so kommt die an dieser Stelle des Bildes Statt findende Dichtigkeit des Lichts

$$= \lambda\mu \cdot \frac{s'}{(H+r)^2} \cdot \left(\frac{2H+r}{r}\right)^2.$$

Bezeichnet man die Brennweite des Spiegels durch f, und nimmt an, die Entfernung des leuchtenden Gegenstandes sey unendlich grofs, so wird die Dichtigkeit des Lichts durch

$$\lambda\mu \cdot \frac{s'}{ff}$$

ausgedrückt, also ist sie bei gleichbleibendem Glanze des leuchtenden Objects und gleicher physischer Beschaffenheit der Materie, aus welcher der Spiegel besteht, in directem Verhältnifs der Oberfläche des Spiegels und in umgekehrtem quadratischem der Brennweite desselben.

§. 300.

Nach §. 297. hat man die von einem Element des leuchtenden Gegenstandes auf die Fläche des Spiegels fallende Lichtmenge

$$= s' . \lambda . \left(\frac{H}{H+r}\right)^2 . d\varphi . d\psi . \cos\psi .$$

nsofern nun H als sehr grofs angenommen wird, und ie Dimensionen des leuchtenden Körpers sehr klein usfallen, was gewöhnlich bei allen Gegenständen Statt indet, deren Bilder man durch Hohlspiegel entstehen ifst, kann man H ohne merklichen Fehler als unabängig von den Winkeln φ und ψ betrachten. Um aher die ganze auf den Spiegel fallende Lichtmenge zu rhalten, braucht man nur das Integral $\int d\varphi . d\psi . \cos\psi$ wischen den gehörigen Grenzen zu nehmen. Man sieht ber leicht, dafs der durch die Integration entstehende usdruck nichts anders seyn kann, als die Fläche, elche der leuchtende Gegenstand auf einer Kugelfläche inzunehmen scheint, die mit einem der Einheit gleichen Halbmesser aus dem Mittelpunkt der Krümmung des piegels beschrieben ist. Bezeichnen wir diesen Ausruck durch $\mathfrak{A}$, so wird die ganze Lichtmenge, welche uf dem Spiegel befindlich ist,

$$= s' \lambda \mathfrak{A} . \left(\frac{H}{H+r}\right)^2 ,$$

lso die mittlere Dichtigkeit des Lichts auf dem Spiegel, ndem man durch seine Oberfläche $= s'$ dividirt,

$$= \lambda \mathfrak{A} . \left(\frac{H}{H+r}\right)^2 .$$

§. 301.

Die Lichtmenge, welche durch ein Element des ildes geht, ist nach §. 299.

$$= \lambda\mu . s' . \left(\frac{H}{H+r}\right)^2 . d\varphi . d\psi . \cos\psi ,$$

lso, wenn man nach den Angaben des vorigen Paragraphen die Gröfse $d\varphi . d\psi . \cos\psi$ integrirt, und bemerkt, dafs für das Bild die Winkel φ, ψ vollkommen zwischen denselben Grenzen genommen werden müssen, als für das leuchtende Object, so wird die Lichtmenge, welche das ganze Bild enthält,

§. 29

Durch dieses Element g
rückgeworfene Licht, welch
direnden Element der leuc
Spiegel gefallen war. Nel . cos ψ,
zurückgeworfene Licht i
schwächt werde, und b
Spiegels

$$= 4\pi rr$$

war, die wir durch s in die vorige
Lichtmenge, welche d ist, so kom

$$= \lambda\mu . d\varphi . d$$ auf dem Bilde

und theilen wir di $\Big)^2 . \frac{1}{rr}$.
Elements es Lichts auf dem S

$$= \Big(\frac{H}{2H}$$ die relative Dichtigke

so kommt die a $\Big)^2$.
Dichtigkeit d

= die einer mit dem
Kugelfläche zug

Bezeichnet beschriebene Kuge
und nimm entstehende F
standes s $= 2rr$, folglich
Lichts in Bilde durch

ausge eine Kugel
des $= 4\pi rr$. si
scha voriger Ausd
steh man anni
gel
de sind. Ist fe
sehr groſs,

und dann erhält

§. 302.

...nen darf man wohl bei gewöhnlichen
$\ldots = \frac{3}{5}$ setzen, so dafs also $\frac{2}{5}$ des auffal-
... verloren gehen. Die relative Dichtigkeit
...ird also unter dieser Annahme die des direct
... Lichts übertreffen, sobald $12\alpha'\alpha' > 5\delta\delta$ ist.
...n nun die Brennweite des Spiegels f, die
...effnung des Spiegels ω, so ist sehr nahe $\alpha = \frac{\omega}{2f}$,
... doppelte Brennweite den Halbmesser der Krüm-
... des Spiegels giebt, folglich läfst sich auch die
...igkeit durch

$$\frac{3}{5} \cdot \frac{\omega\omega}{ff\delta\delta}$$

...ücken. Ist also z. B. die halbe Oeffnung des Spie-
... = 1 Fufs, die Brennweite = 10 Fufs, und das
...t, die Sonne, für welche $\delta = 16$ Minuten wird,
...rd die Dichtigkeit des Lichts im Sonnenbilde, das
...m Brennpunkt befindet, = 277, wenn die des direct
...lenden Sonnenlichts als Einheit angenommen wird.
...e alles Licht vom Spiegel wieder zurückgeworfen,
...ürfte diese Zahl noch mit $\frac{5}{3}$ multiplicirt werden.

§. 303.

Wenn nun die Verstärkung des Lichts der Sonne
eine höhere Temperatur hervorbringt, so wird das
...enbild in den Brennpunkten der Hohlspiegel, da
...bst das Licht so stark concentrirt erscheint, eine
...e Hitze hervorzubringen im Stande seyn, und man
...t in den Lehrbüchern der Physik viele Beispiele
...den Wirkungen, welche die Hitze in den Brenn-
...ten grofser Hohlspiegel oder sogenannter Brenn-
...gel hervorbringt. Man sieht übrigens aus dem Aus-
...ke $\frac{3}{5} \cdot \frac{\omega\omega}{ff\delta\delta}$, dafs bei gleicher Brennweite f des
...gels, die Erhitzung desto gröfser ausfallen wird, je

gröfser der Halbmesser ω der Oeffnung des Spiegels ist. Allein man darf doch das Verhältnifs $\frac{\omega}{f}$ nicht sehr wachsen lassen, weil sonst die Abweichung wegen der Kugelgestalt zu stark wird, und das reflectirte Sonnenlicht sich aus diesem Grunde auf einen bedeutend gröfsern Raum verbreitet, als wir in den vorigen Rechnungen angenommen haben, die blofs in dem Falle zulässig sind, wenn der Winkel α oder das Verhältnifs $\frac{\omega}{2f}$ wenige Grade nicht übersteigt. Sobald $3\omega\omega = 5ff\delta\delta$ wird, ist das direct auffallende Sonnenlicht mit dem reflectirten von gleicher Dichtigkeit; und da $\delta = \frac{1}{215}$, so folgt, dafs, sobald $\frac{f}{\omega} = 43.\sqrt{15}$ ist, oder die Brennweite des Spiegels den Halbmesser seiner Oeffnung ungefähr 160 mal übertrifft, gar keine Verdichtung des Lichts Statt finden wird. Zugleich sieht man auch, dafs, wenn man vermittelst eines Brennspiegels auf grofse Entfernungen zünden will, der Spiegel selbst eine bedeutende Gröfse besitzen mufs. Wollte man z. B. auf eine Entfernung von 400 Fufs eine 50fache Verstärkung des Sonnenlichts hervorbringen, so hätte man $f = 400$ Fufs, und ω müfste aus der Gleichung

$$50 = \frac{3}{5} \cdot \frac{\omega\omega}{ff\delta\delta}$$

bestimmt werden. Dies giebt

$$\omega = \frac{400}{215} \cdot 5 \cdot \sqrt{\frac{10}{3}} = 17 \text{ Fufs},$$

also müfste der Halbmesser der Oeffnung des Spiegels 17 Fufs betragen, und derselbe aus einer Kugel von 800 Fufs Halbmesser gebildet seyn.

§. 304.

Es ist nun noch nothwendig, die scheinbare Helligkeit der Elemente des Bildes zu bestimmen. Hierbei darf man aber nicht so verfahren, wie wir früher bei

rechnung der scheinbaren Helligkeit wirklicher
nder Objecte thaten; denn obgleich ein Bild im
inen freilich als Object betrachtet werden kann,
t doch der Hauptunterschied bei denselben Statt,
n einem Element einer leuchtenden Oberfläche
ht nach allen Seiten hin ausströmt, während aus
ment eines Bildes nur nach bestimmten Richtun-
e von der Zurückwerfung abhängen, das Licht
n kann. Gesetzt nun, das Auge befinde sich
Linie, die durch den Mittelpunkt der Krüm-
es Spiegels und das Element des Bildes geht,
en blofs diejenigen zurückgeworfenen Strahlen
gelangen können, welche innerhalb der Basis
geloberfläche auf dem Spiegel liegen, die da-
efunden wird, dafs man von allen Punkten der
ie der Pupille Linien durch das Element des
eht, und dieselben bis an die Fläche des Spie-
ängert. Bezeichnet man nun den Inhalt dieser
is auf dem Spiegel durch σ, den Flächeninhalt
ille durch a, den Abstand des Auges vom Ele-
s Bildes durch y, den Abstand des Elements
gel durch u, so hat man die Proportion

$$\sigma : a = uu : yy,$$

aus folgt $\sigma = \frac{auu}{yy}$. Der Abstand des Elements
gel ist

$$= r - \frac{Hr}{2H + r} = \frac{(H + r).r}{2H + r},$$

lt man auch

$$\sigma = a \cdot \left(\frac{H + r}{2H + r}\right)^2 \cdot \frac{rr}{yy}.$$

§. 305.

wird also, wenn σ kleiner als die Fläche des
ist, für das Auge, bei der Betrachtung des
des Bildes, die Sache sich so verhalten, als
Spiegel blofs die Gröfse σ hätte, indem alle
Strahlen, die von der aufserhalb liegenden

Fläche des Spiegels zurückgeworfen werden, die Pup
nicht treffen können, also für das Auge nicht vorh
den sind.

Wir fanden nun §. 299., dafs bei einer Fläche des Sp
gels $= s'$ die Lichtmenge, welche durch das Element ge

$$= \lambda\mu \,.\, d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi \,.\, s' \,.\, \left(\frac{H}{H+r}\right)^2$$

ist, also wird selbige, bei einer Fläche des Spieg
$= \sigma$, durch

$$\lambda\mu \,.\, d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi \,.\, \sigma \,.\, \left(\frac{H}{H+r}\right)^2$$

ausgedrückt; oder wenn wir statt σ seinen Werth

$$a \,.\, \left(\frac{H+r}{2H+r}\right)^2 \,.\, \frac{rr}{yy}$$

substituiren, so kommt die Lichtmenge, welche du
das Element geht und zugleich durch die Pupille
Auge gelangt,

$$= \lambda\mu \,.\, d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi \,.\, a \,.\, \left(\frac{H}{2H+r}\right)^2 \,.\, \frac{rr}{yy}.$$

Diese gesammte Lichtmenge versammelt sich auf
Netzhaut in einem Raume, der der Gröfse des Elem
des Bildes direct, und dem Quadrat der Entfernung
Auges vom Bilde umgekehrt proportional ist. Nun
der Abstand des Bildes vom Auge $= y$, die Gröfse
Elements des Bildes (§. 298.)

$$= \left(\frac{Hr}{2H+r}\right)^2 \,.\, d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi,$$

folglich wird die Gröfse des Sammlungsraums

$$\frac{gg}{yy} \,.\, \left(\frac{Hr}{2H+r}\right)^2 \,.\, d\varphi \,.\, d\psi \,.\, \cos\psi,$$

wo gg eine die Proportionalität anzeigende Const
ist, die für alle Werthe von y dieselbe bleibt. Div
man mit dieser Fläche des Sammlungsraums in
Lichtmenge, welche auf diese Fläche fällt, so e
man die Dichtigkeit des Lichts auf der Pupille,
die scheinbare Helligkeit $= \frac{a\lambda\mu}{gg}$.

§. 306.

Das correspondirende Element ds der leuchtenden Oberfläche wirft auf die Spiegeloberfläche s' die Lichtmenge (§. 296.)

$$\lambda ds \cdot \frac{s' \cdot \sin 6}{RR},$$

also wird von demselben auf die Pupille, deren Fläche $= a$ ist, die Lichtmenge

$$\lambda ds \cdot \frac{a \cdot \sin 6}{RR}$$

allen, wo wir R als den Abstand des leuchtenden Elements vom Auge betrachten können, obgleich früher derselbe Buchstabe zur Bezeichnung der Entfernung des Elements vom Spiegel gebraucht worden war. Da die nach dem Element gezogene Gesichtslinie einen Winkel $= 6$ mit dem Element bildet, so ist $ds \cdot \sin 6$ die Projection des Elements ds auf eine aus dem Auge als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $= R$ beschriebene Kugeloberfläche, welche Projection allein im Auge das Bild des Elements hervorbringt. Dem zufolge, was im vorigen Paragraphen auseinandergesetzt ist, wird dann die Gröfse des Raums, auf welcher die durch die Pupille ins Auge gelangende Lichtmenge auf der Netzhaut concentrirt wird,

$$= ds \cdot \sin 6 \cdot \frac{gg}{RR},$$

und theilt man hierdurch die Lichtmenge, so erhält man den scheinbaren Glanz des Elements der leuchtenden Oberfläche $= \frac{a\lambda}{gg}$.

Da nun die scheinbare Helligkeit des Bildes $= \frac{a\mu\lambda}{gg}$ gefunden war, so verhält sich die scheinbare Helligkeit des Objects zu der des Bildes wie $1 : \mu$, also ist letztere immer geringer als erstere, da μ einen ächten Bruch bedeutet. Nur in dem Fall sind beide Helligkeiten einander gleich, wenn alles Licht von dem Spiegel zurückgeworfen wird, welcher Fall aber nirgends ein-

treten wird, da jede Materie einen bedeutenden
des auffallenden Lichts in sich aufnimmt.

§. 307.

Einen Einfluſs auf die Schlüsse des vorigen P
graphs, wodurch ihre Richtigkeit modificirt wird,
freilich der Umstand haben, daſs die Gröſse der P
nicht bei beiden Beobachtungen einerlei Gröſse
Bezeichnet man die Gröſse derselben bei der Beob
tung des leuchtenden Gegenstandes durch a, wie vo
und bei der Beobachtung des Bildes durch a', so
hält sich die scheinbare Helligkeit des leuchtenden
genstandes zu der des Bildes wie $a : a'\mu$, und
der Fall eintreten, daſs das Product $a'\mu$ gröſser
würde, so fiele die scheinbare Helligkeit des B
gröſser aus, als die des Objects. Daſs eine solche
änderung der Gröſse der Pupille wirklich Statt fi
kann jeder leicht beobachten. Man stelle sich vor
Spiegel, so daſs das Licht von den seitwärts befindl
Fenstern in die Augen fallen kann. Wenn man nu
Hände an die Schläfe hält, so daſs das Licht n
geringer Menge zu den Augen gelangen kann, s
merkt man ganz deutlich, daſs die Pupille sich bede
vergröſsert. Hieraus folgt, daſs schwächeres
eine Erweiterung, stärkeres hingegen eine Vereng
der Pupille bewirkt. Aufserdem ist es höchst
scheinlich, daſs auch die Gröſse des Bildes au
Netzhaut einen Einfluſs auf die Veränderungen der P
der Pupille haben wird, indem ein gröſseres Bild
stärkere Verengerung zuwege bringt, als ein klei
das von einem gleich stark glänzenden Körper herk

§. 308.

Die kegelförmigen und cylindrischen Spiegel
in allen Fällen verzerrte Bilder, und sind daher
Gebrauch als Spiegel, in dem Sinne, wo derselb
dem Gegenstand ähnliches Bild darstellen soll,

anzuwenden. Allein man kann dieselben anwenden, um Zeichnungen, die nach bestimmten Gesetzen verzogen sind, regelmäfsig erscheinen zu lassen (anamorphotische Zeichnungen), und wir wollen eine kurze Untersuchung anstellen, wie man solche anamorphotische Zeichnungen für kegelförmige Spiegel verfertigen kann. Uebrigens sieht man leicht ein, dafs solche Anamorphosen nur dann unverzerrt erscheinen, wenn man die Ebene sowohl, auf welcher selbige verzeichnet sind, als auch das Auge in diejenige Lage bringt, für welche die Zeichnungen verfertigt wurden. Eine gröfsere oder geringere Abweichung der Ebene der Zeichnung sowohl, als des Auges, bringt immer eine gröfsere oder kleinere Verzerrung der Bilder hervor. Um daher die Untersuchungen nicht zu weitläufig zu machen, nehmen wir an, die Zeichnungen fallen mit der Basis des graden Kegels von kreisförmiger Grundfläche oder deren Verlängerung zusammen, und das Auge befinde sich in der Axe des Kegels. Aufserdem nehmen wir für den Normalfall an, dafs die erhabene Seite des Kegels als Spiegel diene.

§. 309.

Unsre Annahme, dafs das Auge sich in einem Punkte der Axe befinden soll, kann natürlich nur von einem einzigen Punkte desselben gelten, und dieser möge der Mittelpunkt der Pupille seyn, dann dürfen wir uns (§. 43.) erlauben, nur die durch diesen Punkt gehenden Strahlen zu betrachten, und werden den durch die Reflection hervorgebrachten Bildern der gesehenen Objecte die Lage zuertheilen, welche dieser eine Strahl hat. Legt man durch das Auge und den leuchtenden Punkt eine Ebene, so befindet sich in dieser Ebene der zu betrachtende Strahl, und da das am Einfallspunkte zu errichtende Einfallsloth verlängert die Axe des Kegels schneidet, so wird die besagte Ebene so gelegt werden müssen, dafs die ganze Axe des Kegels in ihr befindlich

ist. Dann stellt diese Ebene die Zurückwerfungsebene vor, und die Oberfläche des Kegels wird in einem Dreieck von derselben geschnitten.

§. 310.

Es sey ABC (Fig. 38.) dieses Dreieck, BD die Axe des Kegels, O das Auge, L der leuchtende Punkt, OLN der einfallende Strahl, NP der zurückgeworfene Strahl, welcher die Basis in P schneidet. Man setze Winkel $NOB = \delta$, $DBC = \alpha$, so wird $BNO = \alpha - \delta$, $PNC = \alpha - \delta$, $BCD = 90^0 - \alpha$, $NPC = 90^0 - 2\alpha + \delta$. Man setze ferner $OD = H$, $BD = h$, so ist im Dreieck OBN

$$OB : BN = \sin(\alpha - \delta) : \sin\delta$$

$$BN = \frac{\sin\delta}{\sin(\alpha - \delta)} \cdot (H - h)$$

$$RN = BN \cdot \sin\alpha = \frac{\sin\alpha \cdot \sin\delta}{\sin(\alpha - \delta)} \cdot (H - h).$$

Im Dreieck PNC ist ferner:

$$NC : NP = \cos(2\alpha - \delta) : \cos\alpha$$

$$NP = \frac{NC \cdot \cos\alpha}{\cos(2\alpha - \delta)}$$

$$TP = NP \cdot \sin(2\alpha - \delta) = NC \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{tang}(2\alpha - \delta).$$

Nun ist aber $NC = BC - BN = \frac{h}{\cos\alpha} - \frac{\sin\delta}{\sin(\alpha - \delta)} \cdot (H - h)$, folglich wird

$$TP = h \cdot \operatorname{tang}(2\alpha - \delta) - \frac{\sin\delta \cdot \cos\alpha \cdot \operatorname{tang}(2\alpha - \delta)}{\sin(\alpha - \delta)} \cdot (H - h)$$

und da $TP + RN = DP$, so kommt, wenn wir diesen Abstand des Durchschnittspunkts des reflectirten Strahls mit der Basis, vom Mittelpunkt der Basis, durch u bezeichnen,

$$u = h \cdot \operatorname{tang}(2\alpha - \delta) - [\operatorname{tang}(2\alpha - \delta) - \operatorname{tang}\alpha] \frac{\sin\delta \cdot \cos\alpha}{\sin(\alpha - \delta)} (H - h)$$

oder, da bekanntlich

$$\operatorname{tang}(2\alpha - \delta) - \operatorname{tang}\alpha = \frac{\sin(\alpha - \delta)}{\cos(2\alpha - \delta) \cdot \cos\alpha},$$

so wird auch

$$u = h \,.\, \text{tang}\,(2\alpha - \delta) - (H - h) \cdot \frac{\sin \delta}{\cos\,(2\alpha - \delta)}.$$

§. 311.

Um den Winkel $\delta = LOB$ zu bestimmen, sey $LQ = y$, $DQ = x$, so hat man

$$\text{tang}\,\delta = \frac{x}{H - y}$$

$$\text{tang}\,(2\alpha - \delta) = \frac{(H - y) \,.\, \text{tang}\, 2\alpha - x}{(H - y) + x \,.\, \text{tang}\, 2\alpha}$$

$$\frac{\sin \delta}{\cos\,(2\alpha - \delta)} = \frac{\text{tang}\,\delta}{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha \,.\, \text{tang}\,\delta}$$

$$= \frac{x}{(H - y) \,.\, \cos 2\alpha + x \,.\, \sin 2\alpha},$$

und hierdurch erhält man auch

$$u = \frac{h \,.\, (H - y) \,.\, \sin 2\alpha - hx \,.\, \cos 2\alpha - (H - h) \,.\, x}{(H - y) \,.\, \cos 2\alpha + x \,.\, \sin 2\alpha}.$$

Ist der Winkel des Kegels am Scheitel ein rechter, wie man sie gewöhnlich bei diesen Spiegeln anzuwenden pflegt, so hat man $2\alpha = 90^0$, also

$$u = \frac{h \,.\, (H - y) - (H - h) \,.\, x}{x}.$$

§. 312.

Wollte man z. B. eine verzerrte Zeichnung auf der Ebene der Basis des Kegels so machen, dafs ihr Bild eine grade Linie gäbe, die mit der Basis parallel liegt, so sey der kürzeste Abstand dieser Linie von der Axe $= a$; ferner lege man durch die Axe des Kegels und diesen nächsten Punkt der graden Linie eine Ebene, und bezeichne den Winkel, welchen eine durch die Axe und einen andern Punkt der graden Linie gelegte Ebene mit der ersten Ebene bildet, durch φ, so hat man den Abstand dieses Punktes von der Axe $x = \frac{a}{\cos \varphi}$, und wird dieser Werth von x in die Gleichung

$$= \frac{(H-y) - (H-h).x}{x}$$

$$= \frac{(H-y).\cos\varphi}{a} - (H-h)$$

derjenigen Linie, welche auf der ... Bild eine grade Linie geben wird

§. 313.

... welchen wir §. 311. für u gefunden ... noch etwas verändern. Setzt man ... Entfernung des Auges von der Spitze der ...

$$B = h', \quad LM = y', \quad CP = u',$$

... die Gleichungen

$$= h.\tang\alpha + u'$$
$$= h - x.\cot\alpha + y'$$
$$H = h + h',$$

... wenn man diese Werthe statt u, y, H in die ...

$$\frac{(\quad - y).\sin 2\alpha - hx.\cos 2\alpha - (H-h).x}{(H-y).\cos 2\alpha + x.\sin 2\alpha}$$

... ergiebt sich nach den gehörigen Zusam...

$$\frac{(\quad - y').\tang\alpha - h'x}{(\quad - y').\cos 2\alpha + x.\cot\alpha},$$

... den Abstand des Durchschnittspunktes des ... Strahls von der Peripherie der Basis ...

§. 314.

... Strahlen mit der Axe parallel im Innern ... hohle Seite, wie z. B. der Strahl ..., so wird derselbe nach EG zurückge... die Axe des Kegels in G schneiden. Um ... zu finden, hat man den Winkel ... — EBG, also wird auch $GE = GB$

zeichnet man nun, wie früher, den Winkel EBG rch α, so wird

$$EB = 2BG \,.\, \cos \alpha$$

$$BG = \frac{EB}{2 \,.\, \cos \alpha}.$$

nun von allen Elementen der innern Kegeloberflächen, lche diesen Abstand EB vom Scheitel B besitzen, reflectirte Licht nach G gelangt, so wird in diesem nkt das Licht viel concentrirter erscheinen, folglich, nn die einfallenden Strahlen von der Sonne herkom-n, wird man im Stande seyn, entzündliche Körper en so wie mittelst des Brennspiegels zu verbrennen. e Wirkung der conischen Brennspiegel ist freilich be-utend geringer, als die der sphärischen, weil bei tern das auffallende Licht in einem viel gröfsern Theile r Axe concentrirt wird, als bei den letztern Spiegeln.

Es sey $ADEC$ ein abgekürzter Kegel (Fig. 39.), ssen halber Scheitelwinkel $= \alpha$ ist, so wird der erste rückgeworfene Strahl die Axe in A', der letzte in treffen, und man hat nach obiger Formel

$$BA' = \frac{BA}{2 \,.\, \cos \alpha}, \quad BD' = \frac{BD}{2 \,.\, \cos \alpha},$$

o, wenn man die letzte Gleichung von der ersten zieht, so bleibt

$$BA' - BD' = \frac{BA - BD}{2 \,.\, \cos \alpha}$$

$$A'D' = \frac{AD}{2 \,.\, \cos \alpha}.$$

e Oberfläche des abgekürzten Kegels ist aber

$$= (AF \,.\, AB - DG \,.\, DB) \,.\, \pi.$$

tzen wir nun $AF = a$, $AD = b$, so wird $DG = a - b \,.\, \sin \alpha$,

$$B = \frac{a - b \,.\, \sin \alpha}{\sin \alpha}, \quad AB = \frac{a}{\sin \alpha}, \text{ folglich wird die}$$

erfläche des Kegels

$$= \pi \,.\, \left(\frac{aa}{\sin \alpha} - \frac{(a - b \,.\, \sin \alpha)^2}{\sin \alpha} \right)$$

$$= \pi b \,.\, (2a - b \,.\, \sin \alpha).$$

Durchschnittspunkt des zurückgeworfenen Strahls mit der Ebene der x, y liegen. Bezeichnen wir nun die Coordinaten dieses Punktes durch ξ', η', so wird zwischen diesen die Relation

$$\eta' = -\frac{a}{b}\cdot\xi' - \frac{\gamma}{b}$$

Statt finden. Der zurückgeworfene Strahl geht also durch zwei Punkte, deren Coordinaten durch

$$\xi, \eta, \zeta;\quad \xi', \eta', o;$$

angegeben werden, folglich sind seine Gleichungen

$$Y - \eta = \frac{\eta - \eta'}{\xi - \xi'}\cdot(X - \xi)$$

$$Z - \zeta = \frac{\zeta}{\xi - \xi'}\cdot(X - \xi).$$

§. 318.

Was nun die Gleichungen der Normale oder des Einfallsloths betrifft, so sieht man leicht, daß dieselbe durch zwei Punkte geht, deren Coordinaten

$$\xi, \eta, \zeta;\quad r, o, \zeta$$

sind, folglich werden die Gleichungen der graden Linie, die das Einfallsloth darstellt,

$$Y - \eta = \frac{\eta}{\xi - r}\cdot(X - \xi)$$

$$Z - \zeta = o.$$

Man erhält also den Cosinus des Winkels, den der einfallende Strahl mit dem Einfallsloth bildet,

$$= \frac{(A-a).(\xi - r) + (B-b).\eta}{\sqrt{(A-a)^2+(B-b)^2+(C-c)^2}.\sqrt{(\xi-r)^2+\eta\eta}}$$

und den Cosinus des Winkels, den der ausfahrende Strahl mit dem Einfallsloth macht,

$$\frac{(\xi - \xi').(\xi - r) + (\eta - \eta').\eta}{\sqrt{(\xi-\xi')^2 + (\eta-\eta')^2 + \zeta\zeta}.\sqrt{(\xi-r)^2+\eta\eta}}$$

Beide Winkel müssen einander gleich seyn, folglich wird auch

$$\frac{(A-a).(\xi-r)+(B-b).\eta}{\sqrt{(A-a)^2+(B-b)^2+(C-c)^2}}$$
$$=\frac{(\xi-\xi').(\xi-r)+(\eta-\eta').\eta}{\sqrt{(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+\zeta\zeta}}.$$

§. 319.

Die in den vorigen Paragraphen aufgestellten Gleiungen sind nun vollkommen hinreichend, um die unkannten Gröfsen ξ', η' zu bestimmen, und also die ge des zurückgeworfenen Strahls zu finden. Man nn dieselben aber durch mehrere Voraussetzungen, gewöhnlich bei dem cylindrischen Spiegel Statt finn, vereinfachen. Zuerst nämlich wird es erlaubt seyn, s Auge in die Ebene der x, y und zwar in die Axe r x zu versetzen; hierdurch wird $B = o$, $C = o$. rner ist immer die Dimension des Spiegels der Breite ch, oder im Sinn seiner Krümmung, sehr klein, so fs die Amplitude desselben wenige Grade enthält. nn bleibt ξ immer sehr klein, und die Gleichungen 315.) lassen sich so schreiben:

$$\eta = \frac{b}{A-a}\cdot(A-\xi)$$
$$\zeta = \frac{c}{A-a}\cdot(A-\xi)$$
$$\eta\eta = 2r\xi.$$

enn man nun annimmt, dafs wegen der Kleinheit der reite des Spiegels auch b sehr klein seyn mufs, so mmt aus diesen Gleichungen, mit Vernachlässigung r Potenzen von b, welche die zweite übersteigen,

$$\xi = \tfrac{1}{2}A\cdot\frac{Abb}{r.(A-a)^2}$$
$$\eta = \frac{Ab}{A-a}$$
$$\zeta = \frac{cA}{A-a}\cdot\left(1-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{Abb}{r.(A-a)^2}\right)\text{ *).}$$

*) Aufser den im Texte angegebenen Werthen für ξ, η, ζ erge-

Die drei in §. 316. zur Bestimmung der Coefficienten der Ebene α, 6, γ gegebenen Gleichungen werden

$$1)\quad o = A\alpha \qquad + \gamma$$
$$2)\quad c = \alpha a + 6b + \gamma$$
$$3)\quad \zeta = \alpha r \qquad + \gamma,$$

und hierzu kann man noch die Gleichung des §. 317.

$$\eta' = -\frac{\alpha}{6}.\xi' - \frac{\gamma}{6},$$

oder mit 6 multiplicirt und auf Null gebracht

$$4)\quad o = \alpha\xi' + 6\eta' + \gamma$$

nehmen. Eliminirt man zuerst 6 aus 2 und 4, so bleibt

$$\eta' c = \alpha.(a\eta' - \xi' b) + \gamma.(\eta' - b),$$

und die Gleichungen 1 und 3 geben

$$\alpha = -\frac{\zeta}{A-r},\quad \gamma = +\frac{\zeta A}{A-r},$$

folglich wird die Gleichung zwischen η', ξ'

$$(A-r).\eta' c + \zeta.(a\eta' - \xi' b) = \zeta A.(\eta' - b),$$

wo man ohne Fehler $\frac{cA}{A-a}$ statt ζ setzen kann.

Die Gleichung, welche aus den Ausdrücken der beiden Cosinus §. 318. hervorging, giebt, da $B = o$, $C = o$ ist,

---

ben sich auch die folgenden Bestimmungen aus den obigen Gleichungen:

$$\eta = \frac{2r.(a-A)^2 - Abb}{b.(a-A)}$$

$$\xi = \frac{2r.(a-A)^2 - Abb}{bb}$$

$$\zeta = \frac{c}{A-a}.\frac{2r.(a-A)^2 - 2Abb)}{bb};$$

sie brauchen aber nicht weiter berücksichtigt zu werden, da sie sich, wie man leicht sieht, auf den zweiten Durchschnittspunkt des Cylinders mit dem nach dem Auge gehenden Strahle beziehen. Indessen geben sie auch diesen zweiten Durchschnittspunkt nicht genau, da sich auf diesen die Annahme, daß ξ, wie für den ersten, sehr klein sey, nicht mehr anwenden läßt. G.

$$5)\quad \frac{(A-a).(\xi-r)\,\eta b}{\sqrt{(A-a)^2+bb+cc}} = \frac{(\xi-\xi').(\xi-r)+\eta.(\eta-\eta')}{\sqrt{(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+\zeta\zeta}}.$$

Aus der vorigen Gleichung, zwischen ξ', η', erhält man

$$\xi' = \frac{(A-r).(A-a)}{bA}\cdot\eta' + \frac{a}{b}\cdot\eta' - \frac{A}{b}\cdot\eta' + A$$

$$= A - \frac{(A-a).\eta' r}{bA}.$$

Man sieht hieraus, dafs ξ' die Dimensionen der Gröfsen A, a, r haben wird, während $\xi\xi$ so wie die Producte aus ξ in η, η', ζ vernachlässigt werden dürfen. Der hinter dem Gleichheitszeichen stehende Theil der Gleichung (5) läfst sich dann so schreiben:

$$\frac{\eta.(\eta-\eta') - r\xi + \xi'.(r-\xi)}{\sqrt{\xi'\xi' - 2\xi\xi' + (\eta-\eta')^2+\zeta\zeta}}$$

$$= -\left[r-\xi.\left(1+\frac{r}{\xi'}\right)+\frac{\eta}{\xi'}(\eta-\eta')\right].\left[1+\frac{\xi}{\xi'}-\frac{(\eta-\eta')^2+\zeta\zeta}{2\xi'\xi'}\right]$$

$$= -r+\xi-\frac{\eta}{\xi'}\cdot(\eta-\eta')+\tfrac{1}{2}r\cdot\frac{(\eta-\eta')+\zeta\zeta}{\xi'\xi'}.$$

Der vor dem Gleichheitszeichen stehende Theil giebt, nach den gehörigen Entwickelungen,

$$\xi - r - \frac{\eta b}{A-a} + \tfrac{1}{2}r\cdot\frac{bb+cc}{(A-a)^2},$$

folglich hat man statt der Gleichung (5) diese:

$$\frac{\eta}{\xi'}\cdot(\eta-\eta') - \tfrac{1}{2}r\cdot\frac{(\eta-\eta')^2+\zeta\zeta}{\xi'\xi'} = \frac{\eta b}{A-a} - \tfrac{1}{2}r\cdot\frac{bb+cc}{(A-a)^2},$$

oder auch, wenn man mit $\xi'\xi'$ multiplicirt,

$$\xi'\xi'.\left[\frac{\eta b}{A-a} - \tfrac{1}{2}r\cdot\frac{bb+cc}{(A-a)^2}\right] = \eta\xi'.(\eta-\eta') - \tfrac{1}{2}r.[(\eta-\eta')^2+\zeta^2].$$

Die drei in §. [illegible]
der Ebene a, [illegible] Werth von ξ und macht
[illegible] erhält man ganz einfach

$$\xi' = -A$$

und hierzu [illegible]

$$\frac{[illegible]).bA}{[illegible]a).r}$$

oder mit [illegible]

nehmen.

[illegible]ungen des zurückgeworfenen

und die [illegible]

$$= \frac{-\eta'}{\xi - \xi'} \cdot (X - \xi)$$

folglich

$$= \frac{\xi}{\xi - \xi'} \cdot (X - \xi),$$

([illegible]

[illegible] durch Substitution dieser

wo [illegible]

$$\frac{[illegible]}{[illegible]} = -\frac{(2A - r).b}{(A - a).r} \cdot X$$

bei[illegible]

$$\frac{[illegible]}{[illegible]} = \frac{c}{A - a} \cdot X,$$

[illegible] darf. Sucht man nun die
[illegible] dieser Linie mit einer beliebig an-
[illegible] so erhält man die Punkte der
[illegible] Ebene, welche das Bild bewirken

Dioptrik.

§. 321.

Derjenige Theil der optischen Wissenschaften, wel-
er sich mit den Gesetzen der Bewegung des Lichts
schäftigt, wenn selbiges verschiedene durchsichtige
ittel durchläuft, heifst die **Dioptrik**. Es ist natür-
h, dafs hierbei blofs das in die Körper eingedrungene
icht berücksichtigt werden kann, welches sich nach
gelmäfsigen Gesetzen fortpflanzt; das im Innern des
örpers zerstreute Licht gehört also unsern Untersuchun-
en nicht an. Es sey *AB* die ebene Oberfläche irgend
nes durchsichtigen Körpers (Fig. 41.), z. B. die Ober-
iche von stillstehendem Wasser, oder die Seitenfläche
nes Glaswürfels, und von irgend einem leuchtenden
unkt *L* falle der Lichtstrahl *LC* auf die Fläche, so
eht derselbe, vorausgesetzt, dafs er die Oberfläche
cht senkrecht trifft, nicht nach der Richtung *CM*
rt, die mit dem einfallenden Strahl in grader Linie
gt, sondern er wird von seiner anfänglichen Richtung
gelenkt oder gebrochen. *CN* ist dann der gebrochene
ichtstrahl.

§. 322.

Man errichte in dem Einfallspunkte *C* auf der Ober-
äche das Perpendikel oder Einfallsloth *CP*, und ver-
ngere es abwärts beliebig nach *O*, so heifst *LCP* der
Einfallswinkel, *NCO* der **Brechungswinkel**,
MCN der **Ablenkungswinkel**. Letzterer ist immer
dem Unterschiede zwischen dem Einfallswinkel und dem
Brechungswinkel gleich. Es ist nöthig, zu erinnern,

dafs wir den Einfallswinkel so wie den Brechungswinkel immer vom Einfallsloth aus zählen werden, und nicht von der Fläche AB aus, wie es wohl zuweilen geschieht. Die Gesetze, nach welchen nun die Brechung Statt findet, sind folgende. Erstens liegen der einfallende Strahl, das Einfallsloth und der gebrochene Strahl immer in einer Ebene, der sogenannten Brechungsebene. Zweitens steht der Sinus des Einfallswinkels zu dem Sinus des Brechungswinkels immer in einem constanten Verhältnifs, dem sogenannten Brechungsverhältnifs, solange die Materie des brechenden Mittels und die Farbe des Lichtstrahls dieselbe bleibt. Setzen wir also den Einfallswinkel $= \varepsilon$, den Brechungswinkel $= 6$, das Brechungsverhältnifs $= n$, so wird

$$\sin \varepsilon = n \,.\, \sin 6,$$

und ist α der Ablenkungswinkel, so wird noch $\alpha = \varepsilon - 6$. Folglich $\sin 6 = \sin(\varepsilon - \alpha)$, und hierdurch erhält man

$$\sin \varepsilon = n \,.\, \sin(\varepsilon - \alpha)$$

$$n \,.\, \sin \varepsilon \,.\, \cos \alpha = \sin \varepsilon + n \,.\, \cos \varepsilon \,.\, \sin \alpha$$

$$n \,.\, \sin \alpha = \sin \varepsilon \,.\, \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2} - \sin \varepsilon \,.\, \cos \varepsilon.$$

Um nun den Werth von ε zu suchen, für welchen α ein Maximum wird, differentiiren wir diese Gleichung, indem α, ε als veränderlich betrachtet werden, und setzen den Differentialcoefficienten $\frac{d\alpha}{d\varepsilon} = o$, so kommt

$$o = \cos \varepsilon \,.\, \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2} - \frac{\cos \varepsilon \,.\, \sin \varepsilon^2}{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}} - \cos \varepsilon^2 + \sin \varepsilon^2.$$

Reducirt man diese Gleichung gehörig, so erhält man

$$\sin \varepsilon = \frac{n}{\sqrt{nn + 1}}.$$

Allein dieser Werth von ε ist für unsere Untersuchung nicht anzuwenden; denn man findet leicht, dafs der hieraus folgende Cosinus von ε nicht $\frac{1}{\sqrt{nn + 1}}$, sondern $= -\frac{1}{\sqrt{nn + 1}}$ genommen werden mufs, um

der vorigen Differentialgleichung Genüge zu leisten, während der Winkel ε immer nur zwischen $\pm 90^0$ genommen werden darf, also der Cosinus positiv seyn muſs. Der gröſste Abweichungswinkel α wird für $\varepsilon = 90^0$ Statt finden.

§. 323.

Man versteht unter einem stärker brechenden Mittel ein solches, bei welchem unter gleichem Einfallswinkel der gebrochene Strahl CN sich dem Einfallsloth CO mehr nähert, als bei einem andern. Geht also ein Strahl aus einem weniger brechenden Mittel oder aus dem leeren Raum in ein stärker brechendes über, so wird die Gröſse n oder das Brechungsverhältniſs gröſser als die Einheit seyn. Auſserdem ist es einleuchtend, daſs, wenn z. B. das Brechungsverhältniſs bei dem Uebergange des Lichts aus Luft in Glas durch n bezeichnet wird, umgekehrt bei dem Uebergange des Lichts aus Glas in Luft das Brechungsverhältniſs durch $\frac{1}{n}$ ausgedrückt werden muſs. Denn es sey der Einfallswinkel aus Luft in Glas $= \varepsilon$, der Brechungswinkel $= \vartheta$, so wird $\sin \varepsilon = n \,.\, \sin \vartheta$. Befindet sich ferner der leuchtende Punkt im Glase, so sey der Einfallswinkel $OCN = \varepsilon'$, der Brechungswinkel $LCP = \vartheta'$, das Brechungsverhältniſs $= n'$, so wird auf gleiche Weise $\sin \varepsilon' = n' \,.\, \sin \vartheta'$. Wenn nun aber der Lichtstrahl, vom Punkt L ausgehend, den Weg LCN zurücklegt, so muſs derselbe nothwendigerweise, von N ausgehend, den Weg NCL durchlaufen. Hierzu ist aber erforderlich, daſs $\varepsilon' = \vartheta$, $\vartheta' = \varepsilon$ sey, also giebt die Gleichung $\sin \varepsilon' = n' \,.\, \sin \vartheta'$ auch diese $\sin \vartheta = n' \,.\, \sin \varepsilon$. Nun hatten wir aber vorher $\sin \varepsilon = n \,.\, \sin \vartheta$, folglich, wenn wir beide Gleichungen mit einander multipliciren, so kommt $nn' = 1$, oder $n' = \frac{1}{n}$.

§. 324.

In der Gleichung $\sin \varepsilon = n \,.\, \sin \vartheta$ darf man statt ε alle Werthe von Null bis 90 Grad setzen, und zu-

gleich wird der Winkel θ immer mit ε wachsen. Allein dieser Brechungswinkel kann, da n gröfser als die Einheit ist, nicht über eine gewisse Grenze hinaus wachsen. Da nämlich der gröfste Werth von θ dann Statt findet, wenn $\varepsilon = 90^0$ ist, oder der Lichtstrahl mit der Oberfläche des brechenden Mittels parallel einfällt, so wird der gröfste Werth von θ durch die Gleichung $\sin\theta = \frac{1}{n}$ ausgedrückt. Dieses Maximum des Brechungswinkels mufs also desto kleiner ausfallen, je gröfser das Brechungsverhältnifs n ist. Man hat z. B.

für Wasser $n = \frac{4}{3}$, $\theta = 48^0 35'$,

für Glas $n = \frac{3}{2}$, $\theta = 41^0 48'$.

Uebrigens ist zu bemerken, dafs dieses Brechungsverhältnifs bei heterogenen Körpern sich auf keine bis jetzt bekannte Weise nach dem specifischen Gewicht oder der Dichtigkeit derselben richtet.

§. 325.

Wir sehen also hieraus, dafs der gebrochene Strahl sich innerhalb des brechenden Mittels nie über eine gewisse Grenze vom Einfallsloth entfernen kann, die durch die Gröfse des Brechungsverhältnisses bedingt wird. Wenn nun aber im Innern einer brechenden Materie, z. B. im Wasser, sich ein Gegenstand befindet, so sendet derselbe nach allen Seiten Strahlen aus; es werden also unter jedem beliebigen Winkel Strahlen die Oberfläche treffen, und solange die Winkel, welche sie mit dem Einfallsloth, das auf der Oberfläche errichtet wird, bilden, das Maximum, z. B. bei Wasser $48^0 35'$ nicht übertreffen, werden die Strahlen nach dem gewöhnlichen Brechungsgesetz, von dem Einfallsloth abgelenkt, in die Luft übergehen, und der im Wasser liegende Gegenstand, freilich in einer andern scheinbaren Richtung, einem in der Luft befindlichem Auge sichtbar

...etrifft, welche
...dem Einfallsloth
...nern, nach den
...zurückgeworfen.
...41.) mehr als das
...tragen, so könnte
...reten, sondern der-
...N' nehmen, wo der
... gleich wird.

...merkwürdigen dioptrischen
... Brechungswinkel und der
...Materie in einem constanten
...ehen, ist einem Holländer
...der im Jahre 1626 im 35sten
...ofessor der Mathematik zu Ley-
...en. Der Construction zufolge,
...Gesetz giebt, würde man eigent-
...secanten der Winkel gelangen, an
...artesius die Sinus setzte. Schon
...hriftstellern findet sich eine Annähe-
...setz, indem Alhazen und Vitellio
...nden zu haben, daſs die Einfallswinkel
...inkel selbst in einem constanten Verhält-
...lches bei kleinen Winkeln merklich richtig
...t man in der Gleichung $\sin\varepsilon = n.\sin\beta$,
...die Reihen, die nach den Potenzen der
...chreiten, so wird

$$\varepsilon - \tfrac{1}{6}\varepsilon^3 = n.(\beta - \tfrac{1}{6}\beta^3),$$

...die den Cubus übersteigenden Potenzen ver-
...gen; nimmt man nun

$$n\beta = \varepsilon + k\varepsilon^3,$$

...unbestimmter Coefficient ist, so erhält man

$$\varepsilon - \tfrac{1}{6}\varepsilon^3 = \varepsilon + k\varepsilon^3 - \frac{\varepsilon^3}{6nn},$$

...raus folgt

$$k = \frac{1}{6nn} - \frac{1}{6} = -\frac{nn-1}{6nn}$$

$$n\beta = \varepsilon - \varepsilon^3 \cdot \frac{nn-1}{6nn}.$$

Es würde also die Abweichung $\frac{1}{100}$ betragen, wenn ε durch die Gleichung

$$\varepsilon\varepsilon \cdot \frac{nn-1}{6nn} = \frac{1}{100}$$

bestimmt ist. Dies giebt für Glas, wo $n = \frac{3}{2}$, $\varepsilon = 18°50'$. Wären also damals schon die Fernröhre bekannt gewesen, so hätte man mit vieler Genauigkeit ihre Wirkung durch dieses annähernde Gesetz erklären können.

§. 327.

Nach dem Newtonianischen Emanationssystem läfst sich die Erscheinung der Brechung folgendermafsen erklären. Bei der Bewegung des Lichts geschieht der Uebergang aus der Richtung LC in die Richtung CN nicht plötzlich (Fig. 41.), sondern allmälig, vermittelst einer Curve, die das Lichttheilchen in der Gegend von C beschreibt, so dafs also eigentlich die Linien LC, CN als Asymptoten der Trajectorie der Lichttheilchen zu betrachten sind. Die krummlinige Bahn aber in der Gegend von C so wie die Abweichung der Bahn des Lichts von den graden Linien LC, CN, ist in jeder mefsbaren Entfernung von der brechenden Oberfläche unmerklich. Betrachten wir nun das Lichttheilchen als einen bewegten Körper, der im leeren Raum mit einer gewissen Geschwindigkeit fortgeht, und sehen wir, dafs das Lichttheilchen in der Nähe eines Körpers von seiner ursprünglichen gradlinigen Richtung abgelenkt wird, so müssen wir schliefsen, dafs eine gewisse Kraft auf das Lichttheilchen wirke, die wir als eine von dem brechenden Körper ausgehende Anziehungskraft betrachten können. Da sich aber diese Anziehungskraft erst in unmerklichen Entfernungen von der Oberfläche wirksam

ägt, so folgt, dafs das Gesetz derselben von solcher eschaffenheit seyn mufs, dafs die Kraft für jede merkche Entfernung des Lichttheilchens von der Oberfläche es brechenden Körpers unmerklich wird.

§. 328.

Es sey AB (Fig. 42.) die ebene Oberfläche irgend ines brechenden Körpers, in L das Lichttheilchen, und war der Oberfläche des Körpers so nahe, dafs es in ie Wirkungssphäre seiner Anziehung getreten ist. In M sey beliebig ein Massentheilchen des Körpers gewählt, o zieht selbiges das Lichttheilchen M nach der Richung LM an, und zwar mit einer Kraft, die allgemein ine Function dieses Abstandes ML seyn wird. Vermöge des Parallelogramms der Kräfte, läfst sich diese raft in zwei andere NL, LQ zerlegen, von denen ie erstere parallel mit der Oberfläche AB, die zweite enkrecht auf dieselbe wirkt. Nehmen wir nun den örper, wenigstens innerhalb der Grenzen der Wirungssphäre der Anziehungskraft, als gleichförmig dicht n, so wird man in der durch LQ und LM senkrecht uf die Oberfläche AB gelegten Ebene gewifs ein nderes Massentheilchen M' finden, so dafs der Winkel $M'LQ = MLQ$, und der Abstand $LM' = LM$ wird. Unter dieser Voraussetzung wird das Theilchen M' das icht L eben so stark anziehen, als das Theilchen M, nd zerlegt man die nach LM' wirkende Kraft in zwei ndere, LN', LQ, so sind die Kräfte LN, LN' gleich nd entgegengesetzt; sie heben sich also gegenseitig uf, und es bleiben blofs die zwei nach LQ gerichteten räfte. Auf diese Art läfst sich also zeigen, dafs die nziehung aller Massentheilchen des Körpers, die in iner mit der Oberfläche AB parallelen Schicht liegen, während die Schicht selbst die Entfernung LQ vom Lichttheilchen besitzt, eine Function von LQ seyn wird, nd wenn man die Anziehung aller dieser einzelnen Schichten zusammen nimmt, so wird selbige eine Function

des Abstandes LP des Lichttheilchens von der Ob
fläche des Körpers.

§. 329.

Nun sey LQ (Fig. 41.) $= y$, $CQ = x$, die Kra
der Anziehungen des Körpers in der Entfernung y wer
durch φy ausgedrückt, so hat man, vermöge der Grund
sätze der Dynamik, die beiden Gleichungen

$$\frac{ddy}{dt^2} = -\varrho\varphi y$$

$$\frac{ddx}{dt^2} = o,$$

wo ϱ die Dichtigkeit des Körpers bedeutet, indem ma
wohl annehmen kann, dafs ein doppelt so dichter Körpe
bei sonst gleicher Beschaffenheit der Materie auch di
doppelte Anziehung ausübt, und überhaupt eine $m$fach
Dichtigkeit auch eine $m$fache Anziehung bewirkt. Da
negative Zeichen mufsten wir der Kraft aus dem Grund
beilegen, weil die Ordinate y durch die Kraft imme
vermindert wird. Multiplicirt man die erste Gleichun
mit $2dy$ und integrirt, so kommt

$$\frac{dy^2}{dt^2} = a - 2\varrho \int \varphi y dy.$$

Die zweite Gleichung läfst sich sogleich integriren, un
man erhält

$$\frac{dx}{dt} = b.$$

Die Differentialcoefficienten $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$ sind hier bekann
lich nichts anders, als die Seitengeschwindigkeiten d
Lichttheilchens senkrecht gegen die Oberfläche d
Körpers und parallel mit derselben. Nennt man also d
Geschwindigkeit des Lichts in einer solchen Entfernu
von der Oberfläche, in welcher die Anziehungskraft nic
nicht wirksam ist, c, und den Winkel, den die Richtu
des Strahls mit dem Einfallsloth bildet, ε, so hat ma

$$\frac{dy^2}{dt^2} = cc \cdot \cos \varepsilon^2, \quad \frac{dx^2}{dt^2} = cc \cdot \sin \varepsilon^2,$$

und wenn man den Werth des Integrals $\int \varphi y dy$, für denjenigen Werth von y, wo die Kraft φy unmerklich wird, durch N bezeichnet, so hat man

$$cc \cdot \cos \varepsilon^2 = a - 2\varrho N; \quad cc \cdot \sin \varepsilon^2 = bb,$$

folglich, wenn man vermöge dieser Gleichungen die Constanten a, b aus den vorigen Gleichungen eliminirt, so kommt

$$\frac{dy^2}{dt^2} = cc \cdot \cos \varepsilon^2 + 2N\varrho - 2\varrho \int \varphi y dy$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} = cc \cdot \sin \varepsilon^2,$$

wo das Integral $\int \varphi y dy$ für $y = o$ als verschwindend betrachtet wird. Man erhält also an dem Eintrittspunkte des Lichttheilchens in das durchsichtige Mittel

$$\frac{dy^2}{dt^2} = cc \cdot \cos \varepsilon^2 + 2N\varrho$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} = cc \cdot \sin \varepsilon^2.$$

§. 330.

Ferner sey $A'B'$ diejenige Schicht, in welcher die Massentheilchen liegen, die noch im Stande sind, auf das Lichttheilchen zu wirken, sobald dasselbe die Oberfläche AB (Fig. 42.) der durchsichtigen Materie erreicht hat, so dafs also der Abstand der beiden Parallellinien AB, $A'B'$ als der Halbmesser der Attractionssphäre zu betrachten seyn wird. Solange sich das Lichttheilchen auf seinem Wege innerhalb des Körpers zwischen diesen beiden Parallelen befindet, wird dasselbe nach Innen gezogen. Denn gesetzt, es sey zu irgend einer Zeit in L', so ziehen alle Massentheilchen, die zwischen AB, $A''B''$ liegen, dasselbe aufwärts nach der Oberfläche zurück, während die zwischen $A''B''$ und $A'''B'''$ befindlichen Massentheilchen des Körpers das Lichttheilchen nach Innen ziehen, und da letztere Masse die gröfsere ist, so wird die Anziehungskraft nach Innen die Oberhand behalten. Man ziehe nun $A^{IV}B^{IV}$, so dafs sie

parallel mit $A''B''$ denselben Abstand von $A''B''$ besitzt, als AB, so heben sich die entgegengesetzten Anziehungen, welche von der Materie des Körpers herkommen, die zwischen AB und $A''B''$, $A''B''$ und $A^{IV}B^{IV}$ liegt, völlig auf, und es ist für das Lichttheilchen eben so, als ob die Oberfläche des Körpers erst in $A^{IV}B^{IV}$ anfinge. Nennt man daher den Abstand $L'Q' = y'$, so wird die Anziehung für diese Lage des Lichttheilchens durch $\varphi(y')$ ausgedrückt; setzt man also $L'Q = y$, und bedenkt, dafs $L'Q = L'Q'$, oder $y = y'$ ist, so ist die Anziehung des Körpers auf das Lichttheilchen, wenn es um die Tiefe y unter seine Oberfläche eingedrungen ist, $= \varphi y$.

§. 331.

Wir haben also für die Bewegung des Lichttheilchens im Innern des Körpers folgende zwei Gleichungen

$$\frac{ddy}{dt^2} = + \varrho\varphi y$$

$$\frac{ddx}{dt^2} = o.$$

Der Kraft φy müssen wir hier das positive Vorzeichen beilegen, weil dieselbe, indem sie das Lichttheilchen ins Innere des Körpers zu ziehen sucht, die Ordinate y vergröfsert. Man erhält aus diesen Gleichungen durch Integration

$$\frac{dy^2}{dt^2} = a' + 2\varrho \int \varphi y dy$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} = b' = cc \cdot \sin \varepsilon^2.$$

Nun ist für $y = o$ das Integral $\varrho \int \varphi y dy$, der frühern Voraussetzung zufolge (§. 329.), Null, und das Quadrat der verticalen Geschwindigkeit wird für diesen Fall

$$= cc \cdot \cos \varepsilon^2 + 2N\varrho,$$

folglich ist die Constante $a' = cc \cdot \cos \varepsilon^2 + 2N\varrho$, und es kommt

$$\frac{dy^2}{dt^2} = cc \cdot \cos \varepsilon^2 + 2N\varrho + 2\varrho \int \varphi y dy.$$

las Lichttheilchen bis an die Grenze $A'B'$ einge-
gen, so wird für diesen Werth von y, nach §. 329.,
$dy = N$, folglich wird die Geschwindigkeit des
ts in der Richtung senkrecht auf die Oberfläche

$$\frac{dy^2}{dt^2} = cc \cdot \cos \varepsilon^2 + 4N\varrho$$

$$\frac{dx^2}{dt^2} = cc \cdot \sin \varepsilon^2.$$

ichnet man die Geschwindigkeit des Lichts, nach-
es in das Innere des Körpers eingedrungen ist,
ν, so hat man, wenn man bedenkt, dafs

$$\nu\nu = \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dx^2}{dt^2},$$

$$\nu\nu = cc + 4N\varrho,$$

ist die Geschwindigkeit des Lichts im Innern des
ers gröfser, als aufserhalb, da $4N\varrho$ immer eine
ive Gröfse seyn mufs. Nennt man ferner den
el des Lichtstrahls mit dem verlängerten Einfalls-
nachdem das Lichttheilchen merklich in den Körper
drungen ist, also die Wirkung der Anziehungskraft
hört hat, ε', so wird, nach der Lehre von der
gung der Geschwindigkeiten,

$$\frac{dx}{dt} = \nu \cdot \sin \varepsilon' = \sin \varepsilon' \cdot \sqrt{cc + 4N\varrho}.$$

haben aber auch gefunden, dafs $\frac{dx}{dt} = c \cdot \sin \varepsilon$ ist,
ch kommt

$$c \cdot \sin \varepsilon = \sin \varepsilon' \cdot \sqrt{cc + 4N\varrho}$$

$$\sin \varepsilon = \sin \varepsilon' \cdot \sqrt{1 + \frac{4N\varrho}{cc}}.$$

un ε den Einfallswinkel und ε' den Brechungswinkel
ellt, so sieht man hieraus, dafs die Sinus dieser
n Winkel in einem constanten Verhältnifs stehen,
ie es die Beobachtung gelehrt hat. Uebrigens wird
Brechungsverhältnifs

$$n = \sqrt{1 + \frac{4N\varrho}{cc}}.$$

parallel mit $A''B''$ dens[illegible]
als AB, so heben sich [illegible]
gen, welche von der [illegible]
die zwischen AB und [illegible]ifische Brec
völlig auf, und es ist [illegible]
als ob die Oberfläche [illegible]
finge. Nennt man [illegible]
wird die Anziehung [illegible]stellung, daſs du
durch $\varphi(y')$ ausge[illegible]körpern, die auf di
und bedenkt, daſs [illegible] deren Wirkung s
ist die Anziehung [illegible] beschränkt, das
wenn es um die T[illegible] Richtigkeit alle uns
drungen ist, = [illegible] haben, völlig
[illegible] jetzt suchen, aus de
[illegible] des Lichts im Inn

Wir haben [illegible] welche wir in §. 325. an
chens im Inne[illegible] Wir brauchen hierbei bl
[illegible] des Lichts zu betr
[illegible] die Fläche AB des du
[illegible] ist, indem die damit p
[illegible] einerlei Werth behält.

Der Kraft [illegible] Innern der durchsichtigen
beilegen, [illegible] aus welchem ein Lichtstra
ins Innere [illegible] wenn, wie früher, L'.
vergröſse[illegible]
Integrati[illegible]

$$[illegible] = + \varrho q y$$

$$[illegible] = a + 2\varrho \int q y dy.$$

Nun [illegible] merklichen Werth hat, o
Vorau[illegible] in meſsbarer Entfernung [illegible]
der [illegible] ist nach §. 331.

$$[illegible] = [illegible] \cos \varepsilon'^2$$

folgt [illegible]
es [illegible]

$$[illegible] = N.$$

[illegible] Bestimmung von a, die Gleich

$$[illegible] \cos \varepsilon'^2 = a + 2N\varrho.$$

also allgemein

$$= vv \cdot \cos \varepsilon'^2 - 2N\varrho + 2\varrho \int q y dy$$

$$= vv \cdot \cos \varepsilon'^2 - 2\varrho \cdot (N - \int q y dy),$$

das zweite Glied immer absolut negativ ist, da N den grössten Werth bedeutet, den das Integral $\int q y dy$ annehmen kann. Es ist also möglich, einen Werth für ε' zu finden, dafs das Glied

$$vv \cdot \cos \varepsilon'^2 - 2\varrho \cdot (N - \int q y dy) = o$$

werde. Dann ist die Seitengeschwindigkeit des Lichts senkrecht gegen die Oberfläche AB Null, und das Licht würde sich blofs parallel mit der Oberfläche AB bewegen, wenn die immer fort nach dem Innern des Körpers hin wirkende Anziehungskraft es nicht nöthigte, wieder ins Innere des Körpers zurückzukehren; und es läfst sich auf gleiche Weise, wie in der Catoptrik bei der Zurückwerfung des Lichts, zeigen, dafs der zurückgeworfene Strahl auch hier denselben Winkel mit der Normale macht, wie der einfallende.

§. 333.

Solange also der Winkel ε' so gewählt wird, dafs der Gleichung

$$vv \cdot \cos \varepsilon'^2 = 2\varrho \cdot (N - \int q y dy)$$

Genüge geleistet wird, wo $\int q y dy$ zwischen o und N liegt, wird der Strahl zurückgeworfen, noch ehe er die Oberfläche des brechenden Mittels erreicht. Setzt man $\int q y dy = o$, so kommt

$$\cos \varepsilon'^2 = \frac{2\varrho N}{vv},$$

und für diesen Werth von ε' geschieht die Zurückwerfung an der Oberfläche selbst. Um diese Gröfse durch das Brechungsverhältnifs auszudrücken, bedenke man, dafs

$$\frac{2\varrho N}{cc} = \frac{nn - 1}{2}$$

$$v = nc$$

und hierdurch wird $\cos \varepsilon' = \frac{1}{n} \cdot \sqrt{\frac{nn - 1}{2}}$.

Hiera

...einer, als der durch
... Werth, so tritt der Strahl
und ... es kann sich doch
ver: ... rechte Geschwindigkeit
... die Wirkungssphäre der
... Denn man hat, wenn
... ens von der Oberfläche
An ... en bedeutet,
the
au
ge
he
erk
An
d
h
j
v

$$- 2\varrho \int \varphi y dy,$$

... selbst

$$- 2N\varrho, \quad \int \varphi y dy = o$$

... Bestimmung der Constante a

$$- 2N\varrho = a,$$

$$- 2N\varrho - 2\varrho \int \varphi y dy,$$

... kann Null werden,

$$= 2\varrho \left(N + \int \varphi y dy \right)$$

... seinen gröſsten
... Zurückwerfung des Lichts
... Wirkungssphäre der Anzie-
... und dann kommt

$$\sin \varepsilon' = \frac{1}{n},$$

... (§. 324.) aus der
... des Brechungs-

§. 335.

ach dem Vibrationssystem wird die Erklärung der ıng des Lichts folgendermafsen gegeben werden ı. Es sey in L ein leuchtender Punkt, von wel- aus die Vibrationen des Aethers sich nach jeder gen Richtung fortpflanzen. Nach der Zeit T eine Reihe solcher auf der graden Linie LM 13.) fortgepflanzter Vibrationen die Oberfläche des nden Mittels in M, so bildet sich in diesem Punkt uer Mittelpunkt der Vibrationen, die sich kreis- nach allen Richtungen in dem Aether fortpflanzen, r sich innerhalb des durchsichtigen Mittels befin- ınd nach der Zeit T' sey die auf dem Radius ortgehende Vibration nach N gelangt. Dann ist inge des ganzen durchlaufenen Weges, wenn wir schwindigkeit auf LM durch v, die Geschwin- auf MN durch v' bezeichnen,

$$LM + MN = vT + v'T'.$$

sey LM' ein zweiter, dem ersten unendlich Strahl, dessen Länge LM' um dr gröfser ist, l, so ist die Zeit, welche vergeht, ehe der Strahl eintrifft, $= T + \frac{dr}{v}$, und der Strahl erregt im M' ebenfalls nach allen Seiten fortgehende Vibra- und $M'N'$ soll einen der Radien vorstellen, auf n die Vibrationen im durchsichtigen Mittel fort- Sollen nun die Vibrationen auf den Wegen $LM'N'$ gleichzeitig in N und N' eintreffen, l die Zeit, welche vergeht, ehe die Vibration von ch N' gelangt, $= T' - \frac{dr}{v}$, folglich, da die vindigkeit der Welle im durchsichtigen Mittel $= v'$ oll, so ergiebt sich

$$M'N' = v'T - \frac{v'dr}{v}.$$

ey $AL = a$, $MLA = \varepsilon$, so wird $ML = \frac{a}{\cos \varepsilon}$.

Wächst nun der Winkel ε um $d\varepsilon$, so wächst die LM um

$$dr = d \cdot \frac{a}{\cos \varepsilon} = \frac{a \cdot \sin \varepsilon}{\cos \varepsilon^2} \cdot d\varepsilon,$$

also ist $M'N' = v'T' - \frac{v'a \cdot \sin \varepsilon}{v \cdot \cos \varepsilon^2} \cdot d\varepsilon$. Die messer der sich aus M und M' kreisförmig ausbr den secundären Wellen sind also:

$$v'T' \text{ und } v'T' - \frac{v'a \cdot \sin \varepsilon}{v \cdot \cos \varepsilon^2} \cdot d\varepsilon,$$

und die Entfernungen ihrer Mittelpunkte M, M' Anfangspunkt der Abscissen

$$a \cdot \text{tang } \varepsilon, \quad a \cdot \text{tang } \varepsilon + \frac{ad\varepsilon}{\cos \varepsilon^2}.$$

Die Gleichungen dieser Kreise werden daher:

$$yy + (x - a \cdot \text{tang } \varepsilon)^2 = v'v'T'T'$$

$$yy + \left(x - a \cdot \text{tang } \varepsilon - \frac{ad\varepsilon}{\cos \varepsilon^2}\right)^2 = \left(v'T' - \frac{v'a \cdot \sin \varepsilon}{v \cdot \cos \varepsilon^2}\right.$$

Nun lassen sich beide Gleichungen auch so schr wenn man in der letztern die Potenzen von $d\varepsilon$ ver lässigt

$$yy + (x - a \cdot \text{tang } \varepsilon)^2 = v'v'T'T'$$

$$yy + (x - a \cdot \text{tang } \varepsilon)^2 - 2a \cdot \frac{d\varepsilon}{\cos \varepsilon^2} \cdot (x - a.t$$

$$= v'v'T'T' - \frac{2v'v'T'a \cdot \sin \varepsilon}{v \cdot \cos \varepsilon^2} \cdot d\varepsilon.$$

§. 336.

Alle secundären Wellen, welche aus den Pu M, M' und den folgenden hervorgehen, bilden Hauptwelle, welche alle gleichzeitig fortgepflanzte cundären Wellen berührt; sie geht also durch die D schnittspunkte der auf einander folgenden secun kreisförmigen Wellen. Man muſs also die Werth y und $x - a \cdot \text{tang } \varepsilon$ aus vorigen Gleichungen su um die Lage des Durchschnittspunktes zu erh Aus der zweiten Gleichung findet sich

$$x - a \cdot \text{tang}\, \varepsilon = \frac{\nu' \nu' T' \cdot \sin \varepsilon}{\nu}$$

Werth in die erste substituirt giebt

$$yy = \nu' \nu' T' T' \cdot \left(1 - \frac{\nu' \nu' \cdot \sin \varepsilon^2}{\nu \nu}\right).$$

wenn N der Punkt ist, den beide Wellen haben, und man von N das Perpendikel

$$MQ = x - a \cdot \text{tang}\, \varepsilon$$
$$MN = \nu' T'$$
$$\sin QNM = \frac{MQ}{MN} = \frac{\nu' \cdot \sin \varepsilon}{\nu}.$$

der Winkel QNM derjenige ist, welchen der ebene Strahl mit dem Einfallsloth NQ macht, also Brechungswinkel, während $MLA = \varepsilon$ den Einfallsgiebt, so sieht man, dafs auch bei der Annahme Vibrationssystems der Sinus des Einfallswinkels zu des Brechungswinkels in einem constanten Verhältnifs steht, nämlich dem von $\nu : \nu'$. Folglich ist Brechungsverhältnifs $= \frac{\nu}{\nu'}$, und da dasselbe die ist übertreffen mufs, so ist $\nu > \nu'$, d. h. nach dem tionssystem geht das Licht im stärker brechenden langsamer fort, als im weniger brechenden, oder eren Raume.

Wir bemerken hier noch, dafs ausgedehntere Untergen über die Fortpflanzung der Bewegung in chen Mitteln einen Zusammenhang des Brechungstnisses eines durchsichtigen Körpers mit der Menge n seiner vordern und hintern Fläche zurückgenen Lichts, wenigstens bei senkrecht einfallendem e, gezeigt haben. Bezeichnet man nämlich das ungsverhältnifs durch n, so ist die an seiner vorFläche zurückgeworfene Lichtmenge

$$= \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2,$$

die des einfallenden Lichts als Einheit angenommen, und die Intensität des aus der zweiten Fläche hervortretenden Lichts

$$= \frac{16n^2}{(1+n)^4}$$ *).

Die allgemeinen Beweise dieser beiden Sätze gehören aber nicht hierher, sondern in eine physisch mathematische Theorie des Lichts.

§. 337.

Wir sehen aus diesen Darstellungen, dafs auch die Vibrationstheorie das gewöhnliche Brechungsgesetz hinreichend erklärt, und dafs daher vermittelst dieser Erscheinung nicht zwischen dem Emanationssystem und dem Vibrationssystem entschieden werden kann, nur findet der merkwürdige Unterschied Statt, dafs die Geschwindigkeit des Lichts in den durchsichtigen Mitteln nach beiden Systemen ganz verschieden gefunden wird, und was rücksichtlich der Aberration des Lichts aus diesem Umstand eintritt, haben wir §. 134. erwähnt. Wir können endlich noch auf einem dritten Wege zu dem Gesetze der Brechung für den Fall der Emissionstheorie kommen. In der Dynamik wird gezeigt, dafs, wenn ein Körper von anziehenden Kräften getrieben wird, er immer eine solche Bahn beschreibt, dafs, wenn man die Geschwindigkeit des Körpers in irgend einem Punkte der Bahn durch v, das Element derselben durch ds bezeichnet, das Integral $\int v ds$, zwischen zwei bestimmten Punkten genommen, ein Minimum seyn mufs. Bei der Bahn, welche ein Lichttheilchen beschreibt, kann man den Weg als aus drei Stücken bestehend ansehen; nämlich dem gradlinigen Weg aufserhalb, dem gradlinigen Weg innerhalb des durchsichtigen Mittels, und dem unendlich kleinen krummlinigen Stück an der Trennungs-

*) S. Poisson *sur le mouvement des fluides élastiques* in den *Mémoires de l'Acad. des sciences de l'Institut de France.* Année 1817. Tome II. pag. 383.

fläche des durchsichtigen Mittels. Letzteres läfst sich gegen die beiden ersten vernachlässigen; bezeichnet man daher die Geschwindigkeit aufserhalb des durchsichtigen Körpers durch v, die Länge des Wegs durch s, die Geschwindigkeit innerhalb durch v', die Länge des Wegs durch s', so wird, da v für jeden der beiden Theile des Weges constant ist,

$$\int v ds = vs + v's' = \omega,$$

und ω mufs zu einem Minimum gemacht werden. Es sey nun die ebene Oberfläche des brechenden Körpers die Ebene der xy. Der Durchschnitt dieser Ebene mit einer durch den leuchtenden Punkt und einen beliebigen Punkt des gebrochenen Strahls gelegten Ebene sey die Axe der x. Dann sind die Coordinaten des leuchtenden Punkts $x = a$, $y = o$, $z = b$, des Punkts im gebrochenen Strahle $x = a'$, $y = o$, $z = b'$, seyen endlich $x = x'$, $y = y'$ die Coordinaten des Einfallspunkts, so ist:

$$s = \sqrt{(a - x')^2 + y'y' + bb}$$
$$s' = \sqrt{(a' - x')^2 + y'y' + b'b'},$$

und

$$\omega = v.\sqrt{(a-x')^2+y'y'+bb} + v'.\sqrt{(a'-x')^2+y'y'+b'b'}$$

ist zu einem Minimum zu machen. Hierzu ist erforderlich, dafs $\frac{d\omega}{dx'} = o$, $\frac{d\omega}{dy'} = o$, also in unserm Falle

$$\frac{v.(a-x')}{\sqrt{(a-x')^2+y'y'+bb}} + \frac{v'.(a'-x')}{\sqrt{(a'-x')^2+y'y'+b'b'}} = o$$

$$\frac{vy'}{\sqrt{(a-x')^2+y'y'+bb}} + \frac{v'y'}{\sqrt{(a'-x')^2+y'y'+b'b'}} = o.$$

Da nun v, v', so wie die Wurzelgröfsen $\sqrt{(a-x')^2+yy+bb}$ und $\sqrt{(a'-x')^2+y'y'+b'b'}$ der Natur der Sache nach immer positiv sind, so kann der zweiten Gleichung nur durch den Werth $y' = o$ Genüge geleistet werden, es wird sich also auch der Einfallspunkt in der Ebene der xz befinden, in welcher auch der leuchtende Punkt

und ein Punkt des gebrochenen Strahls liegen, mithin ist der ganze Weg des Lichtstrahls in der auf der Oberfläche des brechenden Mediums senkrechten Ebene enthalten. Die erste Gleichung giebt nun

$$\frac{v.(a-x')}{\sqrt{(a-x')^2+bb}} = \frac{v'.(x'-a')}{\sqrt{(a'-x')^2+b'b'}}$$

Nun ist, wenn (Fig. 41.) LC den einfallenden, $L'C$ den gebrochenen Strahl, und A den Anfangspunkt der Coordinaten bedeutet, $LQ = b$, $AQ = a$, $AC = x$, $AR = a'$, $RL = b'$. Unsere Gleichung wird also

$$v \cdot \frac{QC}{LC} = v' \cdot \frac{RC}{L'C}$$

$$v.\cos LCQ = v'.\cos L'CR,$$

oder $v.\sin \varepsilon = v'.\sin \varepsilon'$,

also $\frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} = \frac{v'}{v} = n.$

Wir erhalten also hier dasselbe Resultat, wie oben.

§. 338.

Wie nach der Emanationstheorie die Gröfse $sv + s'v'$ ein Minimum ist, so kann man auch fragen, welche Relation zwischen dem einfallenden und dem zurückgeworfenen Strahl Statt finden mufs, damit der Lichteindruck in der kürzesten Zeit von dem leuchtenden zu dem im brechenden Mittel liegenden Punkte gelange. Hier ist also $t + t' = \frac{s}{v} + \frac{s'}{v'}$ zu einem Minimum zu machen. Behalten wir die im vorigen Paragraphen angeführten Bezeichnungen bei, so ist:

$$\frac{s}{v}+\frac{s'}{v'}=\frac{\sqrt{(a-x')^2+y'y'+bb}}{v}+\frac{\sqrt{(a'-x')^2+y'y'+b'b'}}{v'},$$

und die Bedingung, dafs diese Gröfse ein Minimum werden soll, führt auf die Gleichungen

$$y' = o$$

$$\frac{a-x'}{v.\sqrt{(a-x')^2+bb}} = \frac{x'-a'}{v'.\sqrt{(a'-x')^2+b'b'}}.$$

erste dieser Gleichungen zeigt uns, dafs auch hier Weg des Lichtstrahls sich in einer auf der Oberhe des brechenden Körpers senkrechten Ebene bet, die zweite giebt:

$$\frac{\sin \varepsilon}{v} = \frac{\sin \varepsilon'}{v'},$$

er $\frac{v}{v'} = \frac{\sin \varepsilon}{\sin \varepsilon'} = n$. Dies ist dasselbe Verhältnifs, welches die Vibrationstheorie führt (§. 336.). Diese es also, nach welcher der Lichtstrahl den Weg schen dem leuchtenden Punkte und einem Punkte im chenden Mittel in der kürzesten Zeit zurücklegt.

§. 339.

Wir gehen nun zu den Untersuchungen der einzeln Erscheinungen über, welche die Brechung des Lichts bietet, indem wir freilich eine der Haupterscheinungen bei, nämlich die Zerlegung des Lichts in Farben, t noch bei Seite setzen, da die hieraus sich ergeden Modificationen leicht vermittelst der allgemeinen rmeln abgeleitet werden können.

Es sey N (Fig. 43.) ein leuchtender Punkt innerb eines durchsichtigen Mittels, das von einer ebenen erfläche AB begrenzt wird; in L ist das Auge, man gt, wo das Auge das Bild des Punktes N sehen d. Es sey $AL = a$, $AQ = b$, $QN = -c$, so durch diese drei Gröfsen sowohl die Lage des Auges, die des leuchtenden Punktes bestimmt. Ferner treffe r Strahl, welcher, aus dem Punkt N ausgehend, gebochen ins Auge gelangt, die Oberfläche in M, und M sey $= \xi$, so wird die Gleichung des Strahls MN

$$y + c = \frac{-c}{b - \xi} \cdot (x - b).$$

un sey die Gleichung des gebrochenen Strahls

$$y = mx + m',$$

o geht derselbe durch den Punkt M, dessen Coordina-

ten $y = o$, $x = \xi$ sind, folglich wird auch $o = m\xi + m'$, also

$$y = m.(x - \xi),$$

indem m' aus beiden Gleichungen eliminirt wird. Der Cosinus des Winkels, den der Strahl MN mit der Abscissenlinie bildet, ist $= \frac{b - \xi}{\sqrt{(b-\xi)^2 + cc}}$, und der Cosinus des Winkels, den der gebrochene Strahl mit der Abscissenlinie macht, wird $= \frac{1}{\sqrt{1 + mm}}$. Der Cosinus des ersten Winkels ist aber der Sinus des Brechungswinkels, und der Cosinus des zweiten der Sinus des Einfallswinkels. Bezeichnen wir also das Brechungsverhältnifs durch n, so hat man die Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{1 + mm}} = \frac{n.(b - \xi)}{\sqrt{(b-\xi)^2 + cc}}$$

$$mm = \frac{cc - (nn - 1).(b - \xi)^2}{nn.(b - \xi)^2}.$$

Man setze den Winkel $QNM = \varphi$, so ist $(b - \xi) = c.\text{tang}\,\varphi$, und der Werth von mm läfst sich so schreiben:

$$mm = \frac{(1 - nn.\sin\varphi^2)}{nn.\sin\varphi^2},$$

also wird die Gleichung des gebrochenen Strahls $y = m.(x - \xi)$,

$$y = -\frac{\sqrt{1 - nn.\sin\varphi^2}}{n.\sin\varphi} \cdot (x - b + c.\text{tang}\,\varphi).$$

Läfst man hier den Winkel φ um $d\varphi$ wachsen, so erhält man die Gleichung eines gebrochenen Strahls, der dem ersten unendlich nahe liegt, und beide Strahlen werden sich, rückwärts verlängert, in einem Punkt schneiden, dessen Coordinaten x, y durch die vorige Gleichung und die neue Gleichung, welche entsteht, indem in ersterer $\varphi + d\varphi$ statt φ gesetzt wird, gefunden werden. Man hat also zur Bestimmung des Durchschnittspunkts der beiden Strahlen

$$= -\frac{\sqrt{1 - nn.\sin\varphi^2}}{n.\sin\varphi}.(x - b + c.\text{tang}\,\varphi)$$

$$o = \frac{\cos\varphi}{n.\sin\varphi^2.\sqrt{1 - nn.\sin\varphi^2}}.(x - b + c.\text{tang}\,\varphi)$$

$$- \frac{\sqrt{1 - nn.\sin\varphi^2}}{n.\sin\varphi}.\frac{c}{\cos\varphi^2}.$$

Hieraus folgt

$$x = b - c.\text{tang}\,\varphi^3.(nn - 1)$$

$$y = -\frac{c.\sqrt{1 - nn.\sin\varphi^2}}{n.\cos\varphi}.[1 - \text{tang}\,\varphi^2.(nn - 1)]$$

$$= -\frac{c}{n}.[1 - \text{tang}\,\varphi^2.(nn - 1)]^{\frac{3}{2}}.$$

An der Stelle, welche durch diese Werthe der Coordinaten x, y bestimmt ist, wird sich ein Bild des Punktes N befinden, und wir haben nur noch den Winkel φ so zu bestimmen, dafs die von diesem Bilde scheinbar herkommenden Strahlen das Auge wirklich treffen. Wir hatten die Gleichung des gebrochenen Strahls $y = m.(x - \xi)$ gefunden, und soll diese Linie durchs Auge gehen, so mufs für $x = o$, $y = a$ seyn, also $a = -m\xi$; es wird also $m = -\frac{a}{\xi}$. Ferner war

$$\xi = b - c.\text{tang}\,\varphi$$

$$m = -\frac{\sqrt{1 - nn.\sin\varphi^2}}{n.\sin\varphi},$$

folglich erhält man

$$\sqrt{1 - nn.\sin\varphi^2}.(b - c.\text{tang}\,\varphi) = an.\sin\varphi,$$

aus welcher Gleichung φ bestimmt werden mufs. Setzt man in den Gleichungen für x und y $\varphi = o$, so kommt $x = b$, $y = -\frac{c}{n}$; sieht man also senkrecht in ein stillstehendes Wasser, so wird ein Gegenstand, der sich in der Tiefe c unter der Oberfläche befindet, nur in der Tiefe $\frac{c}{n}$ zu liegen, und also vergröfsert scheinen,

und da für Wasser $n = \frac{4}{3}$, so erscheint der Gegenstand um den vierten Theil seiner Tiefe gehoben.

§. 340.

Wenn man aus den beiden Gleichungen

$$x = b - c \,.\, \text{tang}\, \varphi^3 \,.\, (nn - 1)$$

$$y = -\frac{c}{n} \cdot [1 - \text{tang}\, \varphi^2 \,.\, (nn - 1)]^{\frac{3}{2}}$$

den Winkel φ eliminirt, so bleibt eine Gleichung zwischen x und y, welche die krumme Linie giebt, auf welcher alle Durchschnittspunkte der auf einander folgenden gebrochenen Strahlen liegen, oder auf welcher sich für jede Lage des Auges das Bild des Gegenstandes zu befinden scheint. Nimmt man an, der Anfangspunkt der Abscissen befinde sich in Q, wo das vom leuchtenden Punkt auf die Oberfläche des Wassers gefällte Perpendikel die Oberfläche trifft, so ist $b = 0$, und wenn man aufserdem die positiven Ordinaten abwärts rechnet, so werden die beiden vorigen Gleichungen

$$x = -c \,.\, \text{tang}\, \varphi^3 \,.\, (nn - 1)$$

$$y = +\frac{c}{n} \cdot [1 - \text{tang}\, \varphi^2 \,.\, (nn - 1)]^{\frac{3}{2}}.$$

Die erste Gleichung giebt

$$\text{tang}\, \varphi^6 = \frac{xx}{cc \,.\, (nn - 1)^2},$$

und aus der zweiten Gleichung erhält man

$$\text{tang}\, \varphi^6 \,.\, (nn - 1)^3 = \left[1 - \left(\frac{ny}{c}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^3,$$

also wird

$$\frac{xx \,.\, (nn - 1)}{cc} = \left[1 - \left(\frac{ny}{c}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^3.$$

Diese Curve würde als die Brennlinie einer graden Linie zu betrachten seyn, welche durch Brechung entsteht (Diacaustica).

§. 341.

Befindet sich ein leuchtender Punkt in L, welcher die Lichtstrahlen auf ein von parallelen Flächen AB,

CD begrenztes durchsichtiges Mittel, z. B. eine Glasscheibe, wirft, so wird jeder Lichtstrahl eine doppelte Brechung in M und N erleiden. Das Brechungsverhältnifs sey n, die Dicke der Scheibe $= c$, EMF das Einfallsloth, $EML = \varepsilon$, so bestimmt sich der Winkel NMF durch die Gleichung

$$n \cdot \sin NMF = \sin \varepsilon.$$

Ist ferner NG das Einfallsloth in N, so wird ebenfalls

$$n \cdot \sin NMF = \sin PNG,$$

also $PNG = \varepsilon$, d. h. der aus der hintern Fläche hervorgehende Strahl ist mit dem auf die vordere Fläche einfallenden parallel. Setzt man nun $LK = a$, so wird

$$MK = a \cdot \text{tang}\, \varepsilon, \quad NF = c \cdot \text{tang}\, NMF,$$

$$HN = a \cdot \text{tang}\, \varepsilon + c \cdot \text{tang}\, NMF.$$

Nun sey die Gleichung des einfallenden Strahls

$$y = Ax + B,$$

so geht der Strahl durch zwei Punkte, deren Coordinaten folgende sind:

Coordinaten von L; $x = o$, $y = a$

Coordinaten von M; $x = a \cdot \text{tang}\, \varepsilon$, $y = o$,

also wird die gesuchte Gleichung des einfallenden Strahls

$$y = -x \cdot \text{cotang}\, \varepsilon + a.$$

§. 342.

Die Gleichung des zum zweitenmal gebrochenen Strahls NP sey, da er mit dem einfallenden parallel geht,

$$y = -x \cdot \text{cotang}\, \varepsilon + B',$$

so läfst sich B' durch die Bedingung bestimmen, dafs der Strahl den Punkt N trifft, für welchen man

$$y = -c, \quad x = HN = a \cdot \text{tang}\, \varepsilon + c \cdot \text{tang}\, NMF$$

hat. Nun war aber auch

$$\sin NMF = \frac{\sin \varepsilon}{n},$$

also erhält man

$$\text{tang}\, NMF = \frac{\sin \varepsilon}{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}.$$

Man erhält also zur Bestimmung von B die Gleichung

$$-c = -a - c \cdot \frac{\cos\varepsilon}{\sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}} + B',$$

also wird die Gleichung des zum zweitenmal gebroc
nen Strahls

$$y + c = a - x \cdot \cot\varepsilon + c \cdot \frac{\cos\varepsilon}{\sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}}.$$

Differentiirt man selbige, indem ε als veränderlich
trachtet wird, so kommt

$$o = \frac{x}{\sin\varepsilon^2} - \frac{c \cdot \sin\varepsilon \cdot (nn - 1)}{\sqrt{(nn - \sin\varepsilon^2)^3}},$$

und wenn man aus diesen beiden Gleichungen x,
bestimmt

$$x = \frac{c \cdot \sin\varepsilon^3 \cdot (nn - 1)}{\sqrt{(nn - \sin\varepsilon^2)^3}}$$

$$y = a - c + \frac{c \cdot \cos\varepsilon^3 \cdot nn}{\sqrt{(nn - \sin\varepsilon^2)^3}}.$$

Da nun x, y die Coordinaten des Bildes des leuchte
den Punkts vorstellen, so erhellt, dafs jeder Gege
stand, durch eine Fensterscheibe betrachtet, verschob
erscheinen wird, und zwar desto mehr, je dicker
Scheibe ist.

§. 343.

Ist die hintere Seite der Scheibe undurchsichti
wie dies z. B. bei einem belegten Glasspiegel der F
ist, so wird der nach NM gebrochene einfallende Stra
(Fig. 44.) wieder zurückgeworfen, indem er den W
$NM''L''$ zurücklegt. Bei der Zurückwerfung wi
$MNF = M''NC$, also auch $L''M''A = LMK$. B
hält man die Bezeichnungen der vorigen Paragraph
bei, $LK = a$, $MLK = \varepsilon$, so ist der Winkel, d
der zurückgeworfene Strahl $L''M''$ mit der Abscisse
linie AB bildet, $= 90^0 - \varepsilon$, und da derselbe dur
einen Punkt M'' geht, dessen Coordinaten

$$y = o, \quad x = a \cdot \text{tang}\,\varepsilon + 2c \cdot \frac{\sin\varepsilon}{\sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}}$$

d, so erhält man die Gleichung der graden Linie, lche den zurückgeworfenen Strahl $M''L'$ darstellt,

$$y = x \cdot \cot \varepsilon - a - \frac{2c \cdot \cos \varepsilon}{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}.$$

ifferentiirt man diese Gleichungen, indem man ε als eränderlich betrachtet, so wird

$$o = \frac{x}{\sin \varepsilon^2} - \frac{2c \cdot \sin \varepsilon \cdot (nn - 1)}{\sqrt{(nn - \sin \varepsilon^2)^5}},$$

nd wenn man aus diesen beiden Gleichungen x und y estimmt, so kommt

$$x = \frac{2c \cdot \sin \varepsilon^3 \cdot (nn - 1)}{\sqrt{(nn - \sin \varepsilon^2)^5}}$$

$$y = -a - \frac{2c \cdot \cos \varepsilon^3 \cdot nn}{\sqrt{(nn - \sin \varepsilon^2)^3}}.$$

Man sieht aus diesen beiden Ausdrücken der Coordinaten des Bildes eines Punktes, dafs dasselbe bei einem belegten Glasspiegel, wo aufser der Reflexion auch noch eine Refraction Statt findet, nicht blofs von der Lage des Punktes, sondern auch von dem Einfallswinkel der Strahlen und der Dicke des Glases selbst abhängig ist.

§. 344.

Wir haben bis jetzt immer blofs bei der Brechung den Fall betrachtet, wo die brechende Materie von dem Raume durch eine Ebene getrennt ist. Allein die allgemeinen Brechungsgesetze, welche wir §. 322. aufgestellt haben, sind auch dann noch völlig gültig, wenn die Trennungsfläche gekrümmt seyn sollte, nur mufs man dann an die Stelle des Einfallsloths die Normale setzen, welche auf der krummen Fläche an dem Einfallspunkte errichtet ist. Es sey z. B. in A ein leuchtender Punkt, CB eine krumme Linie, die die Trennungsfläche vorstellt, AB ein auf dieselbe fallender Strahl, EBD die in Einfallspunkt errichtete Normale, FB der gebrochene Strahl. Man setze $BAC = \varphi$, $AB = R$, $BEC = \theta$, $FC = \psi$, so hat man

$= \varphi + \theta$

$= \theta - \psi.$

also wird ... Strahls, FBE der
nen Stra... wenn man das Bre-
...gen Materie durch n

y

Differen... $\sin(\theta - \psi)$.
trachte... BP

FP

$\cot BFP$,

und ... $= x$, $FC = u$, so wird
bestin...

... der Gleichung

$= \ldots \sin(\theta - \psi)$

... der graden Linie, auf
... Lichtstrahl bewegt, kann
D... nimmt man an, sie habe
d...

$-$ ...

... den Bedingungen unter-
... durch zwei Punkte geht.

$=$

$Y = o$

$- \ldots (Y - x)$

... Lichtstrahls BF.

... Gleichung

... $-$)

... durch $\cos\theta$ dividirt,

... $\tang\theta - n . \sin\psi$

... $= R$ setzt, und die

$$R.\sin\varphi = y, \quad R.\cos\varphi = a + x$$
$$RR = yy + (a + x)^2$$
$$\text{tang}\,\theta = \frac{dx}{dy} = q,$$

len Winkel der Normale mit der Abscissenlinie t, folglich läfst sich vorige Gleichung auch so n:

$$+ (a + x).q = nR.(q.\cos\psi - \sin\psi).$$

ze der Kürze wegen

$$\frac{y + (a + x).q}{nR} = \frac{dR}{ndy} = \nu,$$

dann die vorige Gleichung, und dividire sie in ψ^2, so kommt

$$+ \nu\nu.\cot\psi^2 = qq.\cot\psi^2 - 2q.\cot\psi + 1,$$

se Gleichung, nach $\cot\psi$ aufgelöfst, giebt

$$\cot\psi = \frac{q \pm \nu.\sqrt{qq - \nu\nu + 1}}{qq - \nu\nu}.$$

bestimmen, welches von beiden Vorzeichen ge- werden müsse, wollen wir $n = 1$ setzen, dann wird

$$\nu = \frac{y + (a + x).q}{R}$$
$$- \nu\nu = \frac{yy.(qq - 1) - 2y.(a + x).q}{RR}$$
$$+ 1 = \frac{qqyy + (a + x)^2 - 2y.(a + x).q}{RR}$$
$$= \left(\frac{(a + x) - qy}{R}\right)^2.$$

man das positive Vorzeichen, so kommt der es Bruchs, welcher den Werth von $\cot\psi$ ausdrückt,

$$q + \nu.\sqrt{qq - \nu\nu + 1}$$
$$= \frac{y.(1 - qq) + 2q.(a + x)}{RR}.(a + x).$$

nan das negative Vorzeichen, so wird

$$q - \nu.\sqrt{qq - \nu\nu - 1}$$
$$= \frac{2qy - (a + x).(1 - qq)}{RR}.y.$$

$$DBA = BAC + BEC = \varphi + \theta$$
$$FBE = BEC - BFE = \theta - \psi.$$

Da DBA der Einfallswinkel des Strahls, FBE
Brechungswinkel ist, so kommt, wenn man das
chungsverhältnifs der durchsichtigen Materie durch
bezeichnet, die Gleichung

$$\sin(\varphi + \theta) = n \cdot \sin(\theta - \psi).$$

Ferner hat man im Dreieck FBP

$$FP = BP \cdot \cot BFP$$
$$FC = PC + BP \cdot \cot BFP,$$

und setzt man $BP = y$, $PC = x$, $FC = u$,
auch

$$u = x + y \cdot \cot\psi,$$

wo sich der Winkel ψ aus der Gleichung

$$\sin(\varphi + \theta) = n \cdot \sin(\theta - \psi)$$

bestimmen läfst. Die Gleichung der graden L
welcher sich der gebrochene Lichtstrahl bew
leicht dargestellt werden; denn nimmt man an
die Form

$$Y = AX + B,$$

so sind die Coefficienten A, B den Bedingu
worfen, dafs die grade Linie durch zwei
deren Coordinaten

$$X = x, \quad Y = y$$
$$X = x + y \cdot \cot\psi, \quad Y =$$

sind, und man findet daher

$$Y - y = -\tang\psi \cdot (X$$

für die Gleichung des gebrochenen Li

§. 345.

Die den Winkel ψ bestimmende
$$\sin(\varphi + \theta) = n \cdot \sin(\theta$$
giebt, wenn man entwickelt, und d
$$\sin\varphi + \cos\varphi \cdot \tang\theta = n \cdot \cos\psi$$
Nun ist aber, wenn man $AB =$
Entfernung AC durch a b

§. 348.

Ist der Abstand des leuchtenden Punktes unendlich gross, also $a = \infty$, so hat man aus der Gleichung

$$v = \frac{y + (a + x).q}{nR},$$

da das Verhältnifs $\frac{y}{a+x} = o$ gesetzt werden mufs,

$$v = \frac{q}{n},$$

also hat man in diesem Fall die Gleichung des gebrochenen Strahls

$$Y - y = \frac{nnq - q.\sqrt{nnqq + nn - qq}}{qq - nn}.(X - x).$$

Den Coefficienten von $X - x$ setze man $= Q$, so hat man

$$Y - y = Q.(X - x),$$

und wenn man differentiirt,

$$-1 = \frac{dQ}{dy}.(X - x) - Qq.$$

Hieraus ergiebt sich

$$X = \frac{(Qq - 1).dy + xdQ}{dQ}$$

$$= \frac{(Qq - 1).dx + xqdQ}{qdQ}$$

$$Y = \frac{Q.(Qq - 1).dy + ydQ}{dQ}$$

$$= \frac{Q.(Qq - 1).dx + yqdQ}{qdQ}.$$

Wenn die Gleichung der brechenden Curve gegeben ist, kann man Q, q, y, dQ durch x ausdrücken, so dafs also X und Y blofs als Functionen von x erscheinen; eliminirt man nun x zwischen beiden Gleichungen, so giebt die übrig bleibende Gleichung zwischen X und Y die durch Brechung entstandene Brennlinie oder die Diacaustica der brechenden Curve.

§. 349.

Soll die brechende Curve von solcher Beschaffenheit seyn, dafs alle gebrochenen Strahlen sich in einem Punkte vereinigen, der auf der Axe der Abscissen liegt, und dessen Abscisse b ist, so braucht man in der obigen Gleichung zwischen $Y - y$, $X - x$ nur $Y = o$, $X = b$ zu setzen, so wird die Gleichung

$$-y = \frac{nn - \sqrt{nn + nnqq - qq}}{qq - nn} \cdot q \cdot (b - x)$$

die Differentialgleichung der gesuchten Curve seyn. Diese Gleichung giebt

$$(b-x).q.\sqrt{nn+nnqq-qq} = nnq.(b-x)+y.(qq-nn),$$

also quadrirt

$$(b - x)^2 . (qqnn + nnq^4 - q^4)$$
$$= n^4q^2 . (b - x)^2 + 2y . (qq - nn) . nnq . (b - x)$$
$$+ yy . (qq - nn)^2.$$

Schafft man das Glied $n^4qq . (b - x)^2$ auf die andere Seite, so wird auch

$$(b - x)^2 . (qq - nn) . (nn - 1) . qq$$
$$= 2y . (qq - nn) . nnq . (b - x) + yy . (qq - nn)^2,$$

oder, da die ganze Gleichung durch $qq - nn$ theilbar ist,

$$(b-x)^2 . qq . (nn-1) = 2y . nnq . (b-x) + yy . (qq-nn),$$

welches sich auch so schreiben läfst:

$$qq . [yy - nn . (b - x)^2 + (b - x)^2]$$
$$+ 2y . nnq . (b - x) = nnyy.$$

Hieraus ergiebt sich

$$q . [yy - nn . (b - x)^2 + (b - x)^2]$$
$$= - ynn . (b - x) \pm ny . \sqrt{yy + (b - x)^2},$$

oder wenn man der Kürze wegen

$$(b - x)^2 + yy = rr$$

setzt, so kommt auch

$$q . (rr - nn . (b - x)^2) = - nny . (b - x) \pm nyr$$

$$q = \frac{ny}{n . (b - x) \pm r}.$$

Es ist aber $q = \frac{dx}{dy}$, folglich auch

$$ndx . (b - x) - nydy \pm rdx = o.$$

... die Gleichung

$$(\ldots - x)^2 + yy = rr,$$

... $(\ldots - x).dx - ydy = -rdr$, folg-

... $-rdr = dx = o.$

... diese Gleichung, so ergiebt sich

$$r = C \pm x.$$

... $= a$, ist $r = b$, folglich läfst sich die ... bestimmen, und es kommt

$$\ldots = b \pm \frac{x}{n},$$

... Gleichung eines Kegelschnitts ist.

§. 350.

... man für r seinen Werth, und quadrirt ... Gleichung, so erhält man

$$\ldots - xx - 2bx = \frac{xx}{nn} \pm 2b.\frac{x}{n}$$

$$\ldots = 2bx.\left(1 \pm \frac{1}{n}\right) - xx.\left(1 - \frac{1}{nn}\right).$$

... der Strahl aus einem weniger brechenden ... in ein stärker brechendes über, so ist $n > 1$, ... Coefficient $1 - \frac{1}{nn}$ von xx positiv; das ganze ... wird daher negativ, und da der Coefficient ... unter dieser Voraussetzung auch positiv bleibt, ... mit des positiven oder negativen Vorzeichens ... giebt die Gleichung eine Ellipse.

... umgekehrt der Strahl aus einem stärker bre- ... Mittel in ein weniger brechendes über, so ist ... das Glied

$$\ldots \left(1 - \frac{1}{nn}\right)$$

... negativen Werth, also gilt dann die Glei- ... eine Hyperbel.

§. 351.

Füllt man ein Gefäfs $EFAB$ (Fig. 46.), welches am Boden durch eine Glasplatte $ABCD$ mit parallelen Seitenflächen verschlossen ist, mit einer Flüssigkeit bis an EF, so dafs EF parallel mit AB und CD ist, so wird ein nach der Richtung LM einfallender Lichtstrahl dreimal gebrochen, in M, N, P; und beobachtet man die Lage des zuletzt ausfahrenden Lichtstrahls PQ, so wird sich ergeben, dafs derselbe dem einfallenden Strahl LM genau parallel liegt. Bezeichnet man nun die Brechungsverhältnisse

aus der Luft in die Flüssigkeit durch n,
aus der Flüssigkeit ins Glas - N,
aus der Luft ins Glas - n',

so hat man rücksichtlich der Winkel, welche die Strahlen LM, MN, NP, PQ mit den Einfallslothen $M'M''$, $N'N''$, $P'P''$ bilden, folgende Gleichungen:

$$\sin LMM' = n \,.\, \sin NMM''$$
$$\sin MNN' = N \,.\, \sin PNN''$$
$$n' \,.\, \sin NPP' = \sin QPP'',$$

folglich, wenn man diese drei Gleichungen mit einander multiplicirt

$$n' \,.\, \sin LMM' \,.\, \sin MNN' \,.\, \sin NPP' = n \,.\, N \,.\, \sin NMM'' \,.\, \sin PNN'' \,.\, \sin QPP''.$$

Da nun aber vermöge des Parallelismus der Linien AB, CD, EF

$$\sin NMM'' = \sin MNN'$$
$$\sin PNN'' = \sin NPP',$$

so bleibt, nach Hinweglassung der gleichen Gröfsen,

$$n' \,.\, \sin LMM' = nN \,.\, \sin QPP''.$$

Der Beobachtung zufolge ist aber der einfallende Strahl LM dem ausfahrenden Strahl PQ parallel, folglich $\sin LMM' = \sin QPP''$. Es bleibt daher $n' = n \,.\, N$, $N = \frac{n'}{n}$, wo man N das relative Brechungsverhältnifs nennen kann. Hat man z. B. für Wasser $n = \frac{4}{3}$, für

Glas $n' = \frac{3}{2}$, so wird das relative Brechungsverhältnifs aus Wasser in Glas

$$N = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{8}.$$

Besitzen beide aneinander gränzende Materien gleiches Brechungsverhältnifs, welches Statt finden kann, ohne dafs die Bestandtheile der beiden durchsichtigen Mittel identisch sind, so wird der Strahl gar keine Ablenkung erleiden.

§. 352.

Da alle Körper durch die Veränderung der Temperatur eine Ausdehnung oder Zusammenziehung erleiden, die vorzüglich bei gasförmigen Körpern sehr merklich ist, [wobei zugleich eine Veränderung der Dichtigkeit eintritt, so fragt sich, inwiefern diese Aenderung der Dichtigkeit auf das Brechungsverhältnifs einwirkt. Diese Frage läfst sich aus dem, was §. 331. gesagt worden ist, leicht beantworten; denn wir fanden daselbst das specifische Brechungsvermögen, welches gar nicht weiter von der grade Statt findenden Dichtigkeit des Körpers abhängt,

$$\frac{4N}{cc} = \frac{nn - 1}{\varrho}.$$

Gesetzt nun, für die Dichtigkeit des Körpers ϱ' sey das Brechungsverhältnifs $= n'$, so hat man ebenfalls

$$\frac{4N}{cc} = \frac{n'n' - 1}{\varrho'},$$

und hieraus ergiebt sich

$$n' = \sqrt{1 + \frac{\varrho'}{\varrho} \cdot (nn - 1)}.$$

Ist die Veränderung der Dichtigkeit nur sehr gering, so kann man die entsprechende Veränderung des Brechungsverhältnisses dadurch finden, dafs man die Gleichung

$$\frac{4N}{cc} = \frac{nn - 1}{\varrho}$$

indem ϱ, n als veränderlich betrachtet wer-
nun $\frac{4N}{cc}$ eine constante Gröfse ist, so kommt

$$2\varrho n dn - d\varrho . (nn - 1) = o$$

$$dn = \frac{nn - 1}{2n} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho}.$$

en sich also zwei Schichten gleichartiger Materie
ander, von denen die eine die Dichtigkeit ϱ, die
r liegende die Dichtigkeit $\varrho + d\varrho$ besitzt, so
relative Brechungsverhältnifs $= \frac{n + dn}{n}$, oder,
man statt dn seinen Werth substituirt,

$$= 1 + \frac{nn - 1}{2nn} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho}.$$

§. 353.

at man eine beliebige Menge durchsichtiger Mittel
, C, D u. s. w., die durch parallele Ebenen von
er getrennt sind, und bezeichnet man ihre abso-
Brechungsverhältnisse durch a, b, c, d u. s. w.,
nfallswinkel durch α, β, γ, δ ...., die Brechungs-
durch α', β', γ', δ' ...., so hat man folgende
von Gleichungen:

$$\sin \alpha = a . \sin \alpha'$$

$$\sin \beta = \frac{b}{a} \cdot \sin \beta'$$

$$\sin \gamma = \frac{c}{b} \cdot \sin \gamma'$$

$$\sin \delta = \frac{d}{c} \cdot \sin \delta'$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$\sin \mu = \frac{m}{l} \cdot \sin \mu'.$$

licirt man diese Gleichungen mit einander, und
t, dafs $\alpha' = \beta$, $\beta' = \gamma$, $\gamma' = \delta$ u. s. w., so

$$\sin \alpha = m . \sin \mu',$$

§ 354.

[illegible] Materie zwisc
[illegible] AC, CB, die sich in
[illegible] s. [illegible] nennt man den d
[illegible] [illegible] denken man sich obe
[illegible] [illegible] erschlossen denken kan
[illegible] [illegible] der Winkel ACB, welche
[illegible] [illegible] bilden, heifst der b
[illegible] [illegible] wir bezeichnen dense
[illegible] [illegible] des Prisma können
[illegible] [illegible], indem es durchaus
[illegible] [illegible] durch eine Eben
[illegible] [illegible] Seiten AC, CB gleiche
[illegible] [illegible] die obere Ebene gan
[illegible] [illegible] Schneidet man nun das Pris
[illegible] [illegible], welche senkrecht auf der
[illegible] [illegible] Seiten AC, CB steht, s
[illegible] [illegible] Dreieck ACB, und die
[illegible] [illegible] Strahl LM, der sich in
[illegible] [illegible] Brechungsebene seyn, so da
[illegible] [illegible] des Lichts in ihr liegt.

§ 355.

den der bei N wieder ausfahrende Strahl mit dem Einfallsloth macht, $PNN' = \mathcal{G}'$, so ist

$$\sin \mathcal{G}' = n \,.\, \sin \varepsilon'.$$

Nun hat man aber im Dreieck MNC

$$NMC + MNC + NCM = 180^0,$$

oder, da $NMC = 90^0 - \mathcal{G}$, $MNC = 90^0 + \varepsilon'$, $MCN = p$, so wird

$$p + \varepsilon' - \mathcal{G} = o,$$

folglich $\sin \varepsilon' = \sin (\mathcal{G} - p)$, und daher auch

$$\sin \mathcal{G}' = n \,.\, \sin (\mathcal{G} - p)\ ^*).$$

§. 356.

Aus der Gleichung $\sin \varepsilon = n \,.\, \sin \mathcal{G}$ ergiebt sich

$$\sin \mathcal{G} = \frac{\sin \varepsilon}{n}$$

$$\cos \mathcal{G} = \frac{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}{n},$$

also, wenn man diese Werthe in die Gleichung

$\sin \mathcal{G}' = n \,.\, \sin (\mathcal{G} - p) = n \,.\, \cos p \,.\, \sin \mathcal{G} - n \,.\, \sin p \,.\, \cos \mathcal{G}$

substituirt, so ergiebt sich die Relation zwischen den Winkeln $\mathcal{G}'$, ε, welche der einfallende und der zuletzt ausfahrende Strahl mit dem an den gehörigen Stellen errichteten Einfallsloth macht,

$$\sin \mathcal{G}' = \sin \varepsilon \,.\, \cos p - \sin p \,.\, \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}.$$

Ist der brechende Winkel des Prisma ein Rechter, also $p = 90^0$, so wird

$$\sin \mathcal{G}' = -\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}.$$

---

*) Wir haben hier den Fall zu Grunde gelegt, wo der einfallende Strahl CM und die Kante C des Prisma auf entgegengesetzten Seiten des Einfallslothes MM' liegen, also der gebrochene Strahl MN und die Kante C auf derselben Seite von MM'. Für eine andere Lage müssen daher ε und $\mathcal{G}$ negativ genommen werden. Eben so verhält es sich mit ε' und $\mathcal{G}'$, finden wir für ε' aus der Gleichung $p + \varepsilon' - \mathcal{G} = o$ einen negativen Werth, so ist auch $\mathcal{G}'$ negativ, und der gebrochene Strahl NP und die Kante C liegen auf entgegengesetzten Seiten des Einfallslothes NN'. G.

§. 357.

Sobald ohne Rücksicht auf das Zeichen sin $6'$ oder

$$\sin p \,.\, \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2} - \sin \varepsilon \,.\, \cos p > 1$$

wird, oder, wenn man hieraus ε sucht,

$$\sin \varepsilon + \cos p < \sin p \,.\, \sqrt{nn - 1}$$

ist, kann der Strahl in N nicht heraustreten, sondern er wird im Innern des Prisma, nach den gewöhnlichen Gesetzen der Reflexion, zurückgeworfen (§. 325.).

Es sey MN ein solcher Strahl (Fig. 47 *a*.), man ziehe NQ, so dafs $MNK = QNK$ ist, dann wird NQ den Weg des zurückgeworfenen Strahls angeben. Da $MNK = -\varepsilon'$ ist, so wird $QNB = 90^0 + \varepsilon'$, also

$$CQN = QNB - QCN = 90^0 + \varepsilon' - p.$$

Ist nun $Q'Q''$ das im Punkt Q errichtete Einfallsloth, so wird

$$Q''QN = 90^0 - (90^0 + \varepsilon' - p) = p - \varepsilon',$$

und wenn QR den ausfahrenden Strahl bezeichnet, so ergiebt sich

$$\sin Q'QR = -n \,.\, \sin (p - \varepsilon').$$

Es ist aber nach §. 355. $p + \varepsilon' - 6 = o$, also $\varepsilon' = 6 - p$,

$$\sin Q'QR = -n \,.\, \sin (2p - 6)$$
$$= -n \,.\, \sin 2p \,.\, \cos 6 + n \,.\, \cos 2p \,.\, \sin 6,$$

und substituirt man hierin die §. 356. angegebenen Werthe von sin 6, cos 6, so kommt

$$\sin Q'QR = \cos 2p \,.\, \sin \varepsilon - \sin 2p \,.\, \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}.$$

Man sieht hieraus, dafs der zurückgeworfene Strahl nach seinem Heraustreten aus dem Prisma mit dem Einfallsloth denselben Winkel macht, wie ein gebrochener Strahl, der unter demselben Winkel auf ein Prisma fällt, dessen brechender Winkel doppelt so grofs ist, als der des hier betrachteten.

§. 358.

Verlängert man (Fig. 47 *b*.) den einfallenden Strahl LM und den zweimal gebrochenen Strahl NP, bis sich beide in D schneiden, so hat man den Winkel, unter welchem sie sich treffen,

$NDM = 180^0 - (NMD + MND)$
$NMD = KMD - KMN = \varepsilon - \vartheta$
$MND = 180^0 - (N'ND - K'NM) = 180^0 - \vartheta' + \varepsilon'$,
folglich erhält man, wenn man den Winkel NDE durch γ bezeichnet,

$$\gamma = \varepsilon - \vartheta - \vartheta' + \varepsilon',$$

oder, da $\varepsilon' - \vartheta = -p$, so wird auch

$$\gamma = \varepsilon - \vartheta' - p.$$

Wir haben aber §. 356.

$$\sin \vartheta' = \cos p \,.\, \sin \varepsilon - \sin p \,.\, \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2},$$

folglich läfst sich γ durch ε und p ausdrücken. Differentiirt man diese Gleichungen, so erhält man

$$\frac{d\gamma}{d\varepsilon} = 1 - \frac{d\vartheta'}{d\varepsilon}$$

$$\frac{d\vartheta'}{d\varepsilon} \cdot \cos \vartheta' = \frac{\sin p \,.\, \sin \varepsilon \,.\, \cos \varepsilon}{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}} + \cos p \,.\, \cos \varepsilon,$$

und verlangt man das Maximum oder Minimum von γ rücksichtlich des Einfallswinkels ε zu wissen, so mufs man $\frac{d\gamma}{d\varepsilon} = o$ setzen. Hierdurch wird

$$\frac{\sin p \,.\, \sin \varepsilon \,.\, \cos \varepsilon}{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}} + \cos p \,.\, \cos \varepsilon = \cos \vartheta',$$

also, wenn man quadrirt und $1 - \sin \vartheta'^2$ statt $\cos \vartheta'^2$ setzt,

$$\frac{\sin p^2 \,.\, \sin \varepsilon^2 \,.\, \cos \varepsilon^2}{nn - \sin \varepsilon^2} + \cos p^2 \,.\, \cos \varepsilon^2$$

$$+ \frac{2 \,.\, \sin p \,.\, \cos p \,.\, \sin \varepsilon \,.\, \cos \varepsilon^2}{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}} = 1 - \cos p^2 \,.\, \sin \varepsilon^2$$

$+2 \,.\, \sin p \,.\, \cos p \,.\, \sin \varepsilon \,.\, \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2} - \sin p^2 \,.\, (nn - \sin \varepsilon^2)$.
Dies reducirt sich auf

$$2 \,.\, \cos p \,.\, \sin \varepsilon \,.\, \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2} = (nn - 2 \,.\, \sin \varepsilon^2) \,.\, \sin p.$$

Quadrirt man von neuem, so kommt

$$4 \,.\, \sin \varepsilon^4 - 4nn \,.\, \sin \varepsilon^2 + n^4 \,.\, \sin p^2 = o,$$

und hieraus $\sin \varepsilon = n \cdot \sin \frac{1}{2} p$ *). Man sieht aus dieser Formel, dafs, wenn ε ein Maximum oder Minimum für γ

---

*) Die Gleichung $4 \cdot \sin \varepsilon^4 - 4nn \cdot \sin \varepsilon^2 + n^4 \cdot \sin p^2 = o$ giebt für $\sin \varepsilon$ folgende Werthe: $n \cdot \sin \frac{1}{2} p$, $-n \cdot \sin \frac{1}{2} p$, $n \cdot \cos \frac{1}{2} p$, $-n \cdot \cos \frac{1}{2} p$, von denen im Texte nur der erste betrachtet ist. Wir wollen hier untersuchen, ob diese Werthe sämmtlich der Bedingungsgleichung für ein Maximum oder Minimum Genüge leisten, oder ob einige derselben erst durch die zur Bestimmung von $\sin \varepsilon$ mit ihr vorgenommenen Operationen eingeführt sind. Zuvor bemerken wir jedoch, dafs $\cos \varepsilon$ sowohl, als $\cos 6$ oder $\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}$ und $\cos 6'$ immer positiv genommen werden müssen. Die ursprüngliche Gleichung zur Bestimmung von $\sin \varepsilon$ war

$$\frac{\sin p \cdot \sin \varepsilon \cdot \cos \varepsilon}{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}} + \cos p \cdot \cos \varepsilon = \cos 6'.$$

Die vor dem Gleichheitszeichen stehende Gröfse A nimmt durch Einführung der für $\sin \varepsilon$ gefundenen Ausdrücke nach einigen sich leicht ergebenden Reductionen folgende Werthe an:

$$\sin \varepsilon = n \cdot \sin \tfrac{1}{2} p, \quad A = \sqrt{1 - nn \cdot \sin \tfrac{1}{2} p^2}$$

$$\sin \varepsilon = -n \cdot \sin \tfrac{1}{2} p, \quad A = \cos \tfrac{1}{2} p \cdot \frac{\sqrt{1 - nn \cdot \sin \frac{1}{2} p^2}}{\cos \frac{1}{2} p}$$

$$\sin \varepsilon = n \cdot \cos \tfrac{1}{2} p, \quad A = \sin \tfrac{1}{2} p \cdot \frac{\sqrt{1 - nn \cdot \cos \frac{1}{2} p^2}}{\sin \frac{1}{2} p}$$

$$\sin \varepsilon = -n \cdot \cos \tfrac{1}{2} p, \quad A = -\sqrt{1 - nn \cdot \cos \tfrac{1}{2} p^2}.$$

Wir erhalten ferner aus der Gleichung

$$\sin 6' = \sin \varepsilon \cdot \cos p - \sin p \cdot \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}$$

für $\sin \varepsilon = n \cdot \sin \frac{1}{2} p$, $\sin 6' = -n \cdot \sin \frac{1}{2} p$, $\cos 6' = \sqrt{1 - nn \cdot \sin \frac{1}{2} p^2}$,

$\sin \varepsilon = -n \cdot \sin \frac{1}{2} p$, $\sin 6' = -n \cdot \sin \frac{3}{2} p$, $\cos 6' = \sqrt{1 - nn \cdot \sin \frac{1}{2} p^2}$,

$\sin \varepsilon = n \cdot \cos \frac{1}{2} p$, $\sin 6' = -n \cdot \cos \frac{3}{2} p$, $\cos 6' = \sqrt{1 - nn \cdot \cos \frac{1}{2} p^2}$,

$\sin \varepsilon = -n \cdot \cos \frac{1}{2} p$, $\sin 6' = +n \cdot \cos \frac{1}{2} p$, $\cos 6' = \sqrt{1 - nn \cdot \cos \frac{1}{2} p^2}$.

Vergleichen wir diese Werthe von $\cos 6'$ mit den für A gefundenen Ausdrücken, so sieht man, dafs nur der Werth $\sin \varepsilon = n \cdot \sin \frac{1}{2} p$ der Gleichung $A = \cos 6'$ Genüge leistet, es kann also nur für diesen einen Werth ein Maximum oder Minimum Statt finden. G.

ben soll, der Einfallswinkel ε so beschaffen seyn muſs, ſs der Brechungswinkel dem halben brechenden Winkel es Prisma gleich wird, folglich steht der gebrochene trahl MN auf der Linie senkrecht, welche den bre-enden Winkel ACB des Prisma halbirt, und der ge-rochene Strahl MN macht mit der Seite CB denselben Winkel, als mit der Seite AC; es wird daher auch der Winkel PNN', unter welchem der Strahl ausgeht, dem Winkel LMM', unter welchem der Strahl einfiel, gleich eyn, d. h. es wird $\varepsilon = -\,6'$.

§. 359.

Dasselbe konnte man auch aus der Formel finden, ie den Werth von $\sin 6'$ ausdrückt, denn es ist

$$\sin 6' = \cos p \,.\, \sin \varepsilon - \sin p \,.\, \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2},$$

lso, wenn man hierin den Werth von $\sin \varepsilon = n \,.\, \sin \tfrac{1}{2}p$ ubstituirt, so kommt

$$\sin 6' = n \,.\, \cos p \,.\, \sin \tfrac{1}{2}p - n \,.\, \sin p \,.\, \cos \tfrac{1}{2}p$$
$$= -\,n \,.\, \sin \tfrac{1}{2}p$$
$$\sin 6' = -\sin \varepsilon, \quad 6' = -\,\varepsilon.$$

Da nun allgemein $\gamma = \varepsilon - 6' - p$ war, so wird der unserm Falle entsprechende Werth von

$$\gamma = 2\varepsilon - p$$
$$\sin \gamma = \sin 2\varepsilon \,.\, \cos p - \cos 2\varepsilon \,.\, \sin p$$
$$= 2n \,.\, \sin \tfrac{1}{2}p \,.\, \cos p \,.\, \sqrt{1 - nn \,.\, \sin \tfrac{1}{2}p^2} - \sin p \,.\, (1 - 2nn \,.\, \sin \tfrac{1}{2}p^2).$$

Wir haben nur noch zu entscheiden, ob der Werth $\sin \varepsilon = n \,.\, \sin \tfrac{1}{2}p$ für γ ein Maximum oder Minimum gilt, d. h. ob das Differentialverhältniſs $\dfrac{dd\gamma}{d\varepsilon^2}$ negativ oder positiv ausfällt.

§. 360.

Es ist nach §. 358. $\dfrac{d\gamma}{d\varepsilon} = 1 - \dfrac{d6'}{d\varepsilon}$

$$\sin 6' \cdot \frac{d6'}{d\varepsilon} = \frac{\sin p \,.\, \sin \varepsilon \,.\, \cos \varepsilon}{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}} + \cos p \,.\, \cos \varepsilon,$$

folglich, wenn man von neuem differentiirt,

$$\frac{ddy}{d\varepsilon} = -\frac{dd6'}{d\varepsilon^2}$$

$$\frac{dd6'}{d\varepsilon^2}\cdot\cos 6' - \frac{d6'^2}{d\varepsilon^2}\cdot\sin 6' = -\cos p\,.\sin\varepsilon + \frac{nn\,.(\cos\varepsilon^2 - \sin\varepsilon^2) + \sin\varepsilon^4}{(nn - \sin\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\sin p.$$

Wenn man nun hierin den Werth von $\sin\varepsilon = n\,.\sin\frac{1}{n}p$ substituirt, so hat man zuerst, vermöge der beiden Gleichungen

$$\frac{dy}{d\varepsilon} = 1 - \frac{d6'}{d\varepsilon}, \quad \frac{dy}{d\varepsilon} = o,$$

den Werth $\frac{d6'}{d\varepsilon} = 1$, und da aufserdem

$$\sin 6' = \cos p\,.\sin\varepsilon - \sin p\,.\sqrt{nn - \sin\varepsilon^2},$$

so erhält man sogleich

$$\cos 6'\cdot\frac{ddy}{d\varepsilon^2} = \sin p.\sqrt{nn-\sin\varepsilon^2} - \frac{nn.(\cos\varepsilon^2-\sin\varepsilon^2)+\sin\varepsilon^4}{(nn - \sin\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot\sin p$$

$$= \frac{\sin p}{(nn - \sin\varepsilon^2)^{\frac{3}{2}}}\cdot(n^4 - nn),$$

und diese Gröfse ist für jeden Werth von ε positiv, da $n > 1$, folglich ist γ ein Minimum.

§. 361.

Sobald man den Winkel ε, unter welchem der Strahl einfällt, den Winkel $6'$, unter welchem er ausfährt, und den brechenden Winkel p des Prisma kennt, läfst sich das Brechungsverhältnifs n der Materie finden, aus welcher das Prisma besteht. Denn die Gleichung

$$\sin 6' = \cos p\,.\sin\varepsilon - \sin p\,.\sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}$$

giebt auch

$$n = \frac{\sqrt{\sin 6'^2 - 2\,.\cos p\,.\sin\varepsilon\,.\sin 6' + \sin\varepsilon^2}}{\sin p}.$$

Diese Formel vereinfacht sich noch, wenn man das Prisma so stellt, dafs der Winkel γ, unter dem der einfallende und der ausfahrende Strahl sich schneiden,

n Minimum ist, d. h. wenn $\delta' = -\varepsilon$ wird. Dann
t man

$$n = \sin\varepsilon \cdot \frac{\sqrt{2 + 2.\cos p}}{\sin p} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\frac{1}{2}p},$$

nd da in diesem Fall zugleich $\gamma = 2\varepsilon - p$, also
$= \frac{1}{2}.(\gamma + p)$ wird, so erhält man auch

$$n = \sin\tfrac{1}{2}\gamma . \cot\tfrac{1}{2}p + \cos\tfrac{1}{2}\gamma,$$

o also n durch den brechenden Winkel des Prisma,
nd den kleinsten Winkel, welchen der einfallende und
weimal gebrochene Strahl bilden können, ausgedrückt
ird. Um das Prisma in die Lage zu bringen, in
elcher der besagte Winkel γ ein Minimum wird, drehe
an dasselbe um eine parallel mit der brechenden
ante C gehende Axe, während die brechende Kante
lbst parallel mit dem Horizont liegt; fängt man dann
e zum zweiten mal gebrochenen Strahlen auf einer
ntfernten Wand auf, so sieht man, dafs ihr Bild anfangs
nkt, dann wieder steigt, und die Lage des Prisma,
i der das Bild den tiefsten Stand erreicht hat, giebt
e verlangte Stellung an. Denn da wir annehmen
irfen, dafs während der Zeit einer Beobachtung sich
e Lage des einfallenden Sonnenstrahls LM gegen
n Horizont nicht ändert, so wird durch die Drehung
s Prisma eine Aenderung des Einfallswinkels ε her-
rgebracht, woraus eine gleichzeitige stärkere oder
eringere Erhebung des zweimal gebrochenen Strahls
P hervorgeht. Je kleiner nun der Winkel PDE
sfällt, desto geringer wird die Neigung des zweimal
ebrochenen Strahls gegen den Horizont seyn, und
sto niedriger wird das Bild auf der Wand erscheinen.
ei dem Minimum von PDE liegt es also am tiefsten.

§. 362.

Statt des Winkels γ kann man sich auch anderer
inkel bedienen, die wenigstens eben so leicht gemessen
erden können. Zieht man nämlich durch C eine mit
em Horizont parallele Linie in der Zurückwerfungs-

ebene senkrecht auf die brechende Kante, so läfst s
die Neigung LFC des einfallenden Strahls und
Neigung der Seitenfläche AC des Prisma (Fig. 4
gegen den Horizont bestimmen. Setzt man $MFG =$
$HFC = h$, so wird

$$FMC = h - H$$
$$LMC = 90^0 + \varepsilon,$$

und da die Summe beider Winkel 180^0 betragen mu
so hat man

$$90^0 = h - H + \varepsilon,$$

oder wird auch $\sin \varepsilon = \cos (h - H)$, folglich läfst si
der Ausdruck $n = \dfrac{\sin \varepsilon}{\sin \frac{1}{2}p}$ auch so schreiben:

$$n = \frac{\cos (h - H)}{\sin \frac{1}{2}p}.$$

§. 363.

Wenn auf die Seitenfläche des Prisma AC Strahl
wie LM fallen, die alle unter einander parallel sin
so werden sowohl die zum erstenmal nach MN, als
zum zweitenmal nach NP gebrochenen unter einand
parallel seyn. Wenn hingegen die Strahlen nicht para
auffallen, so werden auch die zum zweitenmal geb
chenen einen Winkel mit einander bilden, und wir wol
untersuchen, wo ein Object, das vermittelst der geb
chenen Strahlen gesehen wird, zu liegen scheint.

Es sey ABC (Fig. 48.) das Prisma, L der leu
tende Punkt, von dem zwei unendlich nahe liegen
Strahlen LM, LM' auf das Prisma fallen; diese w
den nach MN und $M'N'$ gebrochen, die sich verläng
in L' schneiden; nach dem Heraustreten gehen
Strahlen nach PN, $P'N'$ fort, so dafs, wenn man
verlängert, ein Durchschnitt dieser Strahlen in L'' e
steht, an welchem Ort zugleich das Bild des Punkt
L zu liegen scheint. Es sey $LM = r$, der Einfall
winkel $= \varepsilon$, $MLM' = d\varepsilon$, so hat man im Dreie
$MM'L$

$$LM : MM' = \cos (\varepsilon + d\varepsilon) : \sin d\varepsilon,$$

so mit Vernachlässigung der höhern Potenzen von $d\varepsilon$

$$MM' = \frac{r d\varepsilon}{\cos \varepsilon}.$$

erner ist $L'MM' = 90^0 + 6$, $L'M'M = 90^0 - 6 - d6$,
$'L'M = d6$, also

$$L'M = \frac{MM' \cdot \cos 6}{d6}.$$

etzt man $CM = u$, so ist im Dreieck CMN

$$CM : MN = \sin CNM : \sin MCN,$$

der da $CNM = 90^0 + \varepsilon'$, $MCN = p$, so kommt

$$MN = \frac{u \cdot \sin p}{\cos \varepsilon'},$$

glich erhält man im Dreieck $NN'L'$

$$NL' : NN' = \sin L'N'N : \sin NL'N'.$$

s ist aber

$$NL' = ML' + MN = \frac{MM' \cdot \cos 6}{d6} + \frac{u \cdot \sin p}{\cos \varepsilon'}$$

$$\sin L'N'N = \cos \varepsilon'$$

$$\sin NL'N' = d6,$$

glich ergiebt sich

$$NN' = MM' \cdot \frac{\cos 6}{\cos \varepsilon'} + \frac{u \cdot \sin p}{\cos \varepsilon'^2} \cdot d6.$$

ndlich hat man im Dreieck $NL''N'$

$$NL'' : NN' = \sin L''N'N : \sin NL''N',$$

d wenn man $NL'' = r'$ setzt,

$$r' : NN' = \cos 6' : d6'$$

$$r' = \frac{NN' \cdot \cos 6'}{d6'}$$

$$= \frac{MM' \cdot \cos 6 \cdot \cos 6'}{\cos \varepsilon' d6'} + \frac{u \cdot \sin p \cdot \cos 6'}{\cos \varepsilon'^2} \cdot \frac{d6}{d6'}$$

$$= \frac{r \cdot \cos 6 \cdot \cos 6'}{\cos \varepsilon \cdot \cos \varepsilon'} \cdot \frac{d\varepsilon}{d6'} + \frac{u \cdot \sin p \cdot \cos 6'}{\cos \varepsilon'^2} \cdot \frac{d6}{d6'}.$$

§. 364.

Insofern nun die Entfernung des Punktes L vom
isma gegen die Dimensionen desselben als sehr grofs
trachtet werden kann, läfst sich das in u multiplicirte

Glied ohne merklichen Fehler weglassen, und es bleibt

$$r' = \frac{r \cdot \cos 6 \cdot \cos 6' \cdot d\varepsilon}{\cos \varepsilon \cdot \cos \varepsilon' d6'}.$$

Vermöge der Formel (§. 356.)

$$\sin 6' = \sin \varepsilon \cdot \cos p - \sin p \cdot \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}$$

kommt auch

$$d6' \cdot \cos 6' = \frac{\sin p \cdot \sin \varepsilon + \cos p \cdot \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}} \cdot \cos \varepsilon \cdot d\varepsilon,$$

und durch Substitution dieses Werthes von $d6'$ erhält man

$$r' = \frac{r \cdot \cos 6'^2 \cdot \cos 6}{\cos \varepsilon^2 \cdot \cos \varepsilon'} \cdot \frac{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}{\sin p \cdot \sin \varepsilon + \cos p \cdot \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}.$$

Ferner ist aus §. 355. $\varepsilon' = 6 - p$, folglich

$$\cos \varepsilon' = \cos p \cdot \cos 6 + \sin p \cdot \sin 6,$$

oder da ebenfalls

$$\sin 6 = \frac{\sin \varepsilon}{n}$$

$$\cos 6 = \frac{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}{n},$$

so erhält man durch Substitution dieser Werthe

$$\cos \varepsilon' = \frac{\cos p \cdot \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2} + \sin p \cdot \sin \varepsilon}{n}$$

$$r' = \frac{r \cdot \cos 6'^2}{\cos \varepsilon^2} \cdot \frac{nn - \sin \varepsilon^2}{(\sin p \cdot \sin \varepsilon + \cos p \cdot \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2})^2}.$$

Hat man das Prisma so gestellt, dafs der einfallende Strahl denselben Winkel mit seinem Einfallsloth macht, wie der zum zweitenmal gebrochene, so ist

$\varepsilon = -6'$, $\sin \varepsilon = n \cdot \sin \frac{1}{2}p$, also $r' = r$,

folglich erscheint der Gegenstand, durch das Prisma gesehen, in eben der Entfernung, als ohne das Prisma, wenn man letzterm die besagte Lage gegeben hat.

§. 365.

Man kann sich ebenfalls des Prisma bedienen, um das Brechungsverhältnifs von Flüssigkeiten zu finden, indem man zwei Glasplatten aneinander setzt und den

dazwischen enthaltenen hohlen prismatischen Raum mit der zu untersuchenden Flüssigkeit ausfüllt. Um die hierzu gehörigen analytischen Rechnungen gleich in der gröfsten Allgemeinheit zu führen, wollen wir annehmen, die Glasplatten hätten nicht ganz parallele Flächen, sondern bildeten Prismen, so dafs also die prismatische Gestalt der eingeschlossenen Flüssigkeit sich zwischen zwei Prismen befindet. Es sey nun

der erste Einfallswinkel $= \varepsilon$
der erste Brechungswinkel $= 6$
der zweite Einfallswinkel $= \varepsilon'$
der zweite Brechungswinkel $= 6'$
der dritte Einfallswinkel $= \varepsilon''$
der dritte Brechungswinkel $= 6''$
der vierte Einfallswinkel $= \varepsilon'''$
der vierte Brechungswinkel $= 6'''$

das Brechungsverhältnifs des Glases $= n$
das Brechungsverhältnifs der Flüssigkeit $= n'$
der brechende Winkel des ersten Glasprisma $= p$
der brechende Winkel der Flüssigkeit $= p'$
der brechende Winkel des zweiten Glasprisma $= p''$,

so erhält man (§. 355.) folgende Gleichungen, wenn man bemerkt, dafs nach §. 351. das relative Brechungsverhältnifs aus Glas in Flüssigkeit durch $\frac{n'}{n}$ ausgedrückt wird,

$$\sin \varepsilon = n \cdot \sin 6,$$

$$\sin \varepsilon' = \frac{n'}{n} \cdot \sin 6',$$

$$\sin \varepsilon'' = \frac{n}{n'} \cdot \sin 6'',$$

$$\sin \varepsilon''' = \frac{1}{n} \cdot \sin 6''',$$

$$p + \varepsilon' - 6 = o$$
$$p' + \varepsilon'' - 6' = o$$
$$p'' + \varepsilon''' - 6'' = o.$$

Vermöge dieser sieben Gleichungen kann man ε', ε'', ε''', 6, $6'$, $6''$ elimininiren, und man erhält eine Gleichung zwischen ε, $6'''$.

§. 366.

Aus den drei letzten Gleichungen ergeben sich Werthe von ε', ε'', ε''', die man in die zweite, d und vierte substituiren kann; hierdurch wird

$$\sin \varepsilon = n . \sin 6$$

$$\sin (6 - p) = \frac{n'}{n} \cdot \sin 6'$$

$$\sin (6' - p') = \frac{n}{n'} \cdot \sin 6''$$

$$\sin (6'' - p'') = \frac{1}{n} \cdot \sin 6'''.$$

Sind die Glasplatten, welche die Flüssigkeit einschlie mit genau parallelen Flächen versehen, so ist $p =$ $p'' = o$, und man erhält

$$\sin 6''' = \cos p' . \sin \varepsilon - \sin p' . \sqrt{n'n' - s}$$

also nimmt dann der Strahl einen solchen Weg, a die Glasplatten gar nicht vorhanden wären. Denn Gleichung drückt den Sinus des Winkels des zw gebrochenen Strahls mit dem Einfallsloth für den aus, wo der Einfallswinkel $= \varepsilon$, der brechende W des Prisma $= p'$, und das Brechungsverhältnifs Materie $= n'$ ist.

§. 367.

Eine vollständige Auflösung der vorigen Fo für jede Werthe der Winkel p, p'' würde etwa weitläufig ausfallen; wir haben aber auch nicht n dieses zu thun, da man in der Ausübung immer s Glastafeln wählt, die wenigstens so sehr als möglich dem Parallelismus rücksichtlich der Seitenflächen nä so dafs die Winkel p, p'', wenn sie auch nicht wi Null sind, doch sehr klein ausfallen. Nun gieb Gleichung

$$\sin (6 - p) = \frac{n'}{n} \cdot \sin 6'$$

$$\sin 6 . \cos p - \cos 6 . \sin p = \frac{n'}{n} \cdot \sin 6',$$

o, wenn man das Glied $\sin 6 . \cos p$ auf die andere ite setzt, und quadrirt,

$$\sin 6^2 . \cos p^2 - 2 . \sin 6 . \cos p . \sin 6' \cdot \frac{n'}{n} + \sin 6'^2 \cdot \frac{n'n'}{nn}$$
$$= \sin p^2 - \sin p^2 . \sin 6^2.$$

ieraus erhält man, indem $\cos p = 1$ gesetzt wird,

$$\sin 6 = \sin 6' \cdot \frac{n'}{n} + \sin p . \sqrt{1 - \frac{n'n'}{nn} \cdot \sin 6'^2},$$

lso, da $\sin \varepsilon = n . \sin 6$,

$$\sin \varepsilon = n' . \sin 6' + \sin p . \sqrt{nn - n'n' . \sin 6'^2}.$$

ben so giebt die Gleichung

$$\sin (6'' - p'') = \frac{1}{n} \cdot \sin 6''',$$

dem man sich erlaubt, $\cos p'' = 1$ zu nehmen,

$$\sin 6'' = \frac{1}{n} \cdot \sin 6''' + \sin p'' . \sqrt{1 - \frac{1}{nn} \cdot \sin 6'''^2},$$

d da $\sin (6' - p') = \frac{n}{n'} \cdot \sin 6''$, so wird

$$\sin (6' - p') = \frac{1}{n'} \cdot \sin 6''' + \sin p'' . \sqrt{\frac{nn}{n'n'} - \frac{1}{n'n'} \cdot \sin 6'''^2}.$$

s der Gleichung

$$\sin \varepsilon = n' . \sin 6' + \sin p . \sqrt{nn - n'n' . \sin 6'^2}$$

t man nun auch näherungsweise

$$. \sin 6' = \sin \varepsilon - \sin p . \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}$$

$$. \cos 6' = \sqrt{n'n' - \sin \varepsilon^2} + \sin \varepsilon . \sin p \cdot \frac{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}{\sqrt{n'n' - \sin \varepsilon^2}}$$

lglich wird hierdurch

$$. \sin (6' - p') = - \sin p' . \sqrt{n'n' - \sin \varepsilon^2}$$
$$- \sin \varepsilon . \sin p . \sin p' \cdot \frac{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}{\sqrt{n'n' - \sin \varepsilon^2}}$$
$$- \sin p . \cos p' . \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}$$
$$+ \sin \varepsilon . \cos p',$$

nd dieser Ausdruck mufs

$$= \sin 6''' + \sin p'' . \sqrt{nn - \sin 6'''^2}$$

gesetzt werden. Läfst man alle in $\sin p$ und $\sin p'$ multiplicirten Glieder weg, so behält man blofs

$$\sin \varepsilon . \cos p' - \sin p' . \sqrt{n'n' - \sin \varepsilon^2} = \sin 6''',$$

und diesen genäherten Werth von $\sin 6'''$ kann man in die Radicalgröfse substituiren. Hierdurch ergiebt sich der Werth von $\sin 6'''$

$$\begin{aligned}\sin 6''' = &- \sin p' . \sqrt{n'n' - \sin \varepsilon^2} + \sin \varepsilon . \cos p' \\ &- \sin p . \cos p' . \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2} \\ &- \sin p'' . \sqrt{nn - \sin 6'''^2} \\ &- \sin \varepsilon . \sin p . \sin p' . \frac{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}{\sqrt{n'n' - \sin \varepsilon^2}}.\end{aligned}$$

Hat man nun ε, $6'''$ beobachtet, und kennt man das Brechungsverhältnifs des Glases n, so wie die brechenden Winkel p, p', p'', so läfst sich hierdurch n' finden. Man würde zu diesem Ende zuerst n' aus der Gleichung

$$\sin \varepsilon . \cos p' - \sin p' . \sqrt{n'n' - \sin \varepsilon^2} = \sin 6''',$$

aus der sich der Werth von

$$n' = \frac{\sqrt{\sin 6'''^2 - 2 . \cos p' . \sin \varepsilon . \sin 6''' + \sin \varepsilon^2}}{\sin p'}$$

ergiebt, suchen, wodurch man schon einen sehr genäherten Ausdruck erhält. Nimmt man nun an, der wahre sey $= n' + \delta n'$, so hat man zur Bestimmung von $\delta n'$ die Gleichung

$$\begin{aligned}o = &\frac{n'\delta n' + \sin \varepsilon . \sin p . \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}{\sqrt{n'n' - \sin \varepsilon^2}} . \sin p' \\ &+ \sin p . \cos p' . \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2} \\ &+ \sin p'' . \sqrt{nn - \sin 6'''^2},\end{aligned}$$

aus welcher $\delta n'$ leicht gefunden wird. Was die bei der Brechung durch das Prisma Statt findende Farbenzerstreuung betrifft, so wird von dieser späterhin die Rede seyn.

§. 368.

Wir haben früher §. 343. untersucht, welche Erscheinungen ein belegter ebener Glasspiegel darbietet.

wenn die Brechung des Lichts in Betracht gezogen wird, und wir wollen jetzt die Aenderungen betrachten, welche wegen der Brechung in einem belegten gläsernen Hohlspiegel Statt finden, wobei wir der Allgemeinheit wegen annehmen, dafs die vordere und hintere Fläche desselben nicht aus einem und demselben Mittelpunkt beschrieben sind; zugleich machen wir die Voraussetzung, der leuchtende Punkt liege in der Axe so entfernt, dafs alle auf den Spiegel fallenden Strahlen als untereinander parallel angesehen werden können. Es seyen daher C, C' die Mittelpunkte der Bogen AB, $A'B'$ (Fig. 49.), LM ein mit der Axe CC' parallel einfallender Strahl, so ist CM das Einfallsloth, und wir setzen, wie schon in der Catoptrik bei dem Hohlspiegel geschehen ist, den Winkel $DCM = \alpha$, so wird α der Einfallswinkel. Hierauf geht der Strahl nach MM' fort, und setzt man $NMM' = \beta$, das Brechungsverhältnifs $= n$, so hat man

$$\sin \alpha = n \,.\, \sin \beta.$$

Man verlängere MM' rückwärts, bis sie die Axe in K schneidet, so ist im Dreieck CMK

$$MCK = 180^0 - \alpha, \quad CKM = \alpha - \beta, \quad CMK = \beta.$$

und man hat die Proportion

$$CM : CK = \sin MKC : \sin CMK.$$

Setzt man den Halbmesser der vordern Fläche $CM = r$, den Halbmesser der hintern Fläche $C'M' = r'$, die Dicke des Spiegels am Scheitel $DD' = c$, so wird

$$r : CK = \sin(\alpha - \beta) : \sin \beta$$

$$CK = \frac{r \,.\, \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$C'K = CK - CC'$$
$$= CK - C'D' + CD + DD';$$

folglich mit Einführung unserer Bezeichnungen

$$C'K = \frac{r \,.\, \sin \beta}{\sin(\alpha - \beta)} + r + c - r',$$

und man erhält im Dreieck $C'M'K$ die Proportion

$$C'M' : C'K = \sin C'KM' : \sin C'M'K.$$

$$\cdots \cdot \sin u$$

$$\frac{-2\varrho.(r'-\varrho).(n-1)}{nrr'} \cdot \sin$$

$$\frac{-2\varrho.(r'-\varrho).(n-1)}{rr'} \cdot \sin$$

$$\frac{-2\varrho.(r'-\varrho).(n-1)).nr}{\cdots.(r.(r'-2\varrho)-\varrho.(r'-\varrho).(n-1)}$$

… die höhern Potenzen von sin … auch hier alle mit der Axe parall … n einem einzigen Punkte derselbe … von der vordern Fläche des Spiege … wird. Setzen wir $n = 1$, so find … statt, und unsre Formel für u mu … leitete übergehen. Wir finden fi

$$-\frac{r'}{2} + \varrho = \frac{r'}{2} - c,$$

… fernung des Vereinigungspunkts … chen Fläche zu bestimmen, haben wir

$$\cdots = u + c = \frac{r'}{2},$$

§. 371.

… gefundene Ausdruck wird in dem Falle … unkte der beiden Bogen AB, $A'B'$ zu … sehr einfach, unter dieser Voraussetzung … wir finden

$$\cdots - \frac{nrr'}{2.(r+(n-1).r')},$$

$$\frac{nrr'}{2.(r+(n-1).r')} = \frac{r'}{2} + \frac{nr'.(r'-r)}{2.(r+(n-1)r')}$$

… dass der Vereinigungspunkt bei einem be … schen Glasspiegel weiter von demselbe

nt ist, als bei einem Metallspiegel, dessen Radius der belegten Glasfläche gleich ist. Setzen wir $r = r' = 48$ Zoll $= 576$ Linien, die Dicke des els $= 1$ Linie, $n = \frac{3}{2}$, so ist $D'T = 288.5$ ı, während für einen Metallspiegel $D'T = 288$ würde.

lehmen wir, um unsre für u gefundene Näherungs- l zu prüfen, an, es sey $r' = 576$, $r = 574$, $c = 1$, $\frac{3}{2}$, $\alpha = 12^0$, so ist $\varrho = 1$, und wir finden nach genauen Formeln des §. 369.

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= 5^0\ 19'\ 25''.5 \\ \gamma &= 5^0\ 18'\ 2'' \\ \delta &= 5^0\ 17'\ 44'' \\ \varepsilon &= 7^0\ 57'\ 30'' \\ u &= 284.63. \end{aligned}$$

§. 370. aufgestellten Ausdrücke geben

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= 5^0\ 19'\ 25''.5 \\ \gamma &= 5^0\ 18'\ 2'' \\ \delta &= 5^0\ 17'\ 23'' \\ \varepsilon &= 7^0\ 55'\ 45'' \\ u &= 287.43, \end{aligned}$$

von den wahren Werthen nur wenig verschieden. erhält ferner $D'T = 289.03$, fände keine Re- on Statt, so wäre

$$D'T = r' - \frac{r'}{2 \cdot \cos \alpha} = 284.6.$$

Von der Brechung des Lichts in Glaslinsen.

§. 372.

Nimmt man auf der Linie *AB* (Fig. 50.) Punkte *C* und *D* an, und beschreibt aus ihnen mit beliebigen Halbmessern *CF*, *DE* zwei Kreisbogen *GEH*, die sich in *G* und *H* durchschneiden, so hierdurch in der Ebene ein Raum eingeschlossen, aus zwei Kreissegmenten besteht. Wird nun diese so herumgedreht, daſs die Linie *AB* eine unverän Lage beibehält, also als Drehungsaxe betrachtet so beschreibt die Figur *GEHF* einen Körper, de zwei Kugelsegmenten besteht, und die zu diesen Seg ten gehörigen Kugeln werden eben die Halbmesse ben, als die Kreise, aus deren Segmenten die Figur zusammengesetzt war. Denkt man sich de den Oberflächen der Kegelsegmente eingeschlos Raum mit irgend einer brechenden Materie ang so nennt man diesen Körper eine lichtbreche Linse. Da in der Praxis das brechende Mittel immer aus Glas besteht, so heiſst dieser Körper wöhnlich eine Glaslinse, obgleich die Schlüsse, w rücksichtlich der bei dem Durchgang des Lichts d solche Linsen Statt findenden Erscheinungen abge werden, sich ganz allgemein auf jede brechende Ma anwenden lassen, wenn man nur dem Brechung hältniſs den jeder besondern Materie zukomme numerischen Werth in jedem besondern Fall bei Die Linie *AB*, welche die Mittelpunkte beider Ku verbindet, von welchen die Segmente, die die Glas

ausmachen, genommen sind, heifst die Axe der Linse, und es ist aus geometrischen Gründen bekannt, dafs diese Axe in E und F senkrecht auf der Linse stehen mufs. Die Entfernung der beiden Punkte G und H von einander, heifst der Durchmesser der Oeffnung der Linse, und EF ihre Dicke.

§. 373.

Aus der im vorigen Paragraph angegebenen Entstehung der Linsen sieht man, dafs, zufolge der verschiedenen Lage der Mittelpunkte C und D rücksichtlich der aus ihnen mit beliebigen Halbmessern beschriebenen Kreisbogen, sehr verschiedene Gestalten der Linsen hervorgehen können. Die Fälle, welche hierbei Statt finden, sind folgende (Fig. 51.):

A) Die Mittelpunkte liegen auf verschiedenen Seiten der Linse, und die Kreisbogen durchschneiden sich, dann heifst die Linse ein biconvexes Glas.

B) Die Mittelpunkte liegen auf verschiedenen Seiten der Linse, während die Kreisbogen sich nicht durchschneiden. Um in einem solchen Fall die Figur zu schliefsen, mufs man sich die Endpunkte der Kreisbogen durch beliebige Linien, z. B. durch grade, welche der Axe des Glases parallel liegen, verbunden denken; diese Gestalt heifst ein biconcaves Glas.

C) Die Mittelpunkte liegen auf einerlei Seite des Glases, und die Kreisbogen durchschneiden sich; dann heifst die Linse ein Meniscus, oder ein concav-convexes Glas.

D) Die Mittelpunkte liegen auf einerlei Seite des Glases, und die Kreisbogen durchschneiden sich nicht; dann erhält man das convex-concave Glas.

Endlich sind noch zwei Arten von Glaslinsen übrig, die blofs auf einer Seite gekrümmt sind, während die andere eine Ebene bildet, welche senkrecht auf dem durch die Mitte des Glases gezogenen Halbmesser oder seiner Verlängerung steht. Diese sind durch die Figuren E und F dargestellt, von denen das erste ein plan-

convexes, das zweite ein planconcaves Glas genannt wird. Man kann diese Arten als besondere Fälle der Gläser A und B ansehen, indem man nämlich den Halbmesser des Kugelschnitts der einen Seite unendlich grofs werden läfst. Die Gläser A, C, E heifsen allgemein convexe oder erhabene Gläser, so wie die unter B, D, F dargestellten, concave oder Hohlgläser genannt werden, da die erstern im Allgemeinen das Licht mehr concentriren, die letztern hingegen zerstreuen.

§. 374.

Um nun den Weg eines Lichtstrahls durch ein gewisses Glas zu untersuchen, mufs man rücksichtlich des Punktes, von welchem das Licht ausgeht, zwei besondere Fälle unterscheiden, je nachdem sich nämlich der leuchtende Punkt in der Axe selbst oder aufserhalb derselben befindet, und mit der Untersuchung des erstern Falles werden wir den Anfang machen.

Einen grofsen Vortheil gewährt bei diesen dioptrischen Untersuchungen die analytische Behandlung der Gegenstände, indem man nicht bei jeder Art von Gläsern die ganze Rechnung wieder von vorn anzufangen braucht, sondern es völlig hinreichend ist, ein einziges Glas als Normalfall zu betrachten, und aus den hierdurch gefundenen Resultaten blofs durch gehörige Aenderung der Vorzeichen die Erscheinungen, welche bei den übrigen Arten von Glaslinsen Statt finden, abzuleiten. Wir werden daher die ausführliche Betrachtung des Weges des Lichtstrahls an dem unter A vorgestellten biconvexen Glase vornehmen. Uebrigens ist es einleuchtend, dafs es bei dieser Untersuchung nicht nöthig ist, die Linse als Körper zu betrachten; denn da alle Schnitte, vermittelst Ebenen, die durch die Axe des Glases gehen, ganz gleiche Durchschnittsfiguren geben, so ist es hinreichend, einen dieser Durchschnitte zu betrachten, da alle aus dessen Eigenschaften abgeleiteten Resultate für alle übrigen Durchschnitte gleichfalls gelten müssen.

Es sey daher *HEGF* (Fig. 52.) der Durchschnitt ines biconvexen Glases, *C* und *D* die Mittelpunkte der Kreisbogen *GFH*, *GEH*, so dafs die durch *C* und *D* gezogene Linie die Axe des Glases vorstellt. In *A* befinde sich ein strahlender Punkt, der einen Lichtstrahl *AM* ausschickt, von welchem das Glas in *M* getroffen wird. Zieht man den Halbmesser *DM*, so ist dieser das Einfallsloth, und da wir das Glas von Luft, also einer weniger brechenden Materie, umgeben ansehen, so wird der Lichtstrahl *AM* so gebrochen, dafs er innerhalb des Glases seinen Weg nach *MO* fortsetzt, und *MO* dem Einfallsloth *MD* näher liegen wird, als die Verlängerung *MN* des einfallenden Strahls. Zieht man hierauf den Halbmesser *CO*, dessen Verlängerung durch *OQ* angegeben wird, so wird der in *O* aus dem Glase wieder in Luft oder den leeren Raum übertretende Strahl einen gröfsern Winkel mit *OQ* machen, als die Verlängerung *OP* von *OM*. Er wird also nach *OB* fortgehen, und in *B* die Axe treffen. Uebrigens ist es einleuchtend, dafs die Axe *AP* selbst den Weg eines Lichtstrahls darstellt; denn da auch *AE* als ein einfallender Lichtstrahl betrachtet werden kann, so geht dieser ungebrochen ins Glas nach der Richtung *EF* fort, da *AE* senkrecht auf der brechenden Fläche steht. Aus demselben Grunde geht der Strahl auch wieder ungebrochen nach *B* fort, und der Punkt *B* wird als der Durchschnitt zweier vom Punkt *A* herkommenden Strahlen angesehen werden können, folglich in *B* sich ein Bild des Punktes *A* befinden.

§. 375.

Man setze den Halbmesser der vordern Fläche $DM = r$, den der hintern $CO = \varrho$, die Dicke der Linse $EF = c$, so ist durch diese drei Gröfsen die Gestalt der Linse bestimmt; den Abstand *EA* des Objects von der vordern Seite des Glases nenne man h, die Entfernung *FB* des Bildes von der hintern Seite k,

[illegible] $EDM = \theta$, $OPB =$ [illegible] des Brechungsverhältnifs : [illegible] der Figur für den [illegible] dafs das Object eine solche [illegible] bei welcher schon nach [illegible] in M die Verlänger [illegible] dem Glase in P schnei [illegible] nicht Statt haben k [illegible] sehr nahe liegt; d [illegible] MD rückwärts verlängert d [illegible] schneidet dann die [illegible] auf derselben Seite, auf welcher das [illegible]

§ 376.

[illegible] darauf an, aus den zur Bestimm [illegible] der Lage des Objects gegebenen Grö [illegible] Bilde abzuleiten. Im Dreieck ADM

$$MD : DM = \sin AMD : \sin MAD.$$

[illegible]

$$= 180^\circ - (MDA + MA$$

$$= 180^\circ - (\varphi + \theta)$$

$$= k + r; \quad DM = r,$$

[illegible] Proportion

$$k + r : r = \sin(\varphi + \theta) : \sin\varphi,$$

[illegible]

$$\sin(\varphi + \theta) = \frac{k + r}{r} \cdot \sin\varphi.$$

[illegible] Gesetze der Lichtbrechung wi

$$\sin NMD : \sin OMD = n : 1,$$

[illegible]

$$NMD = MDA - MPD = \theta - \varphi',$$

[illegible]

$$\sin(\varphi + \theta) : \sin(\theta - \varphi') = n : 1$$

$$\sin(\theta - \varphi') = \frac{\sin(\theta + \varphi)}{n}.$$

[illegible] hat man

$$MP : DM = \sin DMP : \sin MPD,$$

setze ferner $MAC = \varphi$, $EDM = \theta$, $OPB = \varphi'$, $OCE = \theta'$, $OBD = \varphi''$, das Brechungsverhältnifs $= n$. Uebrigens ist die Verzeichnung der Figur für den Normalfall so angelegt, dafs das Object eine solche Entfernung vom Glase hat, bei welcher schon nach der ersten Brechung des Strahls in M die Verlängerung desselben die Axe hinter dem Glase in P schneidet, welches, wie man leicht sieht, nicht Statt haben kann, sobald das Object dem Glase sehr nahe liegt; dann mufs man sich die Linie MD rückwärts verlängert denken, und ihre Verlängerung schneidet dann die Axe der Glaslinse auf derselben Seite, auf welcher das Object liegt.

§. 376.

Es kommt nun darauf an, aus den zur Bestimmung der Linse und der Lage des Objects gegebenen Gröfsen die Lage des Bildes abzuleiten. Im Dreieck ADM ist

$$AD : DM = \sin AMD : \sin MAD.$$

Nun wird aber

$$AMD = 180^0 - NMD = 180^0 - (MDA + MAD)$$
$$= 180^0 - (\varphi + \theta)$$
$$AD = AE + ED = h + r; \quad DM = r,$$

folglich ist obige Proportion

$$h + r : r = \sin(\varphi + \theta) : \sin\varphi,$$

und hieraus

$$\sin(\varphi + \theta) = \frac{h+r}{r} \cdot \sin\varphi.$$

Vermöge der bekannten Gesetze der Lichtbrechung wird

$$\sin NMD : \sin OMD = n : 1,$$

oder da

$$OMD = MDA - MPD = \theta - \varphi',$$

so kommt

$$\sin(\varphi + \theta) : \sin(\theta - \varphi') = n : 1$$
$$\sin(\theta - \varphi') = \frac{\sin(\theta + \varphi)}{n}.$$

Im Dreieck DMP hat man

$$DP : DM = \sin DMP : \sin MPD,$$

nd da $DMP = \theta - \varphi'$, so wird

$$DP : r = \sin(\theta - \varphi') : \sin\varphi'$$

$$DP = r \cdot \frac{\sin(\theta - \varphi')}{\sin\varphi'}.$$

§. 377.

Das Dreieck COP giebt die Proportion

$$CP : CO = \sin COP : \sin OPC.$$

un ist aber

$$COP = 180^0 - MOC = 180^0 - (OCP + OPC)$$
$$= 180^0 - (\theta' + \varphi')$$
$$CP = DP + CF + ED - EF$$
$$= DP + r + \varrho - c,$$

lglich wird vorige Proportion

$$DP + r + \varrho - c : \varrho = \sin(\theta' + \varphi') : \sin\varphi',$$

ler, wenn man hierin den Werth von DP aus voriger leichung substituirt,

$$+ \varrho - c) \cdot \sin\varphi' + r \cdot \sin(\theta - \varphi') = \varrho \cdot \sin(\theta' + \varphi')$$

$$n(\theta' + \varphi') = \left(\frac{r - c}{\varrho} + 1\right) \cdot \sin\varphi' + \frac{r}{\varrho} \cdot \sin(\theta - \varphi').$$

ie Relation zwischen den Winkeln QOP und QOB giebt sich aus der Proportion

$$\sin QOB : \sin QOP = n : 1.$$

s ist aber in unsern Bezeichnungen

$$QOB = OCB + OBC$$
$$= \theta' + \varphi''$$
$$QOP = \theta' + \varphi',$$

olglich erhält man auch

$$\sin(\theta' + \varphi'') : \sin(\theta' + \varphi') = n : 1$$
$$\sin(\theta' + \varphi'') = n \cdot \sin(\theta' + \varphi').$$

Endlich hat man im Dreieck COB die Proportion

$$CB : CO = \sin COB : \sin CBO$$
$$COB = 180^0 - (OCB + OBC)$$
$$= 180^0 - (\theta' + \varphi')$$
$$CB = CF + FB = \varrho + k,$$

folglich wird

$$\varrho + k : \varrho = \sin(\theta' + \varphi'') : \sin\varphi'',$$

und hieraus erhält man

$$k = \frac{\varrho \cdot \sin(\theta' + \varphi'')}{\sin \varphi''} - \varrho,$$

wodurch der Abstand des Bildes von der hintern Seite des Glases gefunden ist.

§. 378.

Stellt man die in den beiden vorigen Paragraphen gefundenen Formeln zusammen, so hat man folgendes System:

1) $\sin(\theta + \varphi) = \frac{h + r}{r} \cdot \sin \varphi$

2) $\sin(\theta - \varphi') = \frac{\sin(\theta + \varphi)}{n}$

3) $\sin(\theta' + \varphi') = \left(\frac{r - c}{\varrho} + 1\right) \cdot \sin \varphi' + \frac{r}{\varrho} \cdot \sin(\theta - \varphi')$

4) $\sin(\theta' + \varphi'') = n \cdot \sin(\theta' + \varphi')$

5) $k = \frac{\varrho \cdot \sin(\theta' + \varphi'')}{\sin \varphi''} - \varrho,$

und diese fünf Gleichungen kann man als die Grundlage der Theorie des Weges der Lichtstrahlen durch Glaslinsen betrachten. Im Fall, dafs h unendlich grofs ist, oder wenigstens gegen die Dimensionen ϱ, r, c des Glases als unendlich betrachtet werden kann, wie dies z. B. dann eintritt, wenn der strahlende Punkt ein Himmelskörper ist, wird $\varphi = o$, und dann ist die erste der Formeln überflüssig, da die Gleichung $\sin \theta = o \cdot \infty$ nichts Bestimmtes giebt. Um nun aus diesen Formeln alle vorkommenden Gröfsen zu bestimmen, mufs man jede derselben durch eine Reihe ausdrücken, die nach den Potenzen eines der darin enthaltenen Winkel fortschreitet, wozu man sich sowohl des Winkels φ als des Winkels θ bedienen kann; φ ist der Winkel, welchen der einfallende Strahl mit der Axe macht, θ der Winkel, den der aus dem Mittelpunkt der vordern Fläche der Glaslinse nach dem Einfallspunkt gezogene Halbmesser mit der Axe bildet. Wir werden uns bei der Ent-

lung der Formeln in Reihen des Winkels θ be-
n, und die Reihen nach Potenzen des Sinus θ
hreiten lassen.

§. 379.

Vernachlässigt man zuerst alle Potenzen, welche
rste übersteigen, so ergiebt sich ganz einfach

$$\varphi = \frac{r}{h} \cdot \sin\theta$$

$$\varphi' = \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{hn}\right) . \sin\theta$$

$$\theta' = \left[\frac{r}{\varrho} - \frac{c}{\varrho} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{hn}\right)\right] . \sin\theta$$

$$\varphi'' = \frac{n\varrho - c.(n-1)}{\varrho} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{hn}\right) . \sin\theta + \frac{(n-1).r}{\varrho} \cdot \sin\theta$$

$$\frac{hnr\varrho - c\varrho.(h.(n-1) - r)}{.(r+\varrho).n.(n-1) - nr\varrho - c.(n-1).(h.(n-1) - r)}$$

Entfernung des Bildes von der hintern Seite des
s ist also ganz unabhängig von der Lage des
lspunktes, in so fern die Strahlen so einfallen,
ler Winkel θ blofs in seiner ersten Potenz in Rech-
gezogen zu werden braucht.

§. 380.

Um nun die nächst folgende Potenz zu entwickeln,
e bei Untersuchung der Abweichung der Licht-
en wegen der Kugelgestalt gebraucht wird, setze
der Kürze wegen

$$\frac{r}{h} = \alpha$$

$$1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{hn} = 6$$

$$\frac{r}{\varrho} - \frac{c}{\varrho} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{hn}\right) = \gamma$$

$$\frac{n\varrho - c.(n-1)}{\varrho} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{hn}\right) + \frac{(n-1).r}{\varrho} = \delta$$

und den oben angegebenen Werth von $k = \varkappa$. sieht nun leicht, dafs die Werthe von $\sin\varphi$, $\sin\theta'$, $\sin\varphi''$, in Reihen entwickelt, blofs nach d graden Potenzen von $\sin\theta$ fortschreiten, folglich wir annehmen, es sey

$$\begin{aligned}
\sin\varphi &= \alpha.\sin\theta - A.\sin\theta^3 \\
\sin\varphi' &= 6.\sin\theta - B.\sin\theta^3 \\
\sin\theta' &= \gamma.\sin\theta - C.\sin\theta^3 \\
\sin\varphi'' &= \delta.\sin\theta - D.\sin\theta^3 \\
k &= \varkappa \qquad - \lambda.\sin\theta^2,
\end{aligned}$$

wo die Coefficienten A, B, C, D, λ aus vorige chungen (§. 378.) bestimmt werden müssen.

§. 381.

Soll die Entwickelung bis zur dritten Pote $\sin\theta$ fortgesetzt werden, so mufs man statt des jedes vorkommenden Winkels $1 - \frac{1}{2}\cdot\sin^2$ setze erste Gleichung giebt dann

$$\frac{h}{r}\cdot A = \frac{1}{2}\cdot(\alpha^2 + \alpha),$$

oder, da $\frac{h}{r} = \frac{1}{\alpha}$ ist, so wird

$$A = \frac{1}{2}\cdot\alpha\alpha.(\alpha + 1).$$

Aus der zweiten Gleichung kommt

$$2B - 6.(6-1) = -\frac{2A}{n} - \frac{\alpha}{n}\cdot(\alpha +$$

oder, wenn man statt A seinen Werth setzt,

$$2B - 6.(6-1) = -\frac{(\alpha+1)^2.\alpha}{n}$$

$$D = 6.(6-1) - \frac{(\alpha+1)^2.\alpha}{2n}.$$

Aus der dritten Gleichung erhält man

$$C + \frac{1}{2}\cdot\gamma 6.(\gamma + 6) = \frac{1}{2}\cdot\frac{r}{\varrho}\cdot 6.(6-1) -$$

rmittelst der vierten Gleichung ergiebt sich

$$+D+\frac{1}{2}.\gamma\delta.(\gamma+\delta)=n.(C+B)+\frac{1}{2}.n\beta\gamma.(\gamma+\beta).$$

dlich haben wir noch den Werth von λ, vermittelst r Gleichung

$$k.\sin\varphi''=\varrho.\sin(\theta'+\varphi'')-\varrho.\sin\varphi'',$$

bestimmen, und man erhält durch die Entwickelung

$$\lambda\delta+\varkappa D=\varrho.\left[C+\frac{1}{2}.\delta\gamma.(\gamma+\delta)\right].$$

n sieht aber leicht, daſs der Werth von $\varkappa=\frac{\varrho\gamma}{\delta}$, also wird

$$\lambda=\varrho.\frac{C+\frac{1}{2}.\delta\gamma.(\gamma+\delta)}{\delta}-\frac{\varrho\gamma D}{\delta\delta}.$$

§. 382.

In den Coefficienten A, B, C, D, λ darf man ne merklichen Fehler die Dicke des Glases vernachsigen. Man hat dann die Werthe der besagten efficienten

$$A=\frac{1}{2}.\alpha\alpha.(\alpha+1)$$

$$B=-\frac{1}{2}.\beta.(1-\beta)-\frac{1}{2n}.(\alpha+1)^2.\alpha.$$

rner bestimmt sich C aus der Gleichung

$$C+\frac{1}{2}.\gamma\beta.(\gamma+\beta)=\frac{1}{2}.\frac{r}{\varrho}.\beta.(\beta-1),$$

in unter der Voraussetzung $c=o$, ist $\frac{r}{\varrho}=\gamma$, also nmt

$$C=-\frac{1}{2}.\gamma\beta.(\gamma+1).$$

en so wird

$$=(n-1).C+\frac{1}{2}.n\gamma\beta.(\gamma+\beta)-\frac{1}{2}.\gamma\delta.(\gamma+\delta)+nB$$

$$=\frac{1}{2}.\beta.(\gamma+1).[\gamma-n.(1-\beta)]$$

$$-\frac{1}{2}.\gamma\delta.(\gamma+\delta)-\frac{1}{2}.\alpha.(\alpha+1)^2.$$

Endlich folgt aus der Gleichung

$$\lambda = \frac{C + \frac{1}{2}.\delta\gamma.(\gamma+\delta)}{\delta}.\varrho - \frac{\varrho\gamma D}{\delta\delta},$$

dieser Werth

$$\lambda.\frac{\delta\delta}{\varrho} = -\frac{1}{2}.6\gamma.(\gamma+1).[\gamma+\delta-n.(1-$$
$$+\frac{1}{2}.\gamma\delta.(\gamma+\delta)^2 + \frac{1}{2}.\alpha\gamma.(\alpha+1)^2$$

§. 383.

Die Werthe von α, 6, γ, δ sind folgende:

$$\alpha = \frac{r}{h}, \quad 6 = \frac{h.(n-1)-r}{hn}$$
$$\gamma = \frac{r}{\varrho}, \quad \delta = \frac{(n-1).(r+\varrho)}{\varrho} - \frac{r}{h},$$

allein statt diese in vorige Gleichungen zu substitui wollen wir an die Stelle der Halbmesser r, ϱ an Gröfsen einführen. Setzt man nämlich

$$\frac{hnr}{h.(n-1)-r} = p,$$

so wird

$$r = \frac{ph.(n-1)}{p+hn},$$

und substituirt man diesen Werth in den Ausdruck indem die Dicke c des Glases vernachlässigt wird, kommt

$$\varkappa = \frac{\varrho p}{p.(n-1)+\varrho n}$$
$$\varrho = \frac{\varkappa p.(n-1)}{p-\varkappa n}.$$

Setzt man diese Werthe von r, ϱ in die Ausdrücke α, 6, γ, δ, so kommt

$$\alpha = \frac{p.(n-1)}{p+hn}, \quad 6 = \frac{h.(n-1)}{p+hn}$$
$$\gamma = \frac{p-\varkappa n}{p+hn}.\frac{h}{\varkappa}, \quad \delta = \frac{ph.(n-1)}{(p+hn).\varkappa}.$$

eraus ergiebt sich

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{n.(n-1)^2.pp.(p+h)}{(p+hn)^5}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1).h.(p+h)}{(p+hn)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{n.(n-1).p.(p+h)^2}{(p+hn)^5}$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1).hhp.(p-\varkappa n).(h+\varkappa)}{(p+hn)^5.\varkappa\varkappa}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1).hhp.(p-\varkappa n)}{(p+hn)^5.\varkappa^3} \cdot [\varkappa.(h+\varkappa) - nh.(p-\varkappa)]$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{n.(n-1).p.(p+h)}{(p+hn)^3.\varkappa} \cdot [h.(h+\varkappa) + n.(p+h).\varkappa]$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{nn.hh.(p-\varkappa)^2}{(p+hn)^2.\varkappa} + \frac{1}{2} \cdot \frac{nn.\varkappa\varkappa.(p+h)^2}{(p+hn)^2.h}$$

$$+ \frac{1}{2} \cdot \frac{n\varkappa.(p+h).(h+\varkappa)}{(p+hn)^2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{nh.(p-\varkappa).(h+\varkappa)}{(p+hn)^2}.$$

§. 384.

Für einen sehr weit entfernten Gegenstand, wo $= \infty$ gesetzt werden kann, werden die Werthe α, β, δ mit Berücksichtigung der Dicke des Glases (§. 380.)

$$\alpha = o, \quad \beta = \frac{n-1}{n}$$

$$\gamma = \frac{p-\varkappa n}{\varkappa n} \cdot \frac{p-c}{p}$$

$$\delta = \frac{p.(n-1)}{\varkappa n} - \frac{c.(p-\varkappa n).(n-1)}{\varkappa n p}.$$

ie Werthe der andern Coefficienten sind ferner für esen Fall

$$A = o, \quad B = -\frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{nn}$$

$$C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1).p.(p-\varkappa n)}{n^5.\varkappa\varkappa}$$

$$D = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1).p.(p-\varkappa n)}{n^5\varkappa^5} \cdot [\varkappa - np + \varkappa n]$$

$$- \frac{1}{2} \cdot \frac{(n-1).p}{nn\varkappa}$$

$$\lambda = \frac{(p-\varkappa)^2}{2\varkappa} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\varkappa - p}{n}.$$

§. 385.

Aus den Halbmessern der beiden Flächen der Linse und aus ihrer Dicke läfst sich leicht auf folgende Art der Durchmesser ihrer Oeffnung berechnen. Es seyen C und D die Mittelpunkte zweier Kreise (Fig. 53.), die sich in E und F schneiden, so wird die Linie EF die gesuchte Gröfse seyn. Man setze $DE = r$, $CE = \varrho$, $GH = c$, so wird $CD = r + \varrho - c$, und

$$\sin EDC = \frac{\sqrt{c.(2\varrho - c).(2r - c).(2r + 2\varrho - c)}}{2r.(r + \varrho - c)}$$

Da $EK = \frac{1}{2}EF$, und senkrecht auf CD steht, so hat man

$$EK = ED.\sin EDC$$
$$EF = 2ED.\sin EDC,$$

also, wenn man die Werthe von ED und $\sin EDC$ substituirt,

$$EF = \frac{\sqrt{c.(2\varrho - c).(2r - c).(2r + 2\varrho - c)}}{r + \varrho - c}.$$

Der Werth des Winkels EDC, welcher sich aus voriger Formel ergiebt, ist, wie man aus Vergleichung dieser Figur mit Figur 52 sieht, der gröfste Werth, den der Winkel θ bei der gegebenen Glaslinse erreichen kann.

Will man umgekehrt aus den Halbmessern der Flächen der Glaslinse und dem gröfsten Werth des Winkels θ die Dicke der Glaslinse finden, so hat man auf folgende Art zu verfahren. Im Dreieck CED erhält man $\varrho\varrho = rr + (r + \varrho - c)^2 - 2r.(r + \varrho - c).\cos\theta$, also, wenn diese Gleichung nach $r + \varrho - c$ aufgelöst wird, so ergiebt sich

$$c = 2r.\sin\tfrac{1}{2}\theta^2 + \varrho - \sqrt{\varrho\varrho - rr.\sin\theta^2}.$$

Es sey z. B. $r = 4$ Fufs, $\varrho = 2$ Fufs, $\theta = 15^0$, so wird

$$c = 0{,}4250975.$$

§. 386.

Bei den angegebenen Werthen von r und ϱ, dem Brechungsverhältnifs $n = \frac{3}{2}$, und der Annahme eines

unendlich entfernten Gegenstandes, hat man

$$p = 12, \quad \varkappa = \frac{8}{3},$$

also mit Berücksichtigung der Dicke des Glases

$$\alpha = o, \quad \mathcal{C} = \frac{1}{3}, \quad \gamma = 1{,}929150$$

$$\delta = 1{,}464575, \quad \varkappa = 2{,}634417.$$

Was die Werthe der andern Coefficienten betrifft, so hat man

$$A = o, \quad B = -\frac{1}{9}, \quad C = -1$$

$$D = -\frac{19}{4}, \quad \lambda = +\frac{127}{9}.$$

Man hat daher nach den Formeln (§. 380.)

$$\sin\varphi' = \frac{1}{3}\cdot\sin\theta + \frac{1}{9}\cdot\sin\theta^3$$

$$\sin\theta' = 1{,}929150\,.\sin\theta + \sin\theta^3$$

$$\sin\varphi'' = 1{,}464575\,.\sin\theta + \frac{19}{4}\cdot\sin\theta^3$$

$$k = 2{,}634417 - \frac{127}{9}\cdot\sin\theta^2.$$

Setzt man z. B. $\theta = 12^0$, so erhält man

$$\varphi' = 4^0\ 1'\ 53''$$
$$\theta' = 24\ 12\ 36$$
$$\varphi'' = 20\ 18\ 56$$
$$k = 2{,}024432.$$

Führt man die Berechnung nach den genauen Formeln des §. 378. aus, so erhält man folgende Resultate:

$$\varphi' = 4^0\ 1'\ 58''$$
$$\theta' = 24\ 12\ 46$$
$$\varphi'' = 21\ 0\ 43$$
$$k = 1{,}959553.$$

Man sieht also, dafs die durch die Näherungsformeln gefundenen Resultate eben nicht sehr von den genauen abweichen, obgleich wir zu dem betrachteten Beispiel eine Glaslinse von beinahe einem halben Fufs Dicke gewählt haben.

§. 387.

Setzt man in dem Ausdruck

$$k = \frac{hnr\varrho - c\varrho.(h.(n-1) - r)}{h.(r+\varrho).n.(n-1) - nr\varrho - c.(n-1).(h.(n-1) - r)}$$

$\varrho = r$, und $c = 2r$, so erhält man

$$k = \frac{2.(h+r) - hn}{2h.(n-1) + (n-2).r} \cdot r.$$

Dies ist die Entfernung des Vereinigungspunktes von Strahlen, welche vermittelst einer Kugel vom Halbmesser r gebrochen werden. Ist $h = \infty$, so kommt

$$k = \frac{2-n}{2.(n-1)} \cdot r,$$

wo natürlich die Entfernung k vom hintern Ende der Kugel gerechnet werden mufs.

§. 388.

Vernachlässigt man im Ausdrucke von k die Dicke des Glases, so bleibt

$$k = \frac{h\varrho r}{h.(r+\varrho).(n-1) - r\varrho}.$$

In diesem Ausdruck kann man r mit ϱ vertauschen, ohne dafs dadurch der Werth von k verändert wird. Berücksichtigt man also die Dicke der Glaslinse nicht, so ist es für die Entfernung des Sammlungspunktes der zweimal gebrochenen Strahlen einerlei, welche Seite der Glaslinse dem Gegenstand zugewendet wird. Dieses findet nicht Statt, sobald man die Dicke der Linse mit in Betracht zieht; denn setzt man der Kürze wegen

$$hnr\varrho + cr\varrho = p$$
$$h.(r+\varrho).n.(n-1) - nr\varrho = q,$$

so erhält man

$$k = \frac{p - c\varrho h.(n-1)}{q - c.(n-1).(h.(n-1) - r)}.$$

Dreht man die Glaslinse um oder vertauscht man r mit ϱ, und bezeichnet dann die Sammlungsweite der gebrochenen Strahlen durch k', so erhält man, wenn man

merkt, dafs p und q bei dieser Vertauschung ihre
erthe nicht ändern,

$$k' = \frac{p - crh.(n-1)}{q - c.(n-1).(h.(n-1) - \varrho)}.$$

ht man beide Gleichungen von einander ab, und
schränkt sich blofs auf die erste Potenz der Dicke c,
kommt

$$k - k' = \frac{c.(n-1).(r-\varrho).(qh-p)}{qq}.$$

n hat aber, mit Vernachlässigung von c, $q = \frac{p}{k}$,
glich wird auch

$$k - k' = \frac{c.(n-1).(r-\varrho).(h-k)}{p}.k,$$

er, wenn man statt p seinen Werth $hnr\varrho$ setzt,

$$k - k' = \frac{c.(n-1).(r-\varrho).(h-k).k}{hnr\varrho}.$$

ir einen unendlich entfernten Gegenstand wird

$$k - k' = \frac{c.(n-1).(r-\varrho).k}{nr\varrho}.$$

§. 389.

Aus der Formel

$$k = \frac{hr\varrho}{h.(r+\varrho).(n-1) - r\varrho}$$

hält man, indem auf beiden Seiten h addirt wird,

$$h + k = \frac{hh.(r+\varrho).(n-1)}{h.(r+\varrho).(n-1) - r\varrho}$$

$$\frac{h+k}{k} = \frac{h.(r+\varrho).(n-1)}{r\varrho}.$$

ezeichnet man den Werth, welchen k dann annimmt,
enn $h = \infty$ wird, durch f, so erhält man

$$f = \frac{r\varrho}{(r+\varrho).(n-1)}$$

$$\frac{h+k}{k} = \frac{h}{f}$$

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}.$$

Die Gröfse f wird die Brennweite der Linse ge
und man sieht aus der letzten Gleichung, welch
fache Relation zwischen der Entfernung des Ob
des Bildes und der Brennweite Statt findet, wenn
die Dicke der Glaslinse vernachlässigt wird.

§. 390.

Wenn man für die sechs verschiedenen Arte
Glaslinsen, welche im §. 372. angegeben sind, die F

$$f = \frac{r\varrho}{(r+\varrho).(n-1)}$$

näher betrachtet, so ergiebt sich, dafs für alle er
nen Gläser f positiv, für alle Hohlgläser f negativ
vorausgesetzt, dafs n gröfser als die Einheit ist.
für das biconvexe Glas sind beide Radien r, ϱ p
also f positiv. Ist die eine Seite des Glases eben
bei dem planconvexen Glas, so setze man $\varrho =$
so bleibt

$$f = \frac{r}{n-1}.$$

Bei dem Meniscus hat man eine hohle Fläche, a
negativ, und es wird

$$f = -\frac{r\varrho}{(r-\varrho).(n-1)},$$

also scheinbar negativ. Allein man mufs in diesem
bedenken, dafs die hohle Fläche einen gröfsern
messer haben mufs, als die erhabene, d. h. ohne
sicht auf die Vorzeichen $\varrho > r$; es ist also r
negativ, folglich erhält

$$f = \frac{r\varrho}{(\varrho-r).(n-1)}$$

einen positiven Werth.

§. 391.

Bei dem biconcaven Glase müssen beide Halbm
r, ϱ als negativ betrachtet werden, dann ergiebt

$$f = -\frac{r\varrho}{(r+\varrho).(n-1)}$$

irklich negativ. Das planconcave hat eine ebene Seite, s wird also r negativ und $\varrho = \infty$, folglich

$$f = -\frac{r}{n-1}.$$

Endlich ist das convex-concave Glas zu betrachten, bei welchem r als positiv, ϱ als negativ anzunehmen ist. Dann kommt

$$f = -\frac{r\varrho}{(r-\varrho).(n-1)},$$

und diese Gröfse ist wirklich negativ, da bei dem concav-convexen Glase der Halbmesser r der erhabenen Seite gröfser seyn mufs, als der Halbmesser ϱ der hohlen Seite. Uebrigens zeigt der negative Werth der Brennweite an, dafs der Vereinigungspunkt der gebrochenen Strahlen vor dem Glase auf derselben Seite liegt, wo sich das Object befindet. Es findet also bei diesen drei Hohlgläsern kein physischer, sondern blofs ein mathematischer Sammlungspunkt Statt, indem die gebrochenen Strahlen, wenn sie sich schneiden sollen, rückwärts verlängert gedacht werden müssen. Man nennt daher auch diesen gedachten Durchschnittspunkt den virtuellen Brennpunkt des Hohlglases.

§. 392.

Es folgt hieraus, dafs der Werth von $\frac{1}{h} + \frac{1}{k}$, welcher dem Reciproken der Brennweite gleich ist, für die drei erhabenen Gläser positiv ausfallen mufs. So lange also $h > f$, wird $\frac{1}{h} < \frac{1}{f}$, und da

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f},$$

so ergiebt sich, dafs k positiv seyn wird. Liegt also der Gegenstand weiter vom Glase entfernt, als die Brennweite, so entsteht das Bild hinter dem Glase. Fällt der Gegenstand in die Entfernung der Brennweite, so ist $h = f$, also $\frac{1}{k} = o$, und man sieht hieraus,

[illegible] man

$$[illegible] = \frac{r \cdot \sin(\theta - \psi)}{\sin \psi},$$

[illegible] $DL = ED = r$, so kommt

$$\frac{[illegible] \cdot \sin(\theta - \psi)}{[illegible]} - \frac{r \cdot \sin(\theta - \psi)}{\sin \psi} = r.$$

§. 396.

[illegible] die im vorigen §. entwickelten Formeln [illegible] ermittelt man

$$\frac{[illegible] - r \cdot \cos\alpha \cdot \sin\psi}{[illegible] \cdot \cos\alpha} = \sin(\theta - \psi)$$

$$[illegible] = \frac{\sin(\theta - \psi)}{n}$$

$$[illegible] = \frac{r - c + \varrho}{\varrho} \cdot \sin\psi' + \frac{r}{\varrho} \cdot \sin(\theta - \psi')$$

$$[illegible] = n \cdot \sin(\theta' + \psi')$$

$$\frac{\sin([illegible])}{\sin[illegible]} = \varrho.$$

[illegible] den vorigen Formeln vorkommenden Winkel [illegible] als sehr klein betrachtet werden können, so [illegible] dieselben dadurch sehr vereinfachen, daß [illegible] den Sinus den Bogen, statt des Cosinus die [illegible]. Hierdurch werden dieselben

$$[illegible] = \psi$$

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{n}$$

$$[illegible] = \frac{[illegible]}{\varrho}$$

$$[illegible] = n \cdot (\theta' + \psi')$$

$$[illegible].$$

[illegible] vermittelst der als gegeben angenommenen [illegible] bestimmen [illegible].

§. 394.

Nun sey der Winkel $MDE = \theta$, MK die Richtung des Strahls nach der ersten Brechung, $MKE = \psi'$, so hat man, vermöge des bekannten Gesetzes der Lichtbrechung,

$$\sin LMD = n \cdot \sin KMD,$$

d. h.

$$\sin(\theta - \psi) = n \cdot \sin(\theta - \psi').$$

Ferner hat man im Dreieck DMK

$$DM : DK = \sin DKM : \sin DMK$$
$$r : DK = \sin \psi' : \sin(\theta - \psi')$$
$$DK = \frac{r \cdot \sin(\theta - \psi')}{\sin \psi'}.$$

In Dreieck COK erhält man

$$CO : CK = \sin CKO : \sin COK.$$

Setzt man den Winkel $OCK = \theta'$, so kommt aus dieser Proportion

$$\varrho : CK = \sin \psi' : \sin(\psi' + \theta').$$

Nun ist aber

$$CK = CD + DK$$
$$= r + \varrho - c + \frac{r \cdot \sin(\theta - \psi')}{\sin \psi'},$$

folglich ergiebt sich

$$\varrho \cdot \sin(\psi' + \theta') = (r + \varrho - c) \cdot \sin \psi' + r \cdot \sin(\theta - \psi').$$

§. 395.

Ist endlich OB der zum zweitenmal gebrochene Strahl, und setzt man $OBC = \psi''$, so wird

$$\sin QOB = n \cdot \sin QOK,$$

oder mit Einführung unserer Bezeichnungen

$$\sin(\theta' + \psi'') = n \cdot \sin(\theta' + \psi'),$$

und das Dreieck COB giebt dann

$$CB : CO = \sin COB : \sin CBO$$
$$CB : \varrho = \sin(\psi'' + \theta') : \sin \psi''.$$

Setzt man $FB = u$, so wird $CB = \varrho + u$, folglich, wenn dieser Werth in vorige Proportion gesetzt wird, erhält man

$$u = \frac{\varrho \cdot \sin(\psi'' + \theta')}{\sin \psi''} - \varrho.$$

$$\psi' = \frac{(n-1).(\alpha-\mathfrak{G}).h + \mathfrak{G}r}{nr}.$$

$$\theta' = -\frac{h.(\alpha-\mathfrak{G})}{r}, \quad \psi'' = \mathfrak{G}$$

$$u = -\frac{\varrho h}{r}.\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{G}} - 1\right),$$

und diesen Werth von u wollen wir durch m bezeichnen, so dafs also

$$m = \frac{\varrho h}{r}.\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{G}} - 1\right).$$

Für den Fall eines unendlich weit entfernten Gegenstandes scheinen die Werthe von θ, ψ', θ', u unendlich grofs zu werden. Allein führt man den Ausdruck von $\mathfrak{G}$ ein,

$$\mathfrak{G} = \frac{n.(r+\varrho) - c.(n-1)}{n.(r+\varrho) - c.(n-1) + \frac{cr}{h}}.\alpha,$$

so erhält man

$$h.(\alpha-\mathfrak{G}) = \frac{cr}{n.(r+\varrho) - c.(n-1) + \frac{cr}{h}}.\alpha,$$

also für $h = \infty$

$$h.(\alpha-\mathfrak{G}) = \frac{cr}{n.(r+\varrho) - c.(n-1)}.\alpha.$$

Man erhält also für einen unendlich entfernten Gegenstand folgende Werthe:

$$\theta = \frac{c}{n.(r+\varrho) - c.(n-1)}.\alpha$$

$$\psi' = \frac{(r+\varrho)}{n.(r+\varrho) - c.(n-1)}.\alpha$$

$$\theta' = -\frac{c}{n.(r+\varrho) - c.(n-1)}.\alpha$$

$$u = -\frac{c\varrho}{n.(r+\varrho) - c.(n-1)}.$$

§. 399.

Aus dem entwickelten Werth von $\mathfrak{G}$ sieht man, dafs dieser Winkel nur wenig vom Winkel α verschieden

eyn wird, und vernachlässigt man die Dicke des Glases, o findet gar kein Unterschied zwischen denselben Statt, lan sagt daher im letztern Fall auch, ein durch die litte des Glases gehender Strahl setze seinen Weg ngebrochen fort, und man nennt diesen Strahl jedes- nal den vom leuchtenden Punkt kommenden Haupt- trahl, auf welchem, wie bald gezeigt werden wird, las Bild des Punktes liegt. Der negative Werth von u eigt an, dafs der Durchschnitt dieses Hauptstrahls mit er Axe auf derselben Seite der hintern Fläche des Glases liegt, als der leuchtende Punkt, indem wir im Normalfall, wenn dieser Durchschnitt hinter das Glas iel, u als positiv betrachteten. Die gleichen und ent- gegengesetzten Werthe von θ und θ' zeigen ferner an, dafs die aus den Mittelpunkten der Krümmung der Flächen der Gläser gezogenen Einfallslothe einander parallel sind, und auf verschiedene Seiten der Axe fallen.

§. 400.

Die Entfernung, in welcher die Verlängerung des einfallenden Strahls neben dem zum zweitenmal gebro- chenen hinläuft, läfst sich durch folgende Betrachtungen finden. Die Entfernung EL, in welcher ein einfallender Strahl verlängert die Axe schneidet, von der vordern Fläche des Glases an gerechnet, ist (§. 393.)

$$EL = \frac{h \,.\, \sin(\alpha - \psi)}{\cos\alpha \,.\, \sin\psi},$$

also, wenn man die Winkel als sehr klein betrachtet, und statt ψ seinen für diesen Fall, wo beide Strahlen parallel sind, passenden Werth δ setzt, $= \frac{h \,.\, (\alpha - \delta)}{\delta}$;

addirt man hierzu den Werth von u, ohne Rücksicht auf das Vorzeichen, und zieht die Summe von der Dicke des Glases ab, so kommt

$$c - \frac{(r + \varrho) \,.\, (\alpha - \delta)}{\delta r} \cdot h.$$

ies ist die Entfernung der beiden Durchschnittspunkte

von einander, welche der verlängerte einfallende Strahl und der zum zweitenmal gebrochene und verlängerte Strahl mit der Axe bilden. Multiplicirt man diese Entfernung mit dem Sinus des Winkels, den beide Strahlen mit der Axe machen, d. h. durch $\sin 6$, oder, da 6 sehr klein ist, blofs durch 6, so ergiebt sich die Entfernung beider Strahlen von einander. Bezeichnen wir selbige durch p, so ist

$$p = c6 - \frac{r+\varrho}{r} \cdot h.(\alpha - 6).$$

Führt man statt 6 und $\frac{h.(\alpha-6)}{r}$ ihre Werthe

$$6 = \frac{n.(r+\varrho) - c.(n-1)}{n.(r+\varrho) - c.(n-1) + \frac{cr}{h}} \cdot \alpha,$$

$$\frac{h.(\alpha-6)}{r} = \frac{c}{n.(r+\varrho) - c.(n-1) + \frac{cr}{h}} \cdot \alpha$$

ein, so erhält man

$$p = \frac{(n-1).(r+\varrho-c)}{(\varrho+r).n - c.(n-1) + \frac{cr}{h}} \cdot \alpha.c,$$

oder, mit Vernachlässigung der höhern Potenzen von c,

$$p = \frac{(n-1).\alpha c}{n}.$$

§. 401.

Nun sey $EHFG$ ein biconvexes Glas (Fig. 55.), EN seine Axe, KL der Hauptstrahl, so wie ML ein von demselben Object herkommender Strahl nach der zweiten Brechung. Dieser schneidet den Hauptstrahl in L und die Axe in N, so dafs ein Dreieck KNL sich bildet. In diesem hat man die Proportion

$$KN : KL = \sin KLN : \sin PNL,$$

oder da $FN = u$, $KF = m$, $PNL = \psi''$, $NKL = 6$, so wird

$$u + m : KL = \sin(\psi'' - 6) : \sin \psi'',$$

raus, wenn man statt der Sinus der Winkel die setzt,

$$LK = \frac{(u + m).\psi''}{\psi'' - \delta}.$$

ird aber KF von KQ wegen der Kleinheit des δ nicht verschieden seyn; denn zieht man CQ, er Mittelpunkt des Kreisbogens FQ ist, so kennt Dreieck KCQ

$$CQ = \varrho, \quad KCQ = \theta'', \quad FKQ = \delta,$$

verhält sich, wenn statt der Sinus gleich die gesetzt werden,

$$\varrho : KQ = \delta : \theta''.$$

aber ohne Rücksicht auf das negative Vor-, das hier nicht betrachtet zu werden braucht,

$$\theta'' = \frac{h.(\alpha - \delta)}{r},$$

erhält man

$$KQ = \frac{h\varrho.(\alpha - \delta)}{\delta r} = m.$$

l daher

$$\begin{aligned} QL &= KL - KQ \\ &= \frac{(u + m).\psi''}{\psi'' - \delta} - m \\ &= \frac{u\psi'' + m\delta}{\psi'' - \delta} = K, \end{aligned}$$

ser Werth K giebt die Entfernung des Bildes dem Glase an, das von einem aufserhalb der genden Punkt herkommt.

§. 402.

§. 396. haben wir die Gleichungen

$$\frac{h}{r} \cdot (\alpha - \psi) = \theta$$

$$\theta - \psi' = \frac{\theta - \psi}{n}$$

$$\theta' = \frac{r\theta - c\psi'}{\varrho}$$

$$\theta' + \psi'' = n.(\theta' + \psi')$$

$$u = \frac{\varrho\theta'}{\psi''},$$

von [illegible] die Gleichun
und [illegible]
Str [illegible]
fer [illegible]
mi [illegible] Gleichungen
kl [illegible]
be [illegible] $- (n-1).c$
du [illegible]

$- (n-1).c$

F [illegible]

$- \frac{c}{\varrho n} \cdot \psi.$

$- 1).c$

$- 1).c + \frac{cr}{h}$

[illegible] und [illegible]

[illegible] $n-1-r)$ [illegible]

[illegible] dem von k §.379., [illegible] Zähler dieses Bruchs [illegible] ausdrückt, gleich [illegible] auch

$- \frac{\varrho}{k}$

[illegible] folgende Form

$(\beta - \psi).$

[illegible] (§.39[illegible]), so wird

[illegible]

$$m\mathfrak{G} = \frac{\varrho c}{n.(r+\varrho) - (n-1).c + \frac{cr}{h}} \cdot \alpha,$$

lglich

$$\varrho\theta' + m\mathfrak{G} = \frac{hnr - c.(h.(n-1) - r)}{nr} \cdot (\mathfrak{G} - \psi).$$

a nun

$$K = \frac{\varrho\theta' + m\mathfrak{G}}{\psi'' - \mathfrak{G}},$$

erhält man hierdurch ganz einfach

$$K = k,$$

h. die Punkte, welche aufserhalb der Axe liegen, ben ihre Bilder in derselben Entfernung vom Glase, s diejenigen Punkte, welche in der Axe der Glaslinse lbst befindlich sind, und wenn man die Dicke des lases bei Seite setzt, so wird das Bild auf der Linie gen, welche den leuchtenden Punkt mit der Mitte r Glaslinse verbindet.

§. 403.

Wir gehen jetzt zur Untersuchung des Weges eines ichtstrahls über, wenn derselbe mehrere Glaslinsen urchlaufen mufs. Hierbei vernachlässigen wir die Dicke r Gläser, und setzen zugleich die Sinus den Bogen roportional, so dafs die höhern Potenzen der Winkel änzlich wegfallen. Im Normalfall nehmen wir ferner , alle Glaslinsen seyen convex, und so gestellt, dafs ischen je zwei ein Bild fällt. Nehmen wir nun die ntfernung des Objects von der ersten Glaslinse h, die s ersten Bildes von der zweiten Glaslinse h', u. s. w., e Entfernung des ersten Bildes von der ersten Glas- se k, die des zweiten Bildes von der zweiten Glas- se k', u. s. w., die Brennweite der Gläser f, f', f'', d bedenken, dafs jedes Bild für das folgende Glas Object angesehen werden kann, so haben wir nach 389. folgende Gleichungen:

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{f'},$$

$$\frac{1}{h''} + \frac{1}{k''} = \frac{1}{f''},$$

u. s. w. fort. Sind nun die Entfernungen der Gläser von einander l, l', l'', u. s. w., so hat man noch folgende Gleichungen:

$$k + h' = l$$
$$k' + h'' = l'$$
$$k'' + h''' = l'' \quad \text{u. s. w.,}$$

folglich erhält man auch, indem die Gröfsen h', h'', h'''... durch l, l', l''..., k, k', k''... ausgedrückt werden,

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$
$$\frac{1}{l - k} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{f'}$$
$$\frac{1}{l' - k'} + \frac{1}{k''} = \frac{1}{f'''} \quad \text{u. s. w.}$$

Hat man z. B. nur zwei Gläser, so erhält man

$$k' = \frac{lf'.(h - f) - ff'h}{(l - f').(h - f) - hf'},$$

und wenn dieser Werth von k' unendlich grofs werden soll, d. h. wenn die Strahlen hinter dem zweiten Glase unter einander und der Axe parallel fortgehen sollen, so erhält man

$$(l - f').(h - f) - hf = o$$
$$\frac{h.(f + f') - ff'}{h - f} = l.$$

Ist der Gegenstand so entfernt, dafs man $\frac{f}{h} = o$ setzen kann, so bleibt blofs $f + f' = l$, d. h. der Abstand der Gläser ist der Summe ihrer Brennweiten gleich, wenn Strahlen, die auf das erste parallel einfallen, hinter dem zweiten auch wieder parallel fortgehen sollen.

Wenn beide Gläser an einander liegen, so dafs l sehr klein ist, so kommt, da man ohne Fehler dann $l = o$ setzen kann,

$$k' = \frac{hff'}{f'.(h - f) + hf'},$$

und für einen unendlich entfernten Gegenstand

$$k' = \frac{ff'}{f + f'}, \quad \frac{1}{k'} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'}.$$

Legt man eine beliebige Menge Gläser zusammen, so wird für einen unendlich entfernten Gegenstand das Umgekehrte der Entfernung des Bildes vom Glase durch

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{f'} + \frac{1}{f''} + \ldots\ldots$$

ausgedrückt.

Uebrigens läfst sich die Gröfse k für jede beliebige Menge Gläser leicht durch einen Kettenbruch darstellen. Bezeichnet man die reciproken Gröfsen von $f, f', f'' \ldots$ durch $F, F', F'' \ldots$, die reciproken Gröfsen von $k, k', k'' \ldots$ durch $K, K', K'' \ldots$, und setzt $\frac{1}{h} = H$, so wird für ein Glas

$$K = F - H,$$

für zwei Gläser

$$K' = F' - \cfrac{1}{l - \cfrac{1}{F - H}},$$

für drei Gläser

$$K'' = F'' - \cfrac{1}{l' - \cfrac{1}{F' - \cfrac{1}{l - \cfrac{1}{F - H}}}},$$

wo das Gesetz der Fortschreitung deutlich vor Augen liegt.

§. 404.

Es läfst sich nun auch leicht bestimmen, in welcher Entfernung von der Axe der Gläser ein vom Object, das in der Axe angenommen wird, herkommender Strahl alle folgenden Gläser trifft. Bezeichnet man nämlich diese Entfernungen durch $t, t', t'' \ldots\ldots$, die Entfernung des Durchschnittspunkts des Strahls mit der Axe von den Gläsern durch $h, h', h'' \ldots\ldots$, so geben die Quotienten $\frac{t}{h}, \frac{t'}{h'}, \frac{t''}{h''} \ldots\ldots$ die Tangenten der Winkel an, unter welchen der durchgehende Strahl die Axe

zwischen jedem Paar von Gläsern schneidet. Bezeichnet man diese Winkel durch φ, $\varphi_,$, $\varphi_{,,}$, ... und bedenkt, dafs man bei so kleinen Winkeln, als hier betrachtet werden, die Bogen statt der Tangenten setzen kann, so erhält man

$$t = h\varphi, \quad t' = h'\varphi_, \quad t'' = h''\varphi_{,,} \text{ etc.}$$

Nach §. 379. hat man aber $h . \sin \varphi = r . \sin \theta$, oder $h\varphi = r\theta$, also auch $t = r\theta$, und da der Winkel, unter welchem der zum zweitenmal gebrochene Strahl die Axe trifft, durch die Gleichung desselben Paragraphen,

$$\sin \varphi'' = \frac{n\varrho - c.(n-1)}{\varrho} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{hn}\right) . \sin \theta + \frac{(n-1).r}{\varrho} \cdot \sin \theta$$

gegeben wird, so erhält man, mit Vernachlässigung der Dicke des Glases, indem φ'', θ' statt $\sin \varphi''$ und $\sin \theta$ gesetzt wird,

$$\varphi'' = \frac{\varrho . [(n-1).h - r] + (n-1).hr}{\varrho h} . \theta$$

$$= \frac{(n-1).h.(r+\varrho) - r\varrho}{r\varrho h} . t.$$

Der Coefficient von t ist aber nichts anders, als der reciproke Werth von k, wenn man die Dicke des Glases vernachlässigt, man hat also

$$\varphi'' = \frac{t}{k},$$

und wenn man für die folgenden Gläser die analogen Gröfsen $\varphi_,''$, $\varphi_{,,}''$ ..... durch k', k'' .... bezeichnet, so kommt

$$\varphi_,'' = \frac{t'}{k'}, \quad \varphi_{,,}'' = \frac{t''}{k''} .....$$

Es ist nun aber natürlich, dafs der einfallende Strahl auf dem zweiten Glase die Axe unter demselben Winkel schneidet, als der im ersten gebrochenen Strahl, da beide Strahlen eine und dieselbe grade Linie bilden, nur sind sie einander entgegengesetzt, weil sie auf ver-

dene Seiten der Axe fallen; man hat daher

$$\varphi_{,} = -\varphi'', \quad \varphi_{,,} = -\varphi_{,}'' \text{ u. s. w.,}$$

ch

$$t' = -h'\varphi'', \quad t'' = -h''\varphi_{,}''$$

$$t''' = -h'''\varphi_{,,}'', \quad t^{\text{IV}} = -h^{\text{IV}}\varphi_{,,,}'' \text{ u. s. w.}$$

tituirt man statt φ'', $\varphi_{,}''$, $\varphi_{,,}''$ ... ihre Werthe, so mt

$$t' = -\frac{h'}{k} \cdot t$$

$$t'' = +\frac{h'h''}{kk'} \cdot t$$

$$t''' = -\frac{h'h''h'''}{kk'k''} \cdot t$$

w. fort, so dafs die Zeichen abwechselnd positiv negativ ausfallen. Man sieht zugleich, dafs die messer der Oeffnungen der Gläser die Werthe t', $'''$ .... haben müssen, wenn die in der Entfernung n der Axe auf das erste Glas fallenden Strahlen h die folgenden Gläser hindurchgehen sollen.

§. 405.

Es seyen (Fig. 55 b.) AB, $A'B'$, $A''B''$ u. s. w. ere Glaslinsen, deren gemeinschaftliche Axe durch Linie CE'' ausgedrückt wird, in CD befinde sich Object, in F, F' die Sammlungspunkte der Gläser, erden nach §. 402. Ff, $F'f'$ die Bilder der graden CD vorstellen. Setzt man nach und nach $CD = \lambda$, $= \lambda'$, $F''f'' = \lambda''$ u. s. w., und wie vorher

$EC = h$, $FE' = h'$, $F'E'' = h''$ .....
$EF = k$, $E'F' = k'$, ...

rhält man sogleich, wenn man, um die entgegen- tzte Lage zu bezeichnen, das negative Vorzeichen ndet,

$$\lambda' = \frac{k\lambda}{h}$$

$$\lambda'' = \frac{k'\lambda'}{h'} = \frac{kk'}{hh'} \cdot \lambda$$

$$\lambda''' = \frac{k''\lambda''}{h''} = \frac{kk'k''}{hh'h''} \cdot \lambda$$

u. s. w. fort, oder, wenn man den scheinbaren Durchmesser des Objects durch α bezeichnet, so wird $CED = \alpha$, und man hat auch, wenn der Winkel α als sehr klein betrachtet wird, $\lambda = h\alpha$, folglich ist

$$-\lambda' = k\alpha$$
$$+\lambda'' = \frac{kk'}{h'} \cdot \alpha$$
$$-\lambda''' = \frac{kk'k''}{h'h''} \cdot \alpha,$$

wobei man immer bemerken muſs, daſs zwischen den Gröſsen $k, k', k'' \ldots, h, h', h'' \ldots$ die Relationen

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$
$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{f'}$$
$$\frac{1}{h''} + \frac{1}{k''} = \frac{1}{f''} \text{ u. s. w.}$$
$$h' + k = l$$
$$h'' + k' = l'$$
$$h''' + k'' = l'' \text{ u. s. w.}$$

Statt finden, wo $l, l', l'' \ldots$ die Abstände der Gläser von einander, und $f, f', f'' \ldots$ ihre Brennweiten bedeuten.

§. 406.

Der Weg des Hauptstrahls DE, welcher von einem Punkt des Objects durch die Mitte des ersten Glases geht, und auf welchem alle Bilder dieses Punktes liegen müssen, die durch die verschiedenen Brechungen in den Glaslinsen nach und nach gebildet werden, wird in der Figur durch die gebrochene Linie $DEHH'$ angedeutet. Die Entfernung, in welcher ein Strahl, der unter dem Winkel ψ gegen die Axe einfällt, nach seiner zweimaligen Brechung die Axe hinter dem Glase trifft, wurde in §. 396. durch u bezeichnet, und es ergab sich $u = \frac{\varrho\theta'}{\psi''}$, wo, mit Vernachlässigung der Dicke des Glases, (§. 402.)

$$\psi'' = \frac{h.(n-1)}{r\varrho}.(r+\varrho).\alpha - \frac{h.(n-1).(r+\varrho)-r\varrho}{r\varrho}.\psi$$

$$\theta' = \frac{h}{\varrho}.(\alpha-\psi)$$

Uebrigens bezeichnet ψ'' den Winkel, unter welchem der zweimal gebrochene Strahl die Axe schneidet. Es ist aber

$$\frac{1}{k} = \frac{h.(r+\varrho).(n-1)-r\varrho}{hr\varrho}$$

$$\frac{k+h}{k} = \frac{h.(r+\varrho).(n-1)}{r\varrho},$$

so wird auch

$$\psi'' = \frac{(k+h)}{k}.\alpha - \frac{h}{k}.\psi = \alpha + \frac{h}{k}.(\alpha-\psi),$$

und hieraus ergiebt sich

$$u = \frac{kh.(\alpha-\psi)}{k\alpha + h.(\alpha-\psi)}.$$

§. 407.

Für das erste Glas ist nun $\psi = DEC = \alpha$, also $\theta = \alpha$; da der Einfallswinkel auf jedes folgende Glas dem Winkel gleich ist, welchen der durch das vorhergehende Glas gebrochene Strahl mit der Axe bildet, aber im entgegengesetzten Sinne, so würde man für das zweite Glas nur $-\alpha$ statt ψ zu setzen haben; allein wie in dem Normalfall, welchen wir in den §§. 393. 394. 395. untersuchten, der einfallende Strahl die Axe hinter dem Glase schnitt; hier aber der Durchschnittspunkt vor dem Glase liegt, so wird das entgegengesetzte Zeichen wieder entgegengesetzt genommen werden müssen, also das ursprüngliche Vorzeichen ungeändert bleiben. Bezeichnen wir daher die Einfallswinkel auf alle Gläser nach und nach durch $\psi, \psi_{,}, \psi_{,,}, \ldots\ldots$ die Winkel, welche der zum zweitenmal gebrochene Strahl mit der Axe macht, durch $\psi'', \psi_{,}'', \psi_{,,}'', \ldots\ldots$

die Winkel DEC, $FE'f$, $F'E''f'$ .... durch α, α', α'' .... so erhält man folgende Gleichungen

$$\psi' = \alpha + \frac{h}{k}\cdot(\alpha - \psi)$$

$$\psi_{,}'' = \alpha' + \frac{h'}{k'}\cdot(\alpha' - \psi_{,})$$

$$\psi_{,,}'' = \alpha'' + \frac{h''}{k''}\cdot(\alpha'' - \psi_{,,}) \text{ u. s. w.}$$

$$\psi_{,} = \psi'', \quad \psi_{,,} = \psi_{,}'', \quad \psi_{,,,} = \psi_{,,}''.$$

Nun ist aber für das erste Glas $\psi'' = \alpha$, also kommt für die folgenden Gläser

$$\psi_{,}'' = \alpha' + \frac{h'}{k'}\cdot(\alpha' - \alpha)$$

$$\psi_{,,}'' = \alpha'' + \frac{h''}{k''}\cdot(\alpha'' - \psi_{,}'')$$

$$\psi_{,,,}'' = \alpha''' + \frac{h'''}{k'''}\cdot(\alpha''' - \psi_{,,}''),$$

oder auch

$$\psi_{,}'' = \alpha' + \frac{h'}{k'}\cdot(\alpha' - \alpha)$$

$$\psi_{,,}'' = \alpha'' + \frac{h''}{k''}\cdot(\alpha'' - \alpha') - \frac{h'h''}{k'k''}\cdot(\alpha' - \alpha)$$

$$\psi_{,,,}'' = \alpha''' + \frac{h'''}{k'''}\cdot(\alpha''' - \alpha'') - \frac{h'''h''}{k'''k''}\cdot(\alpha'' - \alpha') + \frac{h'''h''h'}{k'''k''k'}\cdot(\alpha' - \alpha)$$

Bezeichnet man ferner, wie §. 405., durch λ, λ', λ''.... die wirkliche Gröfse des Objects und der Bilder, so hat man

$$\alpha' = \frac{\lambda'}{h'}, \quad \alpha'' = \frac{\lambda''}{h''}, \ldots\ldots$$

und man kann hierin die Werthe von λ', λ''...., aus §. 405., substituiren

$$\alpha' = -\frac{k}{h'} \cdot \alpha$$

$$\alpha'' = +\frac{kk'}{h'h''} \cdot \alpha$$

$$\alpha''' = -\frac{kk'k''}{h'h''h'''} \cdot \alpha$$

s. w. fort, wodurch auch die Winkel α', α'', α''' bemmt sind.

§. 408.

Bezeichnet man die Entfernungen, in welchen dieser rahl die Axe hinter jedem Glase schneidet, durch u', u'' ....., so hat man

$$u = \frac{kh.(\alpha - \psi)}{k\alpha + h.(\alpha - \psi)}$$

$$u' = \frac{k'h'.(\alpha' - \psi_{,})}{k'\alpha' + h'.(\alpha' - \psi_{,})}$$

$$u'' = \frac{k''h''.(\alpha'' - \psi_{,,})}{k''\alpha'' + h''.(\alpha'' - \psi_{,,})}$$

$$u''' = \frac{k'''h'''.(\alpha''' - \psi_{,,,})}{k'''\alpha''' + h'''.(\alpha''' - \psi_{,,,})}$$

s. w. fort, und vermittelst der Einführung der Werthe n ψ'', $\psi_{,}''$,.... der vorigen Paragraphen, lassen sich ese Gröfsen auch so schreiben:

$$u = \frac{h.(\alpha - \psi)}{\psi''} = o$$

$$u' = \frac{h'.(\alpha' - \psi_{,})}{\psi''} = \frac{h'.(\alpha' - \psi'')}{\psi_{,}''}$$

$$u'' = \frac{h''.(\alpha'' - \psi_{,,})}{\psi_{,,}''} = \frac{h''.(\alpha'' - \psi_{,}'')}{\psi_{,,}''}.$$

Um nun die Abstände von der Axe zu finden, in welchen der gebrochene, vom obern Ende D des Objects erkommende Hauptstrahl die Gläser nach und nach chneidet, setze man diese Abstände τ', τ'', τ''' ..... Man sieht dann sogleich, dafs man nur den Abstand es Glases $E'E''$ um $E'K$ oder den zum vorherge-

henden Glase gehörigen Werth von u zu vermindern braucht, und dann den Rest mit dem Winkel multiplicirt, unter welchem der Strahl die Axe schneidet, um den gesuchten Abstand zu erhalten. Will man aufserdem die Abstände über der Axe, wie $E''H'$, positiv, die Abstände unter der Axe, wie $E'H$, negativ nehmen, so mufs man dem besagten Product noch das negative Vorzeichen geben. Es wird daher

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= (u - l).\psi'' \\ \varepsilon'' &= (u' - l').\psi_{,}'' \\ \varepsilon''' &= (u'' - l').\psi_{,,}'' \text{ u. s. w.} \end{aligned}$$

§. 409.

Nehmen wir z. B. vier Gläser, deren Brennweiten $f = 2$ Fufs, $f' = \frac{1}{2}$, $f'' = 1$, $f''' = \frac{1}{3}$, und deren Entfernungen von einander $l = 12$ Fufs, $l' = 6$ Fufs, $l'' = 3$ sind, und nehmen den Gegenstand als unendlich entfernt an, so hat man nach §. 403.

$$\begin{aligned} k &= 2 & h' &= 10 \\ k' &= 1{,}765 & h'' &= 4{,}235 \\ k'' &= 1{,}309 & h''' &= 1{,}691. \\ k''' &= 0{,}710. \end{aligned}$$

Ist nun der Halbmesser der Oeffnung des ersten Glases $t = \frac{1}{12}$ Fufs, so erhält man die Oeffnungen der übrigen Gläser nach §. 404.

$$\begin{aligned} t' &= 0{,}5 \\ t'' &= 1{,}2 \\ t''' &= 1{,}550. \end{aligned}$$

Beträgt der scheinbare Halbmesser des Gegenstandes $\alpha = 15$ Minuten $= \frac{1}{229}$, so werden die Halbmesser der Bilder nach §. 405.

$$\begin{aligned} -\lambda' &= 0{,}0087 \\ +\lambda'' &= 0{,}0015 \\ -\lambda''' &= 0{,}0005 \\ +\lambda^{IV} &= 0{,}0002, \end{aligned}$$

wo die negativen Vorzeichen bedeuten, dafs das Bild im Vergleich mit dem Gegenstande, eine entgegengesetzte Lage hat.

Die Winkel α, α', α''...., unter welchen der Gegenstand und die Bilder, aus dem Mittelpunkt der auf einander folgenden Gläser gesehen, erscheinen, werden (§. 407.)

$$\alpha = + \frac{1}{229} = + 15'$$
$$\alpha' = - \frac{1}{1146} = - 3'$$
$$\alpha'' = + \frac{1}{2750} = + 1' 15''$$
$$\alpha''' = - \frac{1}{3772} = - 0' 58''.$$

Daraus erhält man die Winkel, unter welchen der vom Punkte des Objects herkommende Hauptstrahl nach und nach die Axe schneidet (§. 407.),

$$\psi'' = + 15' 0''$$
$$\psi_{,}'' = - 105' 0''$$
$$\psi_{,,}'' = + 346'$$
$$\psi_{,,,}'' = - 827' 24''.$$

Daher erhält man

$$u = 0, \quad u' = 1{,}714$$
$$u'' = 1{,}300, \quad u''' = 0{,}709,$$

hieraus endlich die Werthe von τ, τ', τ'' ....

$$\tau = 0, \quad \tau' = - 0{,}0524$$
$$\tau'' = + 0{,}1309, \quad \tau''' = - 0{,}1711.$$

§. 410.

Das Auge, in gesundem Zustande, sieht die Gegenstände nur dann deutlich, wenn die Strahlenkegel, welche von den einzelnen Punkten der Gegenstände herkommen, aus divergenten Strahlen bestehen; sind daher die Strahlenkegel vermittelst eines convexen Glases zur Convergenz gebracht, und bringt man das Auge in die Strahlenkegel, ehe sie das Bild hervorgebracht haben, so wird man, vermittelst dieser convergenten Strahlen, kein höchst undeutliches Bild des Punktes, von welchem die Strahlen herkommen, erhalten. Allein sobald das Auge vom Glase weiter entfernt ist, als das Bild hinter demselben, so sind die von diesem ausgehenden Strahlen divergent, und das Auge ist im Stande, das Glas auf eben die Art zu betrachten, als einen wirk-

lichen Gegenstand. Hieraus folgt jedenfalls, Abstand des Auges vom Glase gröfser seyn n der Abstand des Bildes, d. h. wenn wir den des Auges von der Glaslinse durch g bezeich mufs $g - k$ eine positive Gröfse seyn. Aus d chung

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

hat man aber $k = \frac{hf}{h-f}$, folglich wird $g -$ positiv, wo h den Abstand des Objects vom G deutet, und f die Brennweite angiebt.

§. 411.

Die Entfernung des Gegenstandes vom A dann $h + g$, und wenn wir den Durchmesser d senkrecht auf die Gesichtsaxe durch λ bezeich ist der Gesichtswinkel, unter welchem der Geg dem Auge erscheint, vorausgesetzt, dafs dieser klein genug ist, um statt des Sinus den Boge zu können,

$$= \frac{\lambda}{h+g}.$$

Der Durchmesser des Bildes wird, nach §. 405., $\frac{k\lambda}{g-k}$

und da das Auge von selbigem die Entfernung hat, so ist der Gesichtswinkel, unter welchem d erscheint,

$$= \frac{k\lambda}{h.(g-k)}.$$

Die Zahl nun, welche anzeigt, wie oft der letzt sichtswinkel den ersten enthält, giebt die Vergrö an. Bezeichnen wir dieselbe durch m, so kom

$$m = \frac{k.(h+g)}{h.(g-k)}.$$

§. 412.

Für sehr entfernte Gegenstände ist $\frac{h+g}{h} = 1$, $= f$, also $m = \frac{f}{g-f}$. Bezeichnet man also die Entfernung, auf welche das Auge nahe Gegenstände deutlich sieht, durch ω, so hat man $m = \frac{f}{\omega}$, wo im Allgemeinen für ein gesundes Auge $\omega =$ acht Zoll gesetzt werden kann. Wird also, vermittelst eines Linsenglases, von der Brennweite f ein Bild eines sehr entfernten Gegenstandes hervorgebracht, und bringt man das Auge in die Entfernung von acht Zoll hinter das Bild, so wird durch dieses Glas der Gegenstand so oft vergröfsert erscheinen, als acht Zoll in der Brennweite des Glases enthalten sind. Man sieht also hieraus, dafs schon durch ein einzelnes Glas von grofser Brennweite ziemliche Vergröfserungen hervorgebracht werden könnten, wenn nicht durch die später zu erwähnende Abweichung der Strahlen wegen der Kugelgestalt und der Zerlegung des Lichts in Farben eine zu grofse Undeutlichkeit hervorgebracht würde.

§. 413.

Befindet sich das Auge sehr nahe am Glase, wie dies z. B. bei Brillengläsern der Fall ist, so kann man $= o$ setzen, und da der Ausdruck

$$g - \frac{hf}{h-f}$$

eine positive Gröfse seyn mufs, so wird $-\frac{hf}{h-f}$ an sich schon positiv werden müssen. Da nun h als die Entfernung des Objects vom Glase immer als positiv betrachtet werden mufs, so folgt, dafs, wenn f einen positiven Werth hat, d. h. das Glas zu den erhabenen Gläsern gehört, h kleiner als f seyn mufs; der Gegenstand mufs also dann dem Glase näher liegen, als die

Brennweite der Glaslinse beträgt. Ist f negativ, d. h. bildet die Linse ein concaves Glas, so ist der Ausdruck $-\frac{hf}{h-f}$ wirklich positiv. Das Auge wird also durch concave Gläser die Gegenstände immer deutlich sehen, wenn nur die Strahlen nicht eine zu grofse Divergenz erhalten. Setzt man ferner in dem Ausdruck

$$m = \frac{k.(h+g)}{h.(g-k)},$$

den Abstand des Auges vom Glase $g = o$, so kommt $m = -1$, d. h. es findet gar keine Vergröfserung Statt. Das negative Vorzeichen bezieht sich blofs auf die Lage des Bildes, die dem des Normalfalles, wo das Bild gegen den Gegenstand eine verkehrte Lage hatte, entgegengesetzt ist.

§. 414.

Diese Angabe, dafs, wenn man das Auge sehr nahe hinter das Glas bringt, keine Vergröfserung Statt finde, scheint der Erfahrung zu widerstreiten, indem man sich doch der convexen Gläser als Loupen bedient, um kleine Gegenstände genauer zu beobachten. Allein der Satz, dafs der Gesichtswinkel nicht geändert werde, wir mögen das Object durch ein Glas oder mit blofsen Augen betrachten, bleibt mathematisch genau richtig, und die hierbei Statt findende scheinbare Vergröfserung liegt blofs in dem deutlichern Sehen. Denn halten wir einen Gegenstand vor das Auge, so wird der Gesichtswinkel, unter welchem wir denselben sehen, durch den Bruch $\frac{\lambda}{\omega}$ ausgedrückt, wo λ den Durchmesser des Objects, den wir hier als sehr klein betrachten, und ω seine Entfernung vom Auge bedeutet. Es giebt aber im Allgemeinen für jedes Auge nur einen bestimmten Werth von ω, bei welchem es den Gegenstand am deutlichsten sieht, indem bei gröfserer Nähe die Strahlen zu sehr, bei gröfserer Entfernung zu wenig divergiren, als dafs

sie sich gehörig im Auge auf der Netzhaut in einen Punkt concentrirten. Da nun schon früher erwähnt worden ist, dafs, wenn der Gesichtswinkel auf eine gewisse Grenze abgenommen hat, der Gegenstand für das Auge verschwindet, so kann der Fall eintreten, dafs bei der bestimmten Entfernung, unter welcher das Auge einen gröfsern Gegenstand deutlich sieht, der Gesichtswinkel $\frac{\lambda}{\omega}$ die besagte Grenze erreicht, also dieser kleine Gegenstand für das Auge nicht mehr erkennbar bleibt. Wenn man nun schon den Gesichtswinkel dadurch vergröfserte, dafs man den Gegenstand näher ans Auge rückte, so würde dadurch nichts gewonnen werden, da die stärkere Divergenz die Deutlichkeit des Sehens aufhebt, also der Gegenstand doch unkenntlich bleiben würde. Bringt man hingegen ein convexes Glas zwischen das Object und das Auge, so läfst sich dieses Glas immer so wählen, dafs die Divergenz der direct aus dem Gegenstand ausfahrenden Strahlen durch dasselbe so geschwächt wird, dafs dieselben von einem Gegenstand herzukommen scheinen, der die erforderliche Entfernung für das deutliche Sehen besitzt, während doch der Gesichtswinkel, unter welchem dieses Bild erscheint, derselbe ist, als ob man das Object ohne dazwischen gehaltenes Glas mit bloſsem Auge betrachtete.

§. 415.

Nimmt man nun an, die Brennweite der Glaslinse sey $= f$, die Entfernung, auf welche das Auge deutlich sieht, $= \omega'$, so mufs das Object in einer solchen Entfernung vom Glase gehalten werden, dafs das Bild in die Entfernung ω' vor das Glas fällt; es wird daher

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{f} + \frac{1}{\omega'}$$

$$h = \frac{\omega' f}{\omega' + f},$$

und da wir diese Gröfse, mit Vernachlässigung der

Dicke des Glases, auch für die Entfernung des Objects vom Auge annehmen können, so erscheint der Gegenstand, dessen Durchmesser λ ist, durch das Glas deutlich gesehen, unter einem Gesichtswinkel

$$= \frac{\lambda . (\omega' + f)}{\omega' f},$$

während mit bloſsen Augen derselbe in der Entfernung des deutlichen Sehens unter dem Gesichtswinkel $= \frac{\lambda}{\omega'}$ erscheinen würde. Man müſste also die Statt findende scheinbare Vergröſserung durch den Quotienten ausdrücken, welcher entsteht, indem der erste Gesichtswinkel $\frac{\lambda . (\omega' + f)}{\omega' f}$ durch den zweiten $\frac{\lambda}{\omega'}$ dividirt wird, d. h. durch

$$\frac{\omega' + f}{f},$$

und man sieht hieraus, daſs die scheinbare Vergröſserung desto stärker wird, je kleiner man die Brennweite f des Glases wählt.

§. 416.

Die Weite des deutlichen Sehens ist nicht bei allen Augen gleich groſs; weitsichtige Personen müssen die Gegenstände in eine bedeutendere Entfernung vom Auge bringen, um sie deutlich zu sehen; kurzsichtige Personen hingegen müssen dieselben dem Auge sehr nähern, welches beides in vielen Fällen sehr unbequem seyn kann. Diese Unbequemlichkeit läſst sich aber durch den Gebrauch einfacher Glaslinsen, der sogenannten Brillengläser, abhelfen. Gesetzt z. B., ein Auge sieht auf die Entfernung ω deutlich; es soll aber auf die Entfernung Ω deutlich sehen, so läſst sich die Brennweite des anzuwendenden Glases leicht durch die Gleichung

$$\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\Omega} = \frac{1}{f}$$

finden, indem man in der allgemeinen Gleichung

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{t} = \frac{1}{f}$$

$= \omega$, $k = -\Omega$ setzt. Solange nun $\omega < \Omega$, wird f itiv, d. h. für weitsichtige Leute mufs man convexe ser anwenden; ist aber $\omega > \Omega$, so wird f negativ, glich wird der Kurzsichtigkeit durch concave Gläser geholfen.

§. 417.

Wenn das Auge sich hinter einer Verbindung von hrern Gläsern befindet, und zwar nahe hinter dem zten Glase, so mufs, wenn das Auge durch diese rbindung etwas sehen will, das letzte Glas in eine che Stellung gegen das vorhergehende Bild gebracht rden, dafs die zuletzt gebrochenen Strahlen die gerige Divergenz bei ihrem Eintritt ins Auge erhalten. nnt man nämlich die Brennweite des letzten Glases die Entfernung des Bildes vom Glase h^0, die Sehite des Auges ω, so wird

$$\frac{1}{h^0} = \frac{1}{f^0} + \frac{1}{\omega}$$

$$h^0 = \frac{\omega f^0}{\omega + f^0},$$

d der Gesichtswinkel, unter welchem das letzte Bild cheint, wenn λ^0 die Gröfse des letztern bedeutet,

$$= \frac{\lambda^0}{h^0} = \frac{\lambda^0 . (\omega + f^0)}{\omega f^0}.$$

e Zusammensetzungen der Gläser haben den Zweck, tweder entfernte Gegenstände vergröfsert zu zeigen, er sehr nahe Gegenstände, die dem Auge wegen rer Kleinheit unkenntlich sind, deutlich zu machen. n ersten Fall kann die Entfernung des Auges vom sten Glase gegen die Entfernung des Objects vernachssigt werden. Gesetzt nun, man habe n Gläser, so t, nach §. 405., die Gröfse des Bildes, welches hinter em $(n-1)$ten Glase entsteht,

$$\lambda^{(n-1)} = \frac{k . k' . k'' \ldots\ldots k^{(n-2)}}{h' . h'' \ldots\ldots h^{(n-2)}} \cdot \alpha,$$

folglich der Gesichtswinkel, unter welchem dieses Bild durch das $n$te Glas gesehen erscheint, wenn dasselbe in die vorhin bestimmte gehörige Entfernung vom Bilde gebracht ist,

$$= \frac{k.k'.k''.....k^{(n-2)}}{h'.h''.....h^{(n-2)}} \cdot \frac{\omega + f^0}{\omega f^0} \cdot \alpha,$$

und da α der Winkel ist, unter welchem das Object dem bloßen Auge erscheint, so wird die Vergrößerung, in dem Fall eines sehr entfernten Gegenstandes, durch

$$\frac{k.k'.k''.....k^{(n-2)}}{h'.h''.....h^{(n-2)}} \cdot \frac{\omega + f^0}{\omega f^0}$$

ausgedrückt werden, und diese Formel würde bei Fernröhren und Telescopen anzuwenden seyn. Bemerkt man ferner, daſs, nach §. 405., $\lambda = h\alpha$ ist, so läſst sich der Winkel α aus vorigem Ausdruck von $\lambda^{(n-1)}$ eliminiren, und es bleibt

$$\lambda^{(n-1)} = \frac{k.k'.k''.....k^{(n-2)}}{h.h'.h''.....h^{(n-2)}} \cdot \lambda,$$

also der Gesichtswinkel, unter welchem dies Bild, durch das letzte Glas gesehen, erscheint,

$$= \frac{k.k'.k''.....k^{(n-2)}}{h.h'.h''.....h^{(n-2)}} \cdot \frac{\omega + f^0}{\omega f^0} \cdot \lambda.$$

In der Entfernung ω des deutlichen Sehens erscheint dieser Gegenstand dem bloſsen Auge unter dem Gesichtswinkel $\frac{\lambda}{\omega}$, also wird die Vergrößerung bei dieser Zusammensetzung von Gläsern

$$= \frac{k.k'.k''.....k^{(n-2)}}{h.h'.h''.....h^{(n-2)}} \cdot \frac{\omega + f^0}{f^0},$$

welche Formel bei der Angabe der Vergrößerung durch Microscope angewendet werden muſs.

§. 418.

Wir wollen z. B. annehmen, es sey eine Verbindung von drei Gläsern, deren Brennweiten $f = 4$ Fuſs,

= 2 Fuſs, $f^0 = \frac{1}{12}$ seyen. Die Entfernung des
en Glases vom zweiten sey 2 Fuſs, und der Gegen-
d unendlich entfernt, also $h = \infty$; dann wird

$$k = 4, \qquad h' = -2$$
$$k' = 1.$$

mt man ferner $\omega = 8$ Zoll $= \frac{2}{3}$ Fuſs, so ist

$$\frac{\omega + f^0}{\omega f^0} = \frac{27}{2},$$

die Vergröſserung $= -\frac{4.1}{2} \cdot \frac{27}{2} = -27$, so
das Object 27 mal vergröſsert, und in umgekehrter
lung erscheint. Die Entfernung des letzten Glases
letzten Bilde ist

$$= \frac{\omega f^0}{\omega + f^0} = \frac{2}{27},$$

die Entfernung der beiden letzten Gläser von ein-
er $= 1\frac{2}{27}$ Fuſs.

§. 419.

Es sey C ein in der gemeinschaftlichen Axe CD''
Gläser AB, $A'B'$, $A''B''$ (Fig. 56.) liegender
htender Punkt, den wir als eine unendlich kleine
isfläche, die senkrecht auf der Axe steht, betrachten
nen. Von selbigem gehe unter dem Winkel $DCE = \varphi$
Strahl aus, so ist $CDD'D''$ dessen Weg bis ans
e Glas, und alle Strahlen, die Anfangs in dem
hlenkegel ECD enthalten waren, werden, wenn wir
bei der Brechung durch die Gläser verloren ge-
gene Licht unberücksichtigt lassen, zuletzt im Strah-
egel $D''C'''E''$ vorhanden seyn. Bezeichnet man
in C befindliche Kreisfläche durch a, die Inten-
des Lichts durch i, die Entfernung CE durch h,
Gröfse ED durch t (§. 404.), so wird die Licht-
e, welche auf das erste Glas innerhalb einer mit
Halbmesser $ED = t$ beschriebenen Kreisfläche
indem wir von der Krümmung des Glases ab-
iren,

$$= \frac{ia\pi tt}{hh}.$$

Diese Lichtmasse geht durch das in C'' entstehende Bild, und befindet sich das Auge in O, so dafs OF der Halbmesser der Pupille ist, so gelangt auch diese ganze Lichtmasse ins Auge.

Wenn nun die Vergröfserung dieser Zusammensetzung von Gläsern m ist, so wird die Fläche des Bildes in $C''' = amm$, da m blofs die lineare Vergröfserung bedeutet; und setzt man $OC''' = \omega$, so läfst sich die Fläche des Bildes, welches auf der Netzhaut entsteht, durch

$$\frac{bb}{\omega\omega} \cdot amm$$

ausdrücken, wo b eine Gröfse bedeutet, die von den Dimensionen des Auges abhängt, für jedes Auge insbesondere aber einen constanten Werth besitzt. Dividiren wir mit dieser Fläche $= \frac{bb}{\omega\omega} \cdot amm$ in die Lichtmenge $= \frac{ia\pi tt}{hh}$, welche das Auge erhält, so kommt die Dichtigkeit des Lichts in dem Bilde auf der Netzhaut, d. h. die scheinbare Helligkeit des Bildes C''',

$$= \frac{i\pi tt}{hhmm} \cdot \frac{\omega\omega}{bb}.$$

§. 420.

Aus §. 405. ergiebt sich aber das Verhältnifs des Halbmessers des Bildes C''' nach einer Brechung durch n Gläser zum Halbmesser des Objects, oder die sogenannte Vergröfserungszahl

$$m = \frac{k \,.\, k' \,.\, k'' \,.\,.\,.\,.\,. \, k^{(n-1)}}{h \,.\, h' \,.\, h'' \,.\,.\,.\,.\,. \, h^{(n-1)}},$$

und den Werth von $D''E'' = t^{(n-1)}$ erhält man aus §. 404., indem man das Vorzeichen unberücksichtigt läfst,

$$t^{(n-1)} = \frac{h' . h'' . h''' \ldots\ldots h^{(n-1)}}{k . k' . k'' \ldots\ldots k^{(n-2)}} \cdot t$$

$$\frac{t}{h} = \frac{k . k' . k'' \ldots\ldots k^{(n-1)}}{h . h' . h'' \ldots\ldots h^{(n-1)}} \cdot \frac{t^{(n-1)}}{k^{(n-1)}}$$

$$= m \cdot \frac{t^{(n-1)}}{k^{(n-1)}},$$

und hieraus

$$\frac{t}{hm} = \frac{t^{(n-1)}}{k^{(n-1)}}.$$

Wird dieser Werth von $\frac{t}{hm}$ in dem Ausdruck der scheinbaren Helligkeit

$$= \frac{i\pi tt . \omega\omega}{bb . hh . mm}$$

substituirt, so kommt dieselbe

$$= \frac{i\pi\omega\omega}{bb} \cdot \left(\frac{t^{(n-1)}}{k^{(n-1)}}\right)^2.$$

Es ist nun aber

$$\frac{t^{(n-1)}}{k^{(n-1)}} = \frac{D''E''}{C'''E'''} = \frac{OF}{OC'''} = \frac{OF}{\omega},$$

folglich läfst sich die scheinbare Helligkeit des Bildes C''' auch so ausdrücken:

$$\frac{i\pi}{bb} \cdot OF^2,$$

wo OF den Halbmesser der Pupille des Auges darstellt. Das Product $\pi . OF^2$ selbst giebt also die Fläche der Pupille.

§. 421.

Wenn nun das Auge die Kreisfläche a in der Entfernung $= h$ ohne Gläser betrachtet, so ist die ins Auge gelangende Lichtmenge

$$= \frac{ia}{hh} . \pi . OF^2,$$

[illegible] ung umgekehrt,
[illegible] direct proportional
Diese Lichtmasse ge[illegible] des Bildes, welches
und befindet sich [illegible] $= \frac{abb}{hh}$, folglich, wenn
Halbmesser der Pup[illegible]
Lichtmasse ins Aug[illegible] menge, die auf die-

Wenn nun di[illegible] Dichtigkeit des Lichts
setzung von Gläs[illegible] scheinbare Helligkeit des
Bildes in $C''' =$ [illegible]
rung bedeutet; [illegible]
die Fläche des [illegible] mit dem Ausdruck, wel-
steht, durch [illegible] Helligkeit eines durch eine
[illegible] gesehenen Gegenstandes
[illegible] durch keine Zusammen-
ausdrücken, [illegible] scheinbare Helligkeit eines
Dimensionen [illegible] werden, im Gegentheil wird sie
besondere [illegible] als wenn der Gegenstand
diren wir [illegible] wird, weil durch die Gläser
[illegible] verloren geht, und andern-
menge = [illegible] des Strahlenkegels oft kleiner
[illegible] der Pupille.

die Dich[illegible]

§. [illegible]

haut, d[illegible] Lichtstrahl ist, welcher, durch
[illegible] Glases gehend, den Rand des zwei-
[illegible] wird der Winkel $E'EH$, den selbi-
[illegible] Gläser bildet, das halbe Gesichts-
[illegible] wird nun vorausgesetzt, daſs die
[illegible] Oeffnung besitzen, die hinreichend
Halb[illegible] Lichtstrahl ebenfalls durchzulassen.
n G[illegible] der Gläser bei gegebenem
nan[illegible] durch die Größen τ', τ'', τ'''....
[illegible] Nehmen wir z. B. die Zusammen-
[illegible] Gläser §. 418., wo

[illegible] $f' = 2$, $f'' = \frac{1}{12}$
[illegible] $h' = 1$, $h'' = \frac{2}{3}$
[illegible] $h' = -2$, $h'' = \frac{2}{27}$
[illegible] $h' = 1\frac{3}{8}$,

und setzen das halbe Gesichtsfeld $= 30'$, so ist daselbst $u = 30'$, und es ergiebt sich

$$a' = +60', \quad a'' = -810'$$
$$\psi' = 30', \quad \psi_1'' = 0, \quad \psi_2'' = -720'$$
$$u = 0, \quad u' = \infty, \quad u'' = +\tfrac{1}{12}$$
$$\tau' = -0{,}0175, \quad \tau'' = -0{,}0175,$$

also müssen die Durchmesser der Oeffnungen der beiden letzten Gläser ungefähr einen halben Zoll betragen.

§. 423.

Um nun aber auch die ganze Gröfse des Gesichtsfeldes benutzen zu können, mufs man das Auge hinter dem letzten Glase an einen Ort stellen, wo es im Stande ist, die Strahlenkegel, die vom äufsersten Punkt herkommen, aufzufangen. Ist nun $A'B'$ (Fig. 55 b.) das letzte Glas, so sieht man leicht, dafs das Auge in den Durchschnittspunkt K gestellt werden mufs, weil sich daselbst die Hauptstrahlen der von dem mittelsten Punkt C und dem äufsersten Punkt D ausfliefsenden Strahlenkegel treffen. Man mufs also dem Abstand des Auges vom letzten Glase einen solchen Werth beilegen, welcher dem diesem Glase entsprechenden Werth von u gleich kommt. Dies würde in vorigem Beispiel $u'' = \frac{1}{12}$ Fufs $= 1$ Zoll betragen. Erhielte man den hierher gehörigen Werth von u negativ, so wäre dies ein Zeichen, dafs der Durchschnittspunkt vor das Glas fiele, wohin man das Auge nicht bringen kann; in diesem Fall mufs man das Auge dem letzten Glase so sehr als möglich nähern, um das möglichst gröfste Gesichtsfeld zu erhalten.

§. 424.

Es sey O der Punkt (Fig. 56.), in welchen das Auge gestellt werden mufs, um das Gesichtsfeld ganz zu übersehen, nachdem die Strahlen durch n Gläser gezogen sind, so ist $E''O = u^{(n-1)}$, und da in C''' das letzte Bild liegt, so wird $E''C''' = k^{(n-1)}$

$$OC''' = u^{(n-1)} - k^{(n-1)}.$$

In den beiden Dreiecken $D''E''C'''$, $OC'''F$ erhält man die Proportion

$$C'''O : OF = E''C''' : E''D'',$$

also, wenn man OF für den Halbmesser der Pupille annimmt, und denselben durch μ bezeichnet,

$$E''D'' = \frac{\mu . k^{(n-1)}}{u^{(n-1)} - k^{(n-1)}}.$$

Diesen Werth muſs die halbe Oeffnung des letzten Glases haben, wenn der von einem Punkte in der Axe der Gläser herkommende Strahlenkegel die Pupille grade ausfüllen soll. Es ist aber $E''D''$ nichts anders, als die in §. 404. durch $t^{(n-1)}$ bezeichnete Gröſse, und man hat auch daselbst, wenn t die halbe Oeffnung des ersten Glases bedeutet, die Gleichung

$$t^{(n-1)} = \pm \frac{h' . h'' . h''' \ldots\ldots h^{(n-1)}}{k . k' . k'' \ldots\ldots k^{(n-2)}} . t.$$

Setzt man also $E''D'' = t^{(n-1)}$, und sucht aus der dadurch entstehenden Gleichung die Gröſse t, so kommt

$$t = \frac{k' . k'' . k''' \ldots\ldots k^{(n-1)}}{h' . h'' . h''' \ldots\ldots h^{(n-1)}} . \frac{\mu k}{u^{(n-1)} - k^{(n-1)}},$$

und diesen Werth t muſs die halbe Oeffnung des ersten Glases haben, wenn der durchgehende Strahlenkegel groſs genug seyn soll, die Pupille auszufüllen. Im vorigen Beispiel hat man

$$k = 4, \quad k' = 1, \quad k'' = -\tfrac{3}{7}$$
$$h' = -2, \quad h'' = \tfrac{2}{5}, \quad u'' = \tfrac{1}{12},$$

also hieraus $t = 24\mu$, d. h. die Oeffnung des ersten Glases muſs 24 mal so groſs seyn, als die der Pupille.

§. 424.

Die allgemeinen Formeln, welche wir von §. 403. an über den Weg eines Lichtstrahls durch eine beliebige Anzahl von Gläsern entwickelt haben, sind aber blos als Annäherungen zu betrachten, in so fern die aus gegebenen Bedingungen vermittelst der angegebenen Re-

abgeleiteten Zusammensetzungen von Gläsern,
praktisch ausgeführt und dann zu den Beob-
en benutzt werden sollen. Es ist nämlich erstens
cksichtigen, dafs die immer gemachte Annahme,
auf das Glas fallenden Strahlen sich in einem
vereinigen, nicht genau ist, indem die von der
fernter auffallenden Strahlen, nach der erlitte-
eimaligen Brechung, die Axe des Glases in
r Nähe vom Glase schneiden, als diejenigen,
ganz nahe bei der Axe auffallen. Aus diesem
wird das Bild eines Punktes kein Punkt werden,
als eine kreisförmige Fläche erscheinen, und
ker Vergrösserung mufs dann eine bedeutende
chkeit im Bilde entstehen. Zweitens hat die
ng gelehrt, dafs das Licht bei seinem Durch-
durch brechende Mittel nicht einfach bleibe, son-
r einfache auffallende Strahl wird in der bre-
Materie in farbige Strahlen zerlegt, die ver-
e Werthe des Brechungsverhältnisses geben, und
Umstand der Zerlegung des Lichts wirkt noch
item stärker auf die Undeutlichkeit des Bildes
der Umstand, dafs die Lage des Sammlungs-
gegen das Glas von der Lage des einfallenden
abhängt.

Von der Zerstreuung des Lichts in Farben.

§. 425.

Wir haben früher gezeigt, welchen Weg ein Strahl nimmt, der auf ein Prisma von beliebiger brechender Materie fällt, und auch zugleich angegeben, dafs die von einem Punkt herkommenden Strahlen, unter der Voraussetzung, dafs ihr Licht gleichartig sey, d. h., dafs für alle Strahlen ein und dasselbe Brechungsverhältnifs gilt, wenn die äufsersten Strahlen des einfallenden Strahlenkegels einen sehr kleinen Winkel bilden, so gebrochen werden, dafs die Verlängerungen dieser gebrochenen Strahlen sich in einem Punkt schneiden. Bezeichnen wir, nach §. 355., den Winkel des einfallenden Strahls mit dem Einfallsloth durch ε, den des zum zweitenmal gebrochenen Strahls mit dem am Austrittspunkt errichteten Einfallsloth durch ε', den brechenden Winkel des Prisma durch p, das Brechungsverhältnifs durch n, und nehmen als Normalfall an, dafs der einfallende Strahl, wie früher, auf der der Kante des Prisma entgegengesetzten Seite des Einfallslothes liegt, nach der ersten Brechung aber die zweite Fläche des Prisma so trifft, dafs er mit der Kante auf derselben Seite des Einfallslothes, nach der zweiten Brechung also auf der der Kante entgegengesetzten Seite liegt, welcher Fall der gewöhnlichere ist, so haben wir

$$\sin \varepsilon' = \sin p . \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2} - \sin \varepsilon . \cos p.$$

Man sieht aus dieser Gleichung, dafs, wenn n etwas zunimmt, bei gleichbleibendem Werth von ε und p, auch ε' zunehmen wird. Bezeichnet man die Zunahme von n durch dn, die von ε' durch $d\varepsilon'$, so wird

$$d\varepsilon' = \frac{\sin p'}{\cos \varepsilon'} \cdot \frac{n dn}{\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}}.$$

§. 426.

nun in dem einfallenden Lichtstrahl Licht-
vorhanden sind, auf welche das Prisma mit
ner brechender Kraft einwirkt, so wird der
leuchtenden physischen Punkt herkommende
, nach seiner zweimaligen Brechung, fächer-
ebreitet erscheinen. Hat man z. B. die Sonne
nden Gegenstand genommen, und fängt man
eitenmal gebrochenen Strahlen mit einer Ebene
enkrecht auf den letzten Strahlen steht, so
Bild nicht kreisförmig, sondern in der Rich-
Brechungsebene sehr in die Länge gezogen
hierüber angestellte Versuch zeigt, dafs die
ne Brechbarkeit des Lichts durch die ver-
Farben angedeutet wird.

§. 427.

let sich nämlich das Prisma in einer solchen
s der brechende Winkel nach unten gekehrt
gt sich von unten nach oben folgende Reihe
n: Roth, Orange, Gelb, Grün, Blau, Dun-
iolet. Da also in diesem Fall für Roth der
am kleinsten, für Violet am gröfsten ist, so
für Roth der Werth von n am kleinsten,
am gröfsten, und man sagt daher, die rothen
cyen die am wenigsten brechbaren, die violet-
m stärksten brechbaren Strahlen. Bis jetzt
noch keine brechende Materie gefunden, in
icht die angegebene Ordnung der Farben
tatt gefunden hätte, wenn auch die Werthe
ungsverhältnisse für die einzelnen Strahlen
einander verschieden waren.

§. 428.

haben in den §§. 326 bis 337. gezeigt, auf
t die Brechung sich sowohl nach dem Ema-
em als nach dem Undulationssystem erklären
l wir wollen hier nur noch einige Bemerkun-

gen rücksichtlich der Farbenzerstreuung hinzufügen. Bezeichnet man die Geschwindigkeit des Lichts im leeren Raum durch c, das Brechungsverhältnifs des Körpers durch n, seine Dichtigkeit durch ϱ, und durch N eine constante Gröfse, die von der anziehenden Kraft des Körpers gegen das Licht abhängt, so hatten wir in §. 331. die Gleichung

$$\frac{4N}{cc} = \frac{nn - 1}{\varrho}.$$

In so fern nun die Erfahrung zeigt, dafs für einen und denselben Körper n einen verschiedenen Werth hat, je nachdem Lichttheilchen von dieser oder jener Farbe von demselben gebrochen werden, so könnte man, voriger Formel gemäfs, auf die Idee kommen, den verschieden gefärbten Lichttheilchen noch verschiedene Geschwindigkeiten im leeren Raum beizulegen, weil, wenn die Geschwindigkeit c abnimmt, das Brechungsverhältnifs n nothwendig zunehmen mufs.

§. 429.

Ist z. B. für einen bestimmten Körper c die Geschwindigkeit des rothen Lichts, n das Brechungsverhältnifs der rothen Strahlen, $c - dc$ die Geschwindigkeit des violetten Lichts, $n + dn$ das Brechungsverhältnifs der violetten Strahlen, so hat man die Gleichung

$$\frac{4N}{cc} = \frac{nn - 1}{\varrho},$$

und wenn man differentiirt, indem c und n als veränderlich betrachtet werden,

$$-\frac{4Ndc}{c^3} = \frac{ndn}{\varrho}.$$

Dividirt man diese Gleichung durch die erste, so fallen die Constanten N, ϱ weg, und es bleibt ganz einfach

$$\frac{dc}{c} = -\frac{ndn}{nn - 1}.$$

Bei einem andern brechenden Körper sey nun das Brechungsverhältnifs für rothes Licht $= n'$, für violettes

Raum gleich grofs seyn müssen. Wird z. B. ein Trabant des Jupiters, indem er in den Schatten des Hauptplaneten tritt, verfinstert, so müfste, bei der allmähligen Fortpflanzung des Lichts, der Trabant bei anfangender völliger Verfinsterung mit derjenigen Farbe erscheinen, deren Lichttheilchen die geringste Geschwindigkeit besitzen, d. h. Violet. Umgekehrt würde der Trabant, sobald er wieder bei seinem Austritt aus dem Schatten von der Sonne erleuchtet wird, zuerst sich in der Farbe zeigen, welcher die schnellsten Lichttheilchen entsprechen, d. h. in Roth. Da nun aber diese Erscheinungen sich nicht zeigen, sondern der Trabant immer in demselben Licht gesehen wird, so müssen wir hieraus nothwendig schliefsen, dafs keine verschiedene Geschwindigkeit für die Lichttheilchen, welche die Empfindung der verschiedenen Farben verursachen, Statt finde.

§. 432.

Wir sind also genöthigt, anzunehmen, um die verschiedene Brechbarkeit des Lichts zu erklären, die Gröfse N in dem Ausdruck

$$\frac{4N}{cc} = \frac{nn - 1}{\varrho}$$

habe für Lichttheilchen verschiedener Art auch einen verschiedenen Werth. Sonderbar ist es freilich, dafs diese Gröfse bei allen Körpern für violettes Licht ihr Maximum, für rothes Licht ihr Minimum hat.

Man wird also nach der Emanationstheorie das weifse Licht als eine Mischung von Lichttheilchen ansehen, die den angeführten sieben Grundfarben entsprechen, diese bewegen sich mit gleicher Geschwindigkeit im leeren Raume, werden durch die Dazwischenkunft eines brechenden Körpers aber getrennt, und nehmen im brechenden Körper, den früher entwickelten Formeln zufolge, wegen der verschiedenen Brechungsverhältnisse, auch verschiedene Geschwindigkeiten an.

§. 433.

Der Vibrationstheorie zufolge bestimmen sich die arben für das Auge auf eine analoge Weise, wie die efern und höhern Töne für das Ohr. Die gröfsere der geringere Ausweichung der Aethertheilchen bei den ibrationen bestimmt nämlich die verschiedene Farbe, nd zwar geben die gröfsten Ausweichungen die Emindung des rothen, die kleinsten Ausweichungen die s violetten Lichts. Allein hierdurch erklären sich wohl e verschiedenen Farben, keinesweges aber die Farbenrstreuung. Man kann nämlich in der Lehre von der ewegung der elastischen Flüssigkeiten beweisen, dafs irzere und längere Vibrationen sich mit gleicher Gehwindigkeit fortpflanzen; dies lehrt die Erfahrung bei m Schall, wo auch die hohen und tiefen Töne mit nerlei Geschwindigkeit fortgehen, indem die Schnelligit, womit eine Welle fortgeht, blofs von der Elasticität s Mittels abhängt, in welchem die Vibrationen erregt rden. Tritt also eine Reihe gemischter Vibrationen ein brechendes Mittel, so gehen sie in dem darin thaltenen Aether, zwar mit einer von der äufsern verhiedenen, aber unter sich gleichen Geschwindigkeit rt, und da wir früher gezeigt haben, dafs das Verltnifs des Sinus des Einfallswinkels zu dem des Breungswinkels blofs von diesem Verhältnifs der Geschwingkeiten abhängt, so folgt hieraus, dafs für alle Farben nerlei Brechungsverhältnifs, und daher keine Farbenrstreuung Statt finde. Dieser Umstand ist einer der aupteinwürfe, die sich gegen die Vibrationstheorie achen lassen, und um ihn zu heben, hat man wohl genommen, dafs durch die Schwingungen des Aethers ch zugleich die Körpertheilchen in Schwingungen gethen, wodurch freilich eine Aenderung der Geschwingkeit der Fortpflanzung bei verschiedenen Amplituden r Schwingungen hervorgebracht werden könnte. Uerigens bemerken wir, dafs Cauchy uns im zehnten and der *Mémoires de l'Académie royale des Sciences*

de l'Institut de France Hoffnung macht, diesen Umstand theoretisch aufzuklären. Er drückt sich über diesen Gegenstand Seite 316. folgendermafsen aus: *Pour réduire les équations différentielles du mouvement d'un système de molécules sollicitées par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle, aux formules dont il s'agit, on est obligé de négliger plusieurs termes, par exemple ceux qui renferment les puissances supérieures des déplacemens ξ, η, ζ et de leurs dérivés, prises par rapport aux variables indépendantes x, y, z. Lorsqu'on cesse de négliger ces mêmes termes, on obtient, comme je le montrerai dans un nouveau Mémoire, déjà présenté à l'Académie, des formules à l'aide desquelles on peut non seulement assigner la cause de la dispersion des couleurs par le prisme, mais encore découvrir les lois de ce phénomène qui, malgré les nombreux et importans travaux des physiciens sur cette matière, étaient restées inconnues jusqu'à ce jour.* Man sieht hieraus, dafs alles, was man nur für die Theorie des Lichts, aus dem Gesichtspunkt des Undulationssystems betrachtet, noch wünschen kann, hier versprochen wird.

§. 434.

Es sey ABC ein Prisma von beliebiger brechender Materie (Fig. 57.), LM ein einfallender Strahl, der nach zweimaliger Brechung ein anderes Prisma DEF in P trifft, dessen vordere Fläche DF der hintern BC des ersten Prisma parallel ist, und dessen brechender Winkel nach oben gekehrt ist, während der des ersten nach unten zu liegt. Deuten wir nun durch die gebrochene Linie $LMKPQR$ den Weg der rothen Strahlen an, und bezeichnen den Einfallswinkel für das erste Prisma durch ε, den Brechungswinkel von KP durch θ', den Einfallswinkel von KP auf das zweite Prisma durch ε', den Brechungswinkel von QR durch θ'', nennen ferner n das Brechungsverhältnifs der rothen Strah-

len, und p den brechenden Winkel für das erste und n', p' eben diese Gröfsen für das zweite Prisma, so ist, wenn wir bedenken, dafs $6' = \varepsilon'$, weil BC und DF parallel sind,

$$\sin \varepsilon' = \sin p . \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2} - \cos p . \sin \varepsilon$$
$$\sin 6'' = \sin p' . \sqrt{n'n' - \sin \varepsilon'^2} - \cos p' . \sin \varepsilon'.$$

Eliminirt man $\sin \varepsilon'$ aus diesen Gleichungen, so bleibt:

$$\sin 6'' = \cos p' . \cos p . \sin \varepsilon - \cos p' . \sin p . \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2}$$
$$+ \sin p' . \sqrt{[n'n' - \sin p^2 . (\sqrt{nn - \sin \varepsilon^2} - \cos p . \sin \varepsilon)^2]}.$$

§. 435.

Bezeichnen wir die Gröfsen, welche wir für den rothen Strahl n, n', ε', $6''$ genannt haben, für irgend einen anders gefärbten Strahl durch N, N', E', B'', so findet sich für diesen

$$\sin B'' = \cos p' . \cos p . \sin \varepsilon - \cos p' . \sin p . \sqrt{NN - \sin \varepsilon^2}$$
$$+ \sin p' . \sqrt{[N'N' - \sin p^2 . (\sqrt{NN - \sin \varepsilon^2} - \cos p . \sin \varepsilon)^2]}.$$

Aus dieser Gleichung, verbunden mit der für $\sin 6''$ gefundenen, läfst sich nun immer der Winkel $B - b$, welchen die aus dem zweiten Prisma hervorkommenden rothen Strahlen mit denen irgend einer anderen Farbe machen, finden. Bedenken wir indessen, dafs N und N' wenig von n, n' verschieden sind, also auch die Differenzen $B'' - 6''$, $E' - \varepsilon'$ sehr klein seyn werden, so können wir zur Kenntnifs von $B'' - 6''$ einfacher gelangen, indem wir in den Gleichungen des §. 434.

$$\sin \varepsilon' = \sin p . \sqrt{nn - \sin \varepsilon^2} - \cos p . \sin \varepsilon$$
$$\sin 6'' = \sin p' . \sqrt{n'n' - \sin \varepsilon'^2} - \cos p' . \sin \varepsilon',$$

die Gröfsen n, n' sich ändern lassen, und die daraus für ε', $6''$ sich ergebenden Aenderungen mit Vernachlässigung der höhern Potenzen der Incremente, also durch einfache Differentiation, ableiten. Auf diese Weise ergiebt sich, indem man $N - n = \delta n$, $N' - n' = \delta n'$ setzt,

$$- \frac{\cos p \cdot \sin p \cdot \delta n \cdot \sqrt{\ }}{\sqrt{(nn -}}$$

[illegible] ins den Werth

[illegible] der rothe S

[illegible] für den in den

[illegible] $n' -$

§. 436.

[illegible] der Kürze wegen

$$- \sin \ldots - \cos p \cdot \sin$$

[illegible] Reichungen der

$$\sin (p - \theta)$$

$$\sin \ldots - \frac{\ldots \cdot \sin}{\sqrt{n}}$$

$$= \ldots \cdot \sin \mu \text{ se}$$

$$\ldots - \frac{\ldots \cdot \sin p}{\ldots}$$

[illegible] Secunden haben

$$\ldots - 206265 \cdot \frac{\delta n}{\ldots}$$

erdem hat man noch für die erwähnten Glasarten

$$n = 1{,}50; \quad n' = 1{,}58,$$

für die violette Farbe $\delta n = 0{,}02$, $\delta n' = 0{,}04$.

nn wird $\sin \theta = \frac{n}{n'} \cdot \sin p$.

$\log n = 0.1760913$
$\mathrm{C}.\log n' = 9.8013429$
$\log \sin p = 9.5340517$
$\sin \theta \ldots 9.5114859$
$\theta = 18^0\ 56'\ 51'', 2$
$p' - \theta = -\ 3.56.51'', 2$
$\sin (p' - \theta) \ldots 8.8378620.\mathrm{n}$
$n' \ldots 0.1986571$
$\sin \theta'' \ldots 9.0365191.\mathrm{n}$
$\theta'' = -\ 6^0\ 14'\ 40'', 4$
$\cos \theta'' \ldots 9.99743$
$\cos \theta \ldots 9.97581$
9.97324

$\delta n' \ldots 8.60206$
$206265 \ldots 5.31443$
$\sin p' \ldots 9.41300$
0.02676
3.35625
$2271'', 2$
$1497'', 1$

$\delta n \ldots 8.30103$
$206265 \ldots 5.31443$
$\sin p \ldots 9.53405$
$\cos (p' - \theta) \ldots 9.99897$
0.02676
3.17524
$1497'', 1$

$d\theta'' = 774'' 1 = 12'\ 54'', 1.$

§. 438.

Man sieht nun leicht aus der Gleichung, welche
Werth von $\delta\theta''$ ausdrückt, dafs es möglich seyn
d, für einen bestimmten Werth des brechenden Win-
s p des ersten Prisma, und einen gegebenen Einfalls-
kel ε, den brechenden Winkel des zweiten Prisma
so zu bestimmen, dafs $d\theta''$ Null wird, d. h. dafs die
hen Strahlen nebst den Strahlen einer bestimmten
lern Farbe, z. B. violet, parallel hinter dem zweiten

[illegible] vorigen Beispiel, d[illegible]

[illegible] $= 0{,}04$, $p =$

[illegible] Formel der brechen[illegible]

[illegible]

$= 9^\circ\ 44'\ 28''$.

§. 439.

[illegible] beiden Prismen sehr k[illegible]

[illegible] die Strahlen nahe s[illegible]

[illegible] kann man alle Poten[illegible]

[illegible] und da i[illegible]

[illegible] $= 1$. so geht die [illegible]

$$= \frac{[illegible] . \sin p . \cos \theta}{[illegible] \cos [illegible] - \delta n . \sin p}$$

[illegible]

$$= \frac{[illegible]}{[illegible] - p . \delta n},$$

[illegible] Glied [illegible] im Nenner

[illegible]

[illegible] zwei Prismen [illegible]

[illegible] diese brechend

rbenstrahlen parallele Richtung besitzen. Wäre das erhältnifs $\delta n : \delta n'$ für alle Farben völlig gleich, so ürden auch alle Farbestrahlen parallel ausfahren. Wenn n auch dies nicht mathematisch genau der Fall ist, sind doch die Abweichungen der übrigen Strahlen m Parallelismus so gering, dafs man sie physisch für rallel ansehen kann. Bringt man also das Auge in e Richtung dieses ausfahrenden Strahls, so vereinigen ch alle verschieden gefärbten Strahlen auf einer Stelle r Netzhaut, und da die Mischung der sieben verhiedenen Grundfarben weifses Licht giebt, so folgt eraus, dafs der Gegenstand, von welchem das Licht sgieng, ohne die farbigen Ränder erscheinen wird, e sich durch ein einfaches Prisma zeigen. Man nennt her ein so zusammengesetztes Prisma ein achroatisches Prisma.

§. 440.

Es mufs nun noch untersucht werden, ob bei dieser inrichtung des achromatischen Prisma eine Ablenkung r Richtung des ausfahrenden Strahls von der Richng des einfallenden Statt findet, oder ob beide Strahn einander parallel werden. Denn wäre letzteres der all, so würden wir aus diesem Achromatismus der rismen gar keinen Nutzen für die Zusammensetzung r Glaslinsen, um bei diesen die Farbenzerstreuung fzuheben, ziehen können.

Der Winkel, welchen der einfallende Strahl mit dem sfahrenden bildet, läfst sich folgendermafsen finden. ch §. 358. ist, wenn der Einfallswinkel auf das erste isma durch ε, der Brechungswinkel des ausfahrenden rahls, in dem §. 425. angegebenen Sinne genommen, rch $6'$ bezeichnet wird, der Winkel, den beide Strahmit einander bilden,

$$= \varepsilon + 6' - p.$$

n ist für das zweite Prisma der Einfallswinkel ebenls $6'$, der Brechungswinkel $6''$, also der Winkel beider

$$= 6' + 6'' - p'.$$

Der Unterschied beider Winkel giebt dann den Winkel, welchen der einfallende Strahl mit dem aus dem zweiten Prisma ausfahrenden bildet. Bezeichnet man denselben durch δ, so ist

$$\delta = \varepsilon - \vartheta'' - (p - p').$$

§. 441.

In so fern nun aber alle Winkel ε, p, p' als sehr klein angenommen werden, wird auch ϑ'' sehr klein, und man erhält aus der Gleichung (§. 434.)

$$\sin\vartheta'' = \cos p' . \cos p . \sin\varepsilon - \cos p' . \sin p . \sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}$$
$$+ \sin p' . \sqrt{[n'n' - (\sin p . \sqrt{nn - \sin\varepsilon^2} - \cos p . \sin\varepsilon)^2]},$$

mit Vernachlässigung aller Potenzen der Winkel

$$\vartheta'' = n'p' + \varepsilon - np,$$

und wenn man diesen Werth von ϑ'' in die Gleichung

$$\delta = \varepsilon - \vartheta'' - (p - p')$$

substituirt, so kommt

$$\delta = (n - 1) . p - (n' - 1) . p'.$$

Dieser Winkel ist nicht Null, so lange nicht

$$p : p' = (n' - 1) : (n - 1),$$

und da wir schon früher gefunden hatten, dafs bei dem achromatischen Prisma die Proportion

$$p : p' = dn' : dn$$

Statt finden mufs, so folgt hieraus, dafs, im Fall der Winkel δ verschwindet,

$$n' - 1 : n - 1 = dn' : dn$$

$$\frac{dn}{n - 1} = \frac{dn'}{n' - 1}$$

seyn wird.

§. 442.

Die Quotienten $\frac{dn}{n-1}$, $\frac{dn'}{n'-1}$ kann man die Zerstreuungsverhältnisse der brechenden Materien nennen, und man darf daher sagen, wenn die Zerstreuungsverhältnisse der brechenden Materien, aus welchen die Prismen bestehen, ungleich sind, so wird eine Ablenkung des

sfahrenden Strahls von der Richtung des einfallenden att finden.

Newton war durch einen Versuch verleitet wor- n, anzunehmen, dafs bei allen brechenden Materien e Gleichung

$$\frac{dn}{n-1} = \frac{dn'}{n'-1}$$

füllt würde, dafs also der Strahl nur dann ungefärbt stritt, wenn derselbe dem einfallenden Strahl parallel t. Hieraus folgerte er ganz richtig, dafs es keine ittel gäbe, die Fernröhre so zusammenzusetzen, dafs eselben achromatische Bilder darstellten. Er verliefs aher die Untersuchung über die Verbesserung der ernröhre gänzlich, und wandte sich zu der Verferti- ung der Spiegeltelescope, bei denen keine Farben ntstehen konnten, weil durch die Reflexion keine Zer- gung des Lichts hervorgebracht wird. Späterhin wurde doch dieser Fehlschlufs entdeckt, und die Mittel auf- efunden, achromatische Fernröhre zu verfertigen.

§. 443.

Ehe wir nun zur Anwendung der bisher vorgetra- enen Lehren über die Zerlegung des Lichts in Farben nd die durch passende brechende Materien wieder er- lgende Mischung der Farben zu weifsem Licht auf ie Zusammensetzung von Glaslinsen übergehen, wollen ir zu der Erklärung der Erscheinung des Regen- ogens schreiten. Es sey MNO der Durchschnitt einer ugel, welche aus irgend einer brechenden Materie esteht, deren Brechungsverhältnifs wir für irgend einen estimmten Farbenstrahl, z. B. den rothen, durch n ezeichnen. In C sey der Mittelpunkt des Kreises, so ellen die Halbmesser desselben die Einfallslothe vor. M sey ein von einem sehr entfernten Object, z. B. em Mittelpunkt der Sonne, einfallender Strahl, und ennt man den Einfallswinkel ε, den Brechungswinkel MC, δ, so hat man

$$\sin \varepsilon = n \,.\, \sin \delta.$$

Der gebrochene Strahl MN trifft nun in N die Oberfläche der Kugel, wo ein grofser Theil des Lichts austritt, dieses berücksichtigen wir nicht; allein ein Theil desselben wird nach NO zurückgeworfen, und tritt dann erst wieder nach OP aus, so dafs ein Auge, welches sich in der Richtung des Strahls OP befindet, den Gegenstand, welcher vermittelst LM sein Licht auf die Kugel schickt, sehen würde.

§. 444.

Da nun

$$MNC = CMN = \theta,$$

und vermöge der Zurückwerfungsgesetze $CNO = CNM$ seyn wird, so ist ebenfalls $CON = \theta$, folglich der Winkel POS, welchen der austretende Strahl mit dem verlängerten Halbmesser bildet, $= \varepsilon$. Man verlängere den einfallenden Strahl, bis er die ebenfalls verlängerten Strahlen ON, OP in Q und S schneidet, so hat man im Dreieck MNQ

$$QMN + MQN = MNO,$$

und da $QMN = \varepsilon - \theta$, $MNO = 2\theta$, so ergiebt sich der Winkel, welchen der einmal zurückgeworfene Strahl mit den einfallenden bildet,

$$MQN = 3\theta - \varepsilon.$$

Im Dreieck QRO hat man

$$MQN = QRO + QOR,$$

und da $QOR = \varepsilon - \theta$, so wird auch

$$QRO = 4\theta - 2\varepsilon.$$

Bezeichnet man daher den Winkel, den der ausfahrende Strahl nach einmaliger Zurückwerfung mit dem einfallenden bildet, durch E', so hat man

$$E' = 4\theta - 2\varepsilon.$$

§. 445.

So wenig nun aber bei N alles Licht aus der Kugel austrat, eben so wenig wird auch bei O alles Licht austreten, sondern ein Theil desselben wird zurückgeworfen, und dann erst die Kugel verlassen. Auf

diese Weise wird jeder ausfahrende gebrochene Strahl wiederum eine neue Zurückwerfung mit sich führen. Bezeichnet man den Winkel des ausfahrenden Strahls mit dem einfallenden nach zweimaliger Zurückwerfung durch E'', nach dreimaliger Zurückwerfung durch E''' u. s. w. fort, so erhält man leicht folgende Reihe von Gleichungen:

$$E' = 4\mathfrak{G} - 2\varepsilon;$$
$$E'' = 6\mathfrak{G} - 2\varepsilon;$$
$$E''' = 8\mathfrak{G} - 2\varepsilon; \text{ u. s. w.}$$

Man sieht hieraus sogleich, dafs nach m maliger Zurückwerfung der Winkel des ausfahrenden Strahls mit dem einfallenden

$$E^{(m)} = 2.(m+1).\mathfrak{G} - 2\varepsilon$$

werden wird, wo ε und $\mathfrak{G}$ mit einander durch die Gleichung $\sin\varepsilon = n.\sin\mathfrak{G}$ verbunden sind.

§. 446.

Differentiirt man diese beiden letzten Gleichungen, so kommt

$$dE^{(m)} = 2.(m+1).d\mathfrak{G} - 2d\varepsilon$$
$$\cos\varepsilon.d\varepsilon = n.\cos\mathfrak{G}.d\mathfrak{G},$$

und wenn man hieraus $d\mathfrak{G}$ eliminirt

$$\frac{1}{2}.\frac{dE^{(m)}}{d\varepsilon} = \frac{(m+1).\cos\varepsilon}{\sqrt{nn - \sin\varepsilon^2}} - 1,$$

welche Gleichung zeigt, in wiefern sich $E^{(m)}$ durch eine Veränderung von ε vermehrt oder vermindert. Nehmen wir nun den Werth von ε, dem die geringste Aenderung von $E^{(m)}$ entspricht, so werden dann die in der Nähe des Punktes M parallel auffallenden Strahlen so zurückgeworfen und gebrochen, dafs die ausfahrenden Strahlen untereinander parallel werden, und hierdurch, bei dieser Lage der einfallenden Strahlen, dem Auge das meiste Licht zugeführt wird. Dies geschieht natürlich dann, wenn $dE^{(m)}$ Null ist, und man erhält dann zur Bestimmung von ε die Gleichung

$$(m+1)^2.\cos\varepsilon^2 = nn - \sin\varepsilon^2.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\sin \varepsilon = \sqrt{\frac{(m+1)^2 - nn}{mm + 2m}}.$$

§. 447.

Setzt man in dieser Formel nach und nach 1, u. s. w. statt m, so kommen nach und nach die We von $\sin \varepsilon$

1) $\sin \varepsilon = \sqrt{\frac{4 - nn}{3}}$

2) $\sin \varepsilon = \sqrt{\frac{9 - nn}{8}}$

3) $\sin \varepsilon = \sqrt{\frac{16 - nn}{15}}$

4) $\sin \varepsilon = \sqrt{\frac{25 - nn}{24}}$ u. s. w.,

für $m = \infty$ wird $\sin \varepsilon = 1$, dann berührt der S LM die Kugel. Für Wasser nehme man

$n = 1{,}330$ bei rothen Strahlen,

$n = 1{,}342$ - violetten -

so ergiebt sich in Zahlen, wenn man bis zur zwe Zurückwerfung geht,

	Roth.	Violet.
1)	$\varepsilon = 59^\circ\ 35'\ 2''$	$58^\circ\ 53'\ 14''$
2)	$\varepsilon = 71\ 56\ 22$	$71\ 33\ 10$
3)	$\varepsilon = 76\ 54\ 51$	$76\ 38\ 21$
4)	$\varepsilon = 79\ 41\ 21$	$79\ 28\ 26$
5)	$\varepsilon = 81\ 28\ 35$	$81\ 17\ 56$
6)	$\varepsilon = 82\ 43\ 44$	$82\ 34\ 40.$

	Roth.	
1)	$6 = 40^\circ\ 25'\ 16''$	$39^\circ\ 38'\ 25''$
2)	$6 = 45\ 37\ 47$	$44\ 58\ 51$
3)	$6 = 47\ 5\ 3$	$46\ 28\ 4$
4)	$6 = 47\ 42\ 33$	$47\ 6\ 22$
5)	$6 = 48\ 2\ 13$	$47\ 26\ 27$
6)	$6 = 48\ 13\ 51$	$47\ 38\ 20.$

	Roth.			Violet.		
E'	= 42°	31′	0″	40°	47′	12″
E''	= 129	53	54	126	46	38
E'''	= 222	50	42	218	27	50
E^{iv}	= 317	42	48	312	6	48
E^{v}	= 53	29	26	46	41	32
E^{vi}	= 149	46	26	141	47	20.

§. 448.

lan sieht hieraus, dafs die Winkel des einfallenden
s mit dem ausfahrenden, die wir durch E be-
et haben, bis zu 360° wachsen. Es fragt sich
ber, wie diese Winkel dann genommen werden
n, wenn sie gröfser als 90° werden. Der Normal-
er Zeichnung stellt den Fall vor, wenn die Ver-
ungen des einfallenden Strahls sowohl, als des
renden sich durchschneiden, wobei zugleich ange-
en ist, der einfallende Strahl treffe den obern
der Wasserkugel. Befindet sich also das Auge
erselben Seite der Wasserkugel, auf welcher die
steht, und zugleich dem Erdboden näher, als
ugel, so wird das Auge die unter dem Winkel
2° 31′ gegen den einfallenden Strahl ausgehenden
en sehen können. Wird nun der Winkel E gröfser
?, so findet man leicht, dafs nicht die Verlängerun-
er Strahlen, sondern die Strahlen selbst sich schnei-
nd zwar unter einem Winkel 180° — 129° 53′ 54″
° 6′ 6″. Es ist aber zugleich einleuchtend, dafs
sem Fall der einfallende Strahl in den untern
der Wasserkugel gehen mufs, damit der aus dem
Theil ausgehende Strahl das tiefer stehende Auge
könne. Liegt der Winkel E zwischen 180° und
so durchschneiden sich die Strahlen ebenfalls,
unter einem stumpfen Winkel. Ist endlich der
l zwischen 270° und 360° enthalten, so durch-
den sich die Verlängerungen des einfallenden und
usfahrenden Strahls unter einem stumpfen Winkel.

§. 449.

Die Reihe der Winkel E', E''.... u. s. w. m
also nach den Bemerkungen des vorigen §. so geschr
ben werden:

	Roth.			Violet.		
E'	= 42°	31′	0″	40°	47′	12″
E''	= 50	6	6	53	13	22
E'''	= 137	9	18	141	32	10
E^{IV}	= 137	42	48	132	6	48
E^{V}	= 53	29	26	46	41	32
E^{VI}	= 30	13	34	38	12	40.

Bezeichnet man die Unterschiede dieser Winkel
Roth weniger Violet
durch Δ', Δ'', Δ'''....., so erhält man

Δ'	= + 1°	43′	48″
Δ''	= − 3	7	16
Δ'''	= − 4	22	52
Δ^{IV}	= + 5	36	0
Δ^{V}	= + 6	47	54
Δ^{VI}	= − 7	59	6.

Das positive Vorzeichen bedeutet, dafs bei dieser A
zahl von Zurückwerfungen das Violet weiter unten s
zeigt, als das Roth. Der umgekehrte Fall wird dur
das negative Vorzeichen angedeutet.

§. 450.

Es ist bekannt, dafs, wenn ein Regenbogen e
stehen soll, das Auge sich zwischen der Sonne u
einer regnenden Wolke befinden mufs. Ein jeder R
gentropfen ist als eine kleine Wasserkugel anzuseh
und obgleich selbiger jeden Augenblick im Fallen se
Lage verändert, so wird seine Stelle doch immer dur
einen andern ersetzt, und wir dürfen denselben dah
als stillstehend betrachten. Da ferner blofs die an d
dem Auge zugekehrten äufsersten Grenze befindlich
Regentropfen das Licht hinreichend zurückwerfen kö
nen, so werden wir uns eine verticale Ebene vorstelle

e mit lauter stillstehenden Regentropfen besetzt ist, d von der Sonne beschienen wird. Ferner denken r uns durch das Auge und den Mittelpunkt der Sonne ne auf dem Horizont senkrecht stehende Ebene gelegt, schneidet diese Ebene die Regenwand in einer auf dem orizont senkrecht stehenden Linie, die eine Reihe ver- cal übereinanderliegender Regentropfen enthalten wird.

§. 451.

Es sey nun, zur Zeit der Erscheinung eines Regen- ogens, die Höhe der Sonne über dem Horizont, d. h. er Winkel, den die nach ihrem Mittelpunkt gezogene esichtslinie mit dem Horizont bildet, $= H$, die Höhe es Auges über der Horizontalebene $= a$, die Entfer- ung der Regenwand vom Auge $= e$, die Höhe irgend nes Regentropfens über der Horizontalebene $= x$, er Winkel, welchen die nach diesem Regentropfen ezogene Gesichtslinie mit der Horizontalebene bildet, $= \xi$, so wird erstens

$$\text{tang}\,\xi = \frac{x - a}{e},$$

o der Winkel ξ, wenn die Tangente positiv ist, zwi- chen 0 und $+ 90^0$, wenn die Tangente negativ ist, wischen 0 und $- 90^0$ genommen werden mufs. Zwei- ns wird noch zwischen den Winkeln H, ξ, E die elation

$$H + \xi = E$$

tatt finden. Wenn ferner der Beobachter sich nicht uf einem erhöhten Punkte, sondern in der Ebene be- ndet, so wird man allgemein a gegen x vernachlässigen önnen, und es würde dann ξ immer positiv. Hieraus lgt, dafs die Höhe der Sonne H höchstens dem Winkel gleich seyn darf, wo dann die dem Winkel E cor- espondirende Farbe im Horizont erscheint. Gesetzt un, die Höhe der Sonne sey kleiner als $40^0\ 47'\ 12''$, elcher Winkel nach voriger Tabelle dem Violet der rsten Zurückwerfung entspricht, und um eine be- immte Zahl zu haben, setzen wir sie $= 38^0\ 28'\ 11''$,

[illegible] das erste violette

[illegible] = 4° 2′ 49″

[illegible] beiden Höhen [illegible] Regenbogens, und wenn [illegible] in arithmetischer [illegible] erhalten wir folgende [illegible]

[illegible]

§. [illegible]

[illegible] der Sonne Licht [illegible] angegebenen Höhen [illegible] gefärbten Bilder [illegible] welche den ersten Re- [illegible] aber die Sonne eine [illegible] Fläche, von deren [illegible]; es wird also statt [illegible] Farbe immer eine an- [illegible] innerhalb eines bestimmten [illegible] und die Werthe von ξ, [illegible] zwischen denen sie ein- [illegible] den Gleichungen

[illegible]

[illegible] Sonne = 16 Minuten [illegible] die Breite jeder Farbe [illegible] Sonne gleich kommt, [illegible] Werthe von ξ für die [illegible] jeder Farbe entsprechen. [illegible] Regenbogens wird also durch

sen Umstand auch um den Durchmesser der Sonne
mehrt, indem das Violet schon bei einer Höhe von

$$2^0\,19' - 16' = 2^0\,3'$$

fängt, das Roth hingegen sich erst bei einer Höhe von

$$4^0\,3' + 16' = 4^0\,19'$$

digt. Die mittlern Farben werden sich ferner sehr
deutlich zeigen, da sie sich theilweise decken.

§. 453.

Wird die in §. 450. durch das Auge und den Mittel-
nkt der Sonne gelegte Ebene um die Linie, welche
s Auge mit dem Mittelpunkt der Sonne verbindet, als
e gedreht, so lassen sich auf die dadurch entstehenden
urchschnitte der Regenwand dieselben Schlüsse an-
nden, welche wir bei dem verticalen Durchschnitt
seinandergesetzt haben. Eine jede Linie, welche dann
t der besagten Drehungslinie einen Winkel bildet, der
em der Werthe von E entspricht, wird die correspon-
ende Farbe haben. Hieraus folgt, dafs alle Ge-
htslinien, die vom Auge nach einer und derselben
rbe gezogen werden, auf einer Kegeloberfläche lie-
n, deren Axe die vom Auge nach dem Mittelpunkt
r Sonne gezogene Linie ist. Folglich bilden die Far-
n des Regenbogens am Himmelsgewölbe Zonen, die
n kleinen Kreisen eingeschlossen sind, und deren
ometrischer Pol so tief unter der Horizontalebene
gt, als der Mittelpunkt der Sonne sich über derselben
findet.

§. 454.

Diese erste Reihe von Farben, welche nach ein-
liger Reflexion der Sonnenstrahlen in den Regen-
pfen entstehen, bilden den sogenannten Hauptregen-
gen, von welchem in manchen Fällen, wo die Regen-
nd nicht Ausdehnung genug hat, nur ein Stück zu
hen ist. Gewöhnlich zeigt sich aufser diesem ersten
genbogen noch ein zweiter oder Nebenregenbogen,
t schwächern Farben, welche, in Bezug auf die des

ersten genommen, in umgekehrter Ordnung auf einan folgen. Dieser erklärt sich aus den Werthen von wo §. 449.

$$E'' \text{ roth} = 50^0\ 6'\ 6''$$
$$E'' \text{ violet} = 53\ 13\ 22$$

gefunden ist. Da hier der Winkel, den die rot Strahlen mit der Axe des Kegels bilden, kleiner als der der violetten, so liegt der rothe Streifen diesem zweiten Regenbogen dem Horizont näher, der violette, folglich gegen den ersten umgekehrt, ches mit der Beobachtung übereinstimmt. Zieht m die beiden Werthe von E'' von einander ab, und add den Durchmesser der Sonne von 32′ hinzu, so kom die Breite des Nebenregenbogens

$$= 3^0\ 39'\ 16'',$$

während die des ersten 2° 16′ betrug, also das V hältnifs beider Breiten ungefähr wie 3 : 2 ist. D äufserste Roth des ersten Regenbogens bildet ein Winkel

$$E' = 42^0\ 31' + 16',$$

das innerste Roth des zweiten Regenbogens hingeg einen Winkel

$$E'' = 50^0\ 6' - 16',$$

also ist der kleinste Abstand des Nebenregenbogens v Hauptregenbogen

$$= 7^0\ 3'.$$

§. 455.

Um die Lichtstärke dieser beiden Regenbogen einander zu vergleichen, wollen wir annehmen, es we be ieinem Einfallswinkel $= \varepsilon$ die Lichtmenge p zurü geworfen, während die einfallende Lichtmenge als E heit betrachtet wird. Ferner kann man, so viel Versuche hierüber lehren, wohl annehmen, dafs einem Zurückwerfungswinkel 6 im Innern der brech den Materie ebenfalls die Lichtmenge p zurückgewo wird, wenn 6 und ε durch die Gleichung

$$\sin \varepsilon = n \,.\, \sin 6$$

inander verbunden sind, wo n das Brechungsver-
s der Materie bezeichnet. In den Regentropfen
lso die Lichtmenge $1 - p$, und der im Innern
kgeworfene Theil wird $= (1 - p).p$, also der
der Zurückwerfung austretende
$(1 - p).p - (1 - p).p^2 = (1 - p)^2.p.$
ein Theil von $(1 - p).p$ nochmals zurückgewor-
so ist die nach zweimaliger Zurückwerfung übrig
nde Lichtmenge $= (1 - p).p^2$, folglich der nach
Zurückwerfung austretende Theil
$(1 - p).p^2 - (1 - p).p^3 = (1 - p)^2.p^2.$
man so weiter fort, so ergiebt sich leicht, dafs
nein nach m maliger Zurückwerfung die austre-
Lichtmenge
$= (1 - p)^2.p^m$
wird.

§. 456.

Für den ersten Regenbogen haben wir (§. 447.)
roth $\varepsilon = 59^0\ 35'\ 2''$
violet $\varepsilon = 58\ 53\ 14$
Mittel $\varepsilon = 59\ 14\ 8$,
für diesen Werth von ε geben Bouguer's Ver-
über die Zurückwerfung des Lichts vom Wasser
$\frac{1}{13}$; es wird also für den ersten Regenbogen
$(1 - p)^2.p = 0{,}0581.$
den zweiten Regenbogen hat man
roth $\varepsilon = 71^0.56'.22''$
violet $\varepsilon = 71\ .33\ .10$
Mittel $\varepsilon = 71\ .44\ .46.$
zu gehört nach Bouguer's Versuchen der Werth
$\frac{1}{5}$, also wird für den zweiten Regenbogen
$(1 - p)^2.p^2 = 0{,}0193.$
Verhältnifs der Helligkeit wäre also wie 581 : 193
wie 3 : 1 *).

---

*) Es ist noch ein zweiter Grund vorhanden, der den zweiten Regenbogen schwächer erscheinen läfst, als den ersten. Die

selben sind zu schwach, um einen Eindruck
Auge des Menschen machen zu können. Denn
in z. B. für den dritten Regenbogen $p = \frac{3}{4}$ an,
man, dafs seine Helligkeit sich zu der des
e 1 : 21 verhält. Aufserdem ist seine Lage
s Auge höchst ungünstig. Für rothe Strahlen
ch $E''' = 135^0\ 34'\ 40''$, also folgt aus der

$$H + \xi = E'''$$
$$H = E''' - \xi.$$

ξ, der Natur der Sache nach, nicht gröfser
erden, also wird H gewifs gröfser als 45^0 seyn

$$\frac{ddE^{(m)}}{de^2} = -\frac{2.((m+1)^2-1).\sqrt{((m+1)^2-nn)}}{(m+1)^2.\sqrt{(nn-1)}}.$$

chtstärke des Regenbogens, der durch m malige Reflection
it, wird also dieser Gröfse umgekehrt proportional seyn,
n sie von der Divergenz der Strahlen herrührt, und
Stärke der Strahlen, die zu uns gelangen (§. 455.),
$(1-p)^2.p^m$ ist, so haben wir die Lichtstärke

$$L^{(m)} \quad \frac{(1-p)^2.p^m.(m+1)^2}{((m+1)^2-1).\sqrt{((m+1)^2-nn)}}.$$

st für den ersten Regenbogen

$$L' = \frac{4.(1-p)^2.pp}{3.\sqrt{(4-nn)}},$$

n zweiten

$$L'' = \frac{9.(1-p)^2.p^5}{8.\sqrt{(9-nn)}},$$

n dritten

$$L''' = \frac{16.(1-p)^2.p^8}{15.\sqrt{(16-nn)}} \quad \text{u. s. w.}$$

en wir für p die im Texte angegebenen Werthe, und
für die mittlern Strahlen $n = 1.336$, so ist

$L' = 0.05203$
$L'' = 0.00808$
$L''' = 0.00249.$

rste Regenbogen ist also etwa $6\frac{1}{2}$ mal so hell, als der
, und 21 mal so hell, als der dritte. G.

müssen, wenn dieser dritte Regenbogen erscheinen soll, der dem Zenith dann sehr nahe liegt. Allein bei einem solchen Werth von H ist der erste Regenbogen gar nicht sichtbar, und der zweite liegt auch ganz nahe am Horizont, wo man dann, da die Aufmerksamkeit durch das Erscheinen des Regenbogens nicht aufgeregt ist, nicht eben auf den Gedanken gerathen wird, den dritten aufzusuchen, wenn seine Lichtstärke auch wohl noch im Stande wäre, einen Eindruck im Auge hervorzubringen.

Von den achromatischen Glaslinsen.

§. 458.

Vernachlässigt man in den Gleichungen des Wegs eines Lichtstrahls durch eine Glaslinse die Potenzen der Winkel, so wie die Dicke der Glaslinse, so hat man nach §. 379. die Gleichungen

1) $\varphi = \frac{r}{h} \cdot \theta$

2) $\varphi' = \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{hn}\right) . \theta$

3) $\theta' = \frac{r}{\varrho} \cdot \theta$

4) $\varphi'' = \left(n - 1 - \frac{r}{h}\right) . \theta + \frac{(n-1) . r}{\varrho} \cdot \theta$

5) $k = \frac{hr\varrho}{h . (r + \varrho) . (n - 1) - r\varrho}$.

Wenn nun n das Brechungsverhältnifs für die mittlern Strahlen bedeutet, d. h. für diejenigen, für welche das Brechungsverhältnifs das arithmetische Mittel aus dem gröfsten und kleinsten Brechungsverhältnifs ist, und welches meistentheils mit dem der grünen Strahlen zusammen fällt, so kann man fragen, welche Veränderungen

öfsen φ', θ'.... erleiden, indem das Brechungs-
nifs sich um δn ändert. Da man diese Verände-
alle als sehr klein betrachten kann, indem δn
sehr klein ist, so wird man diese Gröfsen als
ntiale ansehen können, und man erhält

$$\delta\varphi' = \theta . \delta n . \frac{h + r}{hnn}$$

$$\delta\varphi'' = \theta . \delta n . \frac{r + \varrho}{\varrho}$$

$$\delta k = - \frac{hhr\varrho\delta n . (r + \varrho)}{(h . (r + \varrho) . (n - 1) - r\varrho)^2}$$

tzte Ausdruck giebt auch noch, wenn auf beiden
mit kk dividirt wird,

$$\frac{\delta k}{kk} = - \delta n \cdot \frac{r + \varrho}{r\varrho}.$$

also auf einen Punkt der Vorderfläche eines Glases
chtstrahl auffällt, so wird dieser Strahl in sieben
zerlegt, die die Axe nach erlittener doppelter
ng ebenfalls in verschiedenen Punkten schneiden.
k die Sammlungsweite für die mittlern Strahlen,
d für die am stärksten brechbaren oder violetten
mmlungsweite

$$= k - \delta n \cdot \frac{r + \varrho}{r\varrho} \cdot kk;$$

am wenigsten brechbaren oder rothen wird die
ungsweite

$$= k + \delta n \cdot \frac{r + \varrho}{r\varrho} \cdot kk.$$

hnet man die Brennweite des Glases für die mitt-
rahlen durch f, so hat man die Gleichung

$$f = \frac{r\varrho}{(n - 1) . (r + \varrho)},$$

enn man das Zerstreuungsverhältnifs (§. 443.)
$= \delta\nu$ setzt, so hat man auch

$$\delta n \cdot \frac{r + \varrho}{r\varrho} \cdot kk = \frac{kk}{f} \cdot \delta\nu.$$

Diese Gröfse wird die **Längenabweichung** der Strahlen, wegen der Farbenzerstreuung, genannt, vorausgesetzt, dafs $\delta\nu$ das Zerstreuungsverhältnifs für die äufsersten Strahlen bedeutet. Für unendlich entfernte Gegenstände wird die Längenabweichung $= f\delta\nu$.

§. 459.

Der Abstand des Punktes von der Axe, auf welchen der Strahl einfällt, sey $= t$, so ist bekanntlich $t = r.\theta$, und die Gleichung des rothen Strahls wird

$$y - t = -\frac{ft}{kf + kk\delta\nu}\cdot x.$$

Auf gleiche Weise erhält man die Gleichung des violetten Strahls, welcher von einem Punkt des Glases herkommt, der den Abstand $-t$ von der Axe hat, also eben so weit unterhalb der Axe liegt, als ersterer sich über der Axe befand,

$$y + t = \frac{ft}{kf - kk\delta\nu}\cdot x.$$

Zieht man beide Gleichungen von einander ab, so bleibt

$$2 = \frac{fx}{kf - kk\delta\nu} + \frac{fx}{kf + kk\delta\nu},$$

und hieraus ergiebt sich, mit Vernachlässigung der Potenzen von $\delta\nu$, $x = k$, also wird die Abscisse des Durchschnittspunktes gleich der Sammlungsweite der mittlern Strahlen. Substituirt man diesen Werth von x in eine der beiden Gleichungen, so ergiebt sich

$$y = \pm\frac{tk}{f}\cdot\delta\nu.$$

Diese Ordinate y wächst mit t; bezeichnet also t den gröfsten Werth des Abstandes von der Axe, oder die halbe Oeffnung des Glases, so erreicht y seinen gröfsten Werth für einen Randstrahl, und man nennt dann den Ausdruck $\frac{tk}{f}\cdot\delta\nu$ die **Seitenabweichung** wegen der Farbenzerstreuung. Zugleich sieht man, dafs die

eitenabweichung erhalten wird, indem die Längenab-
eichung mit dem Quotienten $\frac{t}{k}$ multiplicirt wird.

§. 460.

Beschreibt man mit der Seitenabweichung $\frac{tk}{f} \cdot \delta v$
nen Kreis, der senkrecht auf der Axe steht, und
essen Fläche der des Glases parallel liegt, so wird
ieser der **Abweichungskreis** genannt. Nun sey
$T < t$, $\Delta v < \delta v$, so wird die Gleichung eines Strahls,
elcher im Abstand T von der Axe auffällt, und dessen
erstreuungsverhältnifs durch Δv ausgedrückt wird,

$$y - T = -\frac{fT}{kf + kk\Delta v} \cdot x.$$

etzt man hierin $x = k$, so wird

$$y = \frac{Tk}{f} \cdot \Delta v.$$

ieser Werth von y drückt die Entfernung von der
xe aus, in welcher der Strahl den Abweichungskreis
ifft, und da das Product $T\Delta v$ mit T und Δv zu-
leich wächst, so wird dieser Werth von y immer kleiner
usfallen, als die Seitenabweichung, also werden alle
trahlen, die auf das Glas fallen, durch diesen Ab-
eichungskreis gehen. Der Winkel endlich, welchen
er mittlere Randstrahl mit dem violetten oder rothen
ildet, wird der **Abweichungswinkel** genannt, und
ein Werth ergiebt sich aus der Gleichung (§. 458.)

$$\delta\varphi'' = \theta\delta n \cdot \frac{r + \varrho}{\varrho}.$$

lan kann diese Gleichung noch etwas anders schreiben,
ndem man bemerkt, dafs

$$r\theta = t, \quad \frac{r\varrho}{r + \varrho} = (n - 1) \cdot f$$

$$\frac{dn}{n - 1} = dv$$

t, und es ergiebt sich dann

$$\delta\varphi'' = \frac{t}{f} \cdot \delta v.$$

Da in diesem Ausdruck weder h noch k vorkommt, so folgt hieraus, dafs der Abweichungswinkel gar nicht von der Entfernung des Objects vom Glase abhängt.

§. 461.

Um nun die Abweichungen wegen der Farbenzerstreuung durch mehrere Gläser zu finden, nehme man zuerst zwei Gläser, deren Brechungsverhältnisse n, n' sind, und deren Zerstreuungsverhältnisse $\frac{dn}{n-1}$, $\frac{dn'}{n'-1}$ durch dv, dv' bezeichnet werden. Man hat dann nach §. 403. die Gleichungen

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f},$$

$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{f'},$$

$$k + h' = l.$$

Da nun h und l hierin unveränderlich sind, so hat man durch Differentiation dieser Gleichungen, indem statt des Zeichens d, das Zeichen δ gebraucht wird,

$$\frac{\delta k}{kk} = \frac{\delta f}{ff}$$

$$\frac{\delta h'}{h'h'} + \frac{\delta k'}{k'k'} = \frac{\delta f'}{f'f'}$$

$$\delta k + \delta h' = o.$$

Eliminirt man aus diesen drei Gleichungen δh, $\delta h'$, so bleibt

$$\frac{\delta k'}{k'k'} = \frac{\delta f'}{f'f'} + \frac{\delta f}{ff} \cdot \frac{kk}{h'h'}.$$

Sind nun die Halbmesser der Krümmungen des ersten Glases r, ϱ, die des zweiten r', ϱ', so sind die Brennweiten f, f'

$$f = \frac{r\varrho}{(n-1).(r+\varrho)}$$

$$f' = \frac{r'\varrho'}{(n'-1).(r'+\varrho')},$$

nn man auf beiden Seiten die Logarithmen

$$\log f = \log \frac{r\varrho}{r+\varrho} - \log (n-1)$$

$$\log f' = \log \frac{r'\varrho'}{r'+\varrho'} - \log (n'-1).$$

irt man diese Gleichungen, indem man δ statt und bemerkt, dafs die Gröfsen r, ϱ, r', ϱ' erlich sind, so kommt

$$\frac{\delta f}{f} = -\frac{\delta n}{n-1} = -\delta\nu$$

$$\frac{\delta f'}{f'} = -\frac{\delta n'}{n'-1} = -\delta\nu'.$$

läfst sich vorige Gleichung auch so schreiben:

$$\delta k' = -k'k'.\left(\frac{\delta\nu'}{f'} + \frac{\delta\nu}{f}\cdot\frac{kk}{k'k'}\right).$$

§. 462.

drei Gläser hat man die Gleichungen

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f},$$

$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{f'},$$

$$\frac{1}{h''} + \frac{1}{k''} = \frac{1}{f''},$$

$$k + h' = l,$$

$$k' + h'' = l',$$

nn man diese Ausdrücke differentiirt,

$$\frac{\delta k}{kk} = \frac{\delta f}{ff}$$

$$\frac{\delta h'}{h'h'} + \frac{\delta k'}{k'k'} = \frac{\delta f'}{f'f'}$$

$$\frac{\delta h''}{h''h''} + \frac{\delta k''}{k''k''} = \frac{\delta f''}{f''f''}$$

$$\delta k + \delta h' = o, \quad \delta k' + \delta h'' = o.$$

Eliminirt man aus diesen Gleichungen δk, $\delta k'$, $\delta k''$, $\delta k'''$, so bleibt

$$\frac{\delta k''}{k''k'''} = \frac{\delta f''}{f''f'''} + \frac{\delta f'}{f'f''} \cdot \frac{k'k'}{k''k''} + \frac{\delta f}{ff} \cdot \frac{k'k'}{k''k''} \cdot \frac{kk}{k'k'}.$$

Bemerkt man nun, dafs

$$\delta f = -f\delta\nu, \quad \delta f' = -f'\delta\nu', \quad \delta f'' = -f''\delta\nu'',$$

so erhält man auch

$$\delta k'' = -k''k''' \left\{ \begin{matrix} \frac{\delta\nu''}{f'''} + \frac{\delta\nu'}{f'} \cdot \frac{k'k'}{k''k''} \\ + \frac{\delta\nu}{f} \cdot \frac{kk}{k'k'} \cdot \frac{k'k'}{k''k''} \end{matrix} \right\}$$

Man sieht aus der Bildung dieser Ausdrücke leicht, wie diese Formeln bei einer noch gröfsern Anzahl von Gläsern beschaffen seyn würden. So erhielte man z. B. bei vier Gläsern

$$\delta k''' = -k'''k'''' \left\{ \begin{matrix} \frac{\delta\nu'''}{f'''} + \frac{\delta\nu''}{f''} \cdot \frac{k''k''}{k'''k'''} \\ + \frac{\delta\nu'}{f'} \cdot \frac{k'k'}{k''k''} \cdot \frac{k''k''}{k'''k'''} \\ + \frac{\delta\nu}{f} \cdot \frac{kk}{k'k'} \cdot \frac{k'k'}{k''k''} \cdot \frac{k''k''}{k'''k'''} \end{matrix} \right\}$$

Alle einzelnen Glieder der in den Parenthesen eingeschlossenen Ausdrücke sind positiv, solange die Brennweiten der in Betracht gezogenen Glaslinsen positiv sind, folglich wird die Längenabweichung durch mehrere Gläser, wenn sie erhaben sind, immer gröfser, je gröfser die Anzahl der Gläser ist. Soll daher die Längenabweichung wegen der Farbenzerstreuung vermittelst der Zusammensetzung von mehreren Glaslinsen aufgehoben, d. h. δk Null werden, so mufs wenigstens eine Brennweite negativ seyn.

§. 463.

Bleiben wir z. B. bei zwei Gläsern stehen, so ist

$$\delta k' = -k'k' \left[\frac{\delta\nu'}{f'} + \frac{\delta\nu}{f} \cdot \frac{kk}{k'k'} \right],$$

l wenn die Längenabweichung wegen der Farben-
streuung durch zwei Gläser aufgehoben werden soll,
muſs

$$\frac{\delta v'}{f'} + \frac{\delta v}{f} \cdot \frac{kk}{k'k'} = o$$

n. Nun ist aber auch noch

$$k = \frac{hf}{h - f}$$

$$k' = \frac{l.(h - f) - hf}{h - f},$$

glich, wenn man diese Werthe von k und k' in vorige
ichung substituirt,

$$\frac{\delta v'}{f'} \cdot [l.(h - f) - hf]^2 + \delta v.hhf = o.$$

rden diese beiden Gläser so nahe zusammen gestellt,
s ihre gegenseitige Entfernung l, rücksichtlich der
nnweiten f, f', als verschwindend betrachtet werden
n, so ist $l = o$, und es bleibt

$$\frac{\delta v'}{f'} \cdot f + \delta v = o,$$

die Entfernung h des Gegenstandes ganz heraus-
allen ist. Es ergiebt sich hieraus $f' = -f \cdot \frac{\delta v'}{\delta v}$.

nn nun, nach Newton's irriger Ansicht, die Zer-
uungsverhältnisse aller brechenden Materien gleich
en (§. 442.), so hätte man $\delta v' = \delta v$, also $f' = -f$.
n erhält man aber auch statt der drei Gleichungen

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{k'} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f'}$$

$$k + k' = l,$$

e anderen

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{k'} + \frac{1}{k'} = -\frac{1}{f}$$

$$k + k' = o,$$

hieraus erhielte man in allen Fällen $h + k' = o$,
das Bild würde mit dem Gegenstande zusammen-

fallen, oder die Strahlen würden durch diese Zusa
mensetzung von Gläsern ganz ungebrochen durchgeh
Es würde also in diesem Fall völlig unmöglich se
Fernröhre zu verfertigen, in denen die Bilder ach
matisch wären. Da wir aber in der That die Gleichung

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{k'} = -\frac{\delta\nu}{f\delta\nu'}$$

$$k + k' = o$$

haben, so ergiebt sich hieraus

$$\frac{1}{k'} = \frac{1}{f} - \frac{1}{h} - \frac{\delta\nu}{f\delta\nu'}.$$

Ist die Entfernung h sehr grofs, so bleibt blofs

$$\frac{1}{k'} = \frac{1}{f} \cdot \left(\frac{\delta\nu' - \delta\nu}{\delta\nu'}\right).$$

Da nun hierbei verlangt wird, dafs sich das Bild hint
dem Glase befinde, so mufs k' positiv seyn, also, we
die Brennweite des ersten Glases als positiv betrach
wird, so mufs $\delta\nu' > \delta\nu$ werden, d. h. dasjenige Gl
welches die negative Brennweite besitzt, mufs aus
Materie bestehen, welche das stärkste Zerstreuun
verhältnifs hat.

§. 464.

Wir wollen annehmen, die Entfernung, auf wel
die Zusammensetzung zweier Gläser ein Bild eines
endlich entfernten Gegenstandes darstelle, betrage

$$k' = 5 \text{ Fufs}.$$

Besteht das vordere Glas aus Kronglas, und das
tere aus Flintglas, so hat man die Werthe

$$n = 1{,}515162;$$
$$\delta n = 0{,}010814;$$
$$n' = 1{,}601770;$$
$$\delta n' = 0{,}019960;$$

Hieraus erhält man die Zerstreuungsverhältnisse

$$\delta\nu = 0{,}020991$$
$$\delta\nu' = 0{,}033169,$$

so vermöge der Formeln

$$f = k' \cdot \frac{\delta v' - \delta v}{\delta v'}$$

$$f' = -k' \cdot \frac{\delta v' - \delta v}{\delta v},$$

ie numerischen Werthe der Brennweiten

$$f = +1{,}835761$$
$$f' = -2{,}900705.$$

Nimmt man nun an, die beiden Gläser besitzen auf beiden Seiten gleiche Krümmung, so ist

$$r = \varrho = 2f.(n-1)$$
$$r' = \varrho' = 2f'.(n'-1),$$

olglich die Zahlenwerthe der Krümmungshalbmesser

$$r = \varrho = +1{,}891428$$
$$r' = \varrho' = -3{,}491114.$$

Nach §. 385. erhält man die Dicke des Glases, wenn beide Krümmungshalbmesser einander gleich sind,

$$c = 4r.\sin \tfrac{1}{2}\theta^2,$$

nd nimmt man $\theta = 6^0$ an, so wird die Dicke des rsten convexen Glases $c = 0{,}020732$ *); die Dicke des oncaven Glases ist willkürlich, und wir wollen dieselbe = 0,010366 setzen. Da die Krümmung des convexen Glases stärker, als die des concaven ist, so darf man beide Gläser in der Mitte aneinander gelegt denken, so dafs also der Abstand der Vorderfläche des zweiten von der Hinterfläche des ersten Null wird.

§. 465.

Um nun zu sehen, wie weit diese genäherten Formeln von den genauen, wo die Dicke des Glases mit berücksichtigt wird, abweichen, nehmen wir die Glei-

*) Der hier angegebene Werth von c ist nicht ganz richtig, gehörig berechnet findet sich $c = 0.020723$, da die Differenz so gering ist, so hat man für unnöthig gehalten, den wahren Werth in die folgenden Rechnungen einzuführen, um so mehr, da durch eine Aenderung von $\theta = 6^0$ in $\theta = 6^0\,4''$ der im Texte angegebene Werth von c hervorgeht. G.

chung für k aus §. 379. für Strahlen, welche unendlic
nahe bei der Axe auffallen. Man hat daselbst

$$k = \frac{hnr\varrho - c\varrho.(h.(n-1) - r)}{h.(r+\varrho).n.(n-1) - nr\varrho - c.(n-1).(h.(n-1) -}$$

Setzt man hierin zuerst $h = \infty$, so wird

$$k = \frac{nr\varrho - c\varrho.(n-1)}{(r+\varrho).n.(n-1) - c.(n-1)^2},$$

und da aufserdem $r = \varrho$ angenommen wurde, so blei
für ein auf beiden Seiten gleichgekrümmtes convexes Gl

$$k = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{nr - c.(n-1)}{2n - \frac{c}{r} \cdot (n-1)},$$

oder, wenn man statt r seinen Werth $2f.(n-1)$ set

$$k = \frac{2nf - c}{2n - \frac{c}{2f}}.$$

Man hat nun aber

$$f = + 1{,}835761,$$

und für die mittlern Strahlen das Brechungsverhältni
im Kronglas

$$n = 1{,}515162$$
$$2nf - c = 5{,}542217$$
$$\log(2nf - c) = 0{,}7436835$$
$$2n - \frac{c}{2f} = 3{,}024677$$
$$\log\left(2n - \frac{c}{2f}\right) = 0{,}4806790$$
$$\log k = 0{,}2630045$$
$$k = 1{,}832334.$$

Für die violetten Strahlen ist

$$n = 1{,}525976,$$

und wenn man sich in diesem Fall der Gleichung

$$k = \frac{1}{n-1} \cdot \frac{nr - c.(n-1)}{2n - \frac{c}{r} \cdot (n-1)}$$

bedient, und aufser dem angegebenen Werth von n

$$r = 1{,}891428$$
$$c = 0{,}020732$$

so erhält man

$$nr - c.(n-1) = 2{,}875368$$
$$2n - \frac{c}{r}.(n-1) = 3{,}046187$$
$$k = 1{,}794617.$$

sieht, dafs die beiden Werthe von k für die mitt- ınd für die violetten Strahlen ziemlich von einander chen, wenn man ihren Weg blofs durch ein Glas len angegebenen Dimensionen sucht. Der Unter- l beider Werthe von k beträgt nämlich 0,037717, es die Längenabweichung wegen der Farbenzer- ıng seyn würde, und wobei, wie in allen vorigen ıungen, der Fufs als Einheit betrachtet wurde. der abgekürzten Formel $\delta k = f\delta\nu$ würde man ingenabweichung = 0,038535, also nur um 0,000818 :r erhalten haben.

§. 466.

Diese für die mittlern und violetten Strahlen ge- nen Werthe von k geben den Abstand der cor- ıdirenden Farbenbilder von der hintern Seite des rn Glases an. Diese Bilder können nun freilich nicht ch zur Darstellung kommen, weil das hinter dem xen Glase liegende concave Glas die Strahlen so- ı wieder bricht. Allein zur Berechnung der Ent- ıg der Bilder hinter dem zweiten Glase sind diese he zu wissen nothwendig. Nimmt man nämlich Gleichung

$$k = \frac{hnr\varrho - c\varrho.(h.(n-1) - r)}{k.(r+\varrho).(n-1).n - nr\varrho - c.(n-1).(h.(n-1) - r)},$$

setzt in derselben $-k$, n', $-r'$, c' statt h, n, r ϱ, c, so wird

$$-k = \frac{kn'r' + c'.(k.(n'-1) - r')}{2kn'.(n'-1) - n'r' + \frac{c'}{r'}.(n'-1).(k.(n'-1) - r')},$$

dieser Werth von k' giebt dann die Abstände der hiedenen Bilder vom zweiten Glase. Man hat für nittlern Strahlen

$$k = 1{,}832334$$
$$n' = 1{,}601770$$
$$r' = 3{,}491114$$
$$c' = 0{,}010366,$$

und hieraus ergiebt sich

$$kn'r' = 10{,}246343$$
$$n'r' = 5{,}591961$$
$$2kn'.(n' - 1) = 3{,}532363$$
$$c'.(k.(n' - 1) - r') = -0{,}024759$$
$$\frac{c'}{r'}.(n' - 1).(k.(n' - 1) - r') = -0{,}004268$$
$$k' = +4{,}952638.$$

Für die violetten Strahlen finden folgende Werthe Statt:

$$k = 1{,}794617$$
$$n' = 1{,}621730$$
$$r' = 3{,}491114$$
$$c' = 0{,}010366,$$

und man findet hieraus

$$kn'r' = 10{,}160477$$
$$n'r' = 5{,}661643$$
$$2kn'.(n' - 1) = 3{,}618945$$
$$c'.(k.(n' - 1) - r') = -0{,}024622$$
$$\frac{c'}{r'}.(n' - 1).(k.(n' - 1) - r') = -0{,}004385$$
$$k' = +4{,}951367.$$

Diese beiden Werthe von k' für die mittlern und violet ten Strahlen weichen nur sehr wenig von einander ab der ganze Unterschied beträgt 0,001267 Fufs, d. noch nicht den fünften Theil einer Linie, um welch Gröfse der Sammlungspunkt der violetten Strahlen de Glase näher liegt, als der der mittlern Strahlen, u es ist hieraus einleuchtend, dafs, trotz der Vernac lässigung der Dicke der Gläser und aller Potenzen d Zerstreuungsverhältnisse, die genäherten Formeln zie lich genaue Resultate geben.

Da in dem Fall, wo die mittlern und äufserst violetten oder äufsersten rothen Strahlen in einem Pun vereinigt werden, auch die übrigen Strahlen sich äufse

he in demselben Punkt schneiden, so entsteht daselbst n farbloses Bild, und man nennt eine so zusammensetzte Glaslinse, die dies hervorzubringen im Stande t, eine achromatische Glaslinse.

§. 467.

Was die Winkelabweichung betrifft, so haben wir eselbe in §. 460. für ein Glas $= \frac{t}{f} \cdot \delta v$ gefunden. is §. 404. hat man ferner, wenn t die Entfernung n der Axe bedeutet, in welcher ein Strahl auffällt, d t', t'', t''' dieselben Gröfsen für die folgenden läser angeben, wenn man die abwechselnden Vorichen unberücksichtigt läfst,

$$t' = \frac{h'}{k} \cdot t;$$

$$t'' = \frac{h'h''}{k'k} \cdot t;$$

$$t''' = \frac{h'h''h'''}{kk'k''} \cdot t;$$

s. w. Nennt man nun die Winkel, unter welchen der rahl die Axe schneidet, φ'', $\varphi_{,}''$, $\varphi_{,,}''$ ...., so hat man

$$t' = h'\varphi'', \quad t'' = h''\varphi_{,}'', \quad t''' = h'''\varphi_{,,}''$$

s. w., also kann man die obigen Gleichungen auch schreiben:

$$\varphi'' = \frac{t}{k}$$

$$\varphi_{,}'' = \frac{h'}{k'} \cdot \frac{t}{k}$$

$$\varphi_{,,}'' = \frac{h'h''}{k'k''} \cdot \frac{t}{k},$$

man das Gesetz der Fortschreitung für eine bebige Anzahl von Gläsern sogleich übersieht. Dafs die läser hinter dem ersten eine hinreichende Oeffnung ben, um die Strahlen durchzulassen, wird hierbei thwendig vorausgesetzt.

Die erste Gleichung giebt, durch Differentiation,

$$\delta\varphi'' = -\frac{t\delta k}{kk},$$

oder da

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{\delta k}{kk} = \frac{\delta f}{ff} = -\frac{\delta\nu}{f} \text{ (§. 461.)},$$

so folgt hieraus die schon entwickelte Formel der Winkelabweichung durch ein einzelnes Glas

$$\delta\varphi'' = \frac{t}{f}\cdot\delta\nu.$$

§. 468.

Nimmt man den Ausdruck für zwei Gläser

$$\varphi_{,}'' = \frac{h'}{k'}\cdot\frac{t}{k},$$

so wird auch, wenn man sich der Logarithmen bedient, und den logarithmischen Ausdruck nach dem Zeichen δ differentiirt,

$$\frac{\delta\varphi_{,}''}{\varphi_{,}''} = \frac{\delta h'}{h'} - \frac{\delta k'}{k'} - \frac{\delta k}{k}.$$

Nun ist aber auch, nach §. 461.,

$$\frac{\delta k}{kk} = -\frac{\delta\nu}{f}$$

$$\frac{\delta h'}{h'h'} + \frac{\delta k'}{k'k'} = -\frac{\delta\nu'}{f'}$$

$$\delta k + \delta h' = o.$$

und hieraus ergiebt sich

$$\frac{\delta k}{k} = -\frac{k\delta\nu}{f},\quad \frac{\delta h'}{h'} = +\frac{kk\delta\nu}{fh'}$$

$$\frac{\delta k'}{k'} = -\frac{k'\delta\nu'}{f'} - \frac{k'kk\delta\nu}{fh'h'},$$

also, wenn man diese Werthe in obige Gleichung substituirt,

$$\frac{\delta\varphi_{,}''}{\varphi_{,}''} = \frac{kk\delta\nu}{fh'} + \frac{k'\delta\nu'}{f'} + \frac{k'kk}{fh'h'}\cdot\delta\nu + \frac{k\delta\nu}{f}$$

$$= \frac{k\delta\nu}{f}\cdot\left(1 + \frac{k}{h'} + \frac{kk'}{h'k}\right) + \frac{k'\delta\nu'}{f'}$$

$$\delta\varphi_{,}'' = \frac{th'\delta\nu}{fk'}\cdot\left(1 + \frac{k}{h'} + \frac{kk'}{h'k}\right) + \frac{th'}{f'k}\cdot\delta\nu'.$$

ei der Winkelabweichung vorzüglich der Fall zu chten ist, in welchem die ausfahrenden mittlern len der Axe parallel sind, wie dies z. B. bei den rgläsern der Fernröhre geschieht, d. h. dafs das hinter dem letzten Glase unendlich entfernt liegt, tzen wir in voriger Gleichung die Gröfse $k' = \infty$, es bleibt

$$\delta\varphi_{,}'' = \frac{k}{h'}\cdot\frac{t}{f}\cdot\delta\nu + \frac{h'}{k}\cdot\frac{t}{f'}\cdot\delta\nu$$

$$= \frac{tk}{h'}\cdot\left[\frac{\delta\nu}{f} + \frac{h'h'}{kk}\cdot\frac{\delta\nu'}{f'}\right].$$

§. 469.

Um die Winkelabweichung durch drei Gläser zu ten, haben wir die Gleichung (§. 467.)

$$\varphi_{,,}'' = \frac{h'h''}{k'k''}\cdot\frac{t}{k},$$

auch

$$\varphi_{,,}'' = \frac{h''}{k''}\cdot\varphi_{,}''.$$

aus ergiebt sich, durch Differentiation nach dem hen δ,

$$\delta\varphi_{,,}'' = \varphi_{,}''\cdot\left(\frac{\delta h''}{k''} - \frac{h''\delta k''}{k''k''}\right) + \delta\varphi_{,}''\cdot\frac{h''}{k''}.$$

hränken wir uns wieder auf den Fall, wo die hlen durch das letzte Glas mit der Axe parallel ehen, so können wir das in $\delta\varphi_{,}''$ multiplicirte Glied

sogleich weglassen, da selbiges auf jeden Fall, wegen des Divisors $k'' = \infty$, Null wird. Es bleibt also

$$\delta\varphi_{,}'' = \varphi_{,}'' \cdot \left(\frac{\delta h''}{k''} - \frac{h''\delta k''}{k''k''}\right).$$

Vermöge der Gleichung

$$\frac{1}{h''} + \frac{1}{k''} = \frac{1}{f''}$$

haben wir aber

$$\frac{\delta h''}{h''h''} + \frac{\delta k''}{k''k''} = \frac{\delta f'}{f''f''} = -\frac{\delta\nu''}{f''},$$

also, wenn man das Glied $\frac{h''\delta k''}{k''k''}$ aus voriger Gleichung eliminirt,

$$\delta\varphi_{,}'' = \varphi_{,}'' \cdot \left[\frac{\delta h''}{k''} + \frac{\delta h''}{h''} + \frac{h''\delta\nu''}{f''}\right].$$

Es ist aber auch

$$\frac{\delta h''}{k''} + \frac{\delta h''}{h''} = \frac{\delta h''}{f''},$$

folglich

$$\delta\varphi_{,}'' = \frac{\varphi_{,}''}{f''} \cdot (\delta h'' + h''\delta\nu'').$$

Es kommt jetzt blofs darauf an, die Gröfse $\delta h''$ zu eliminiren. Hierzu haben wir die Gleichungen

$$k + h' = l, \quad k' + h'' = l'$$

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{h} = \frac{1}{f}, \quad \frac{1}{k'} + \frac{1}{h'} = \frac{1}{f'}.$$

Diese geben differentiirt

$$\delta k + \delta h' = o, \quad \delta k' + \delta h'' = o$$

$$\frac{\delta k}{kk} = -\frac{\delta\nu}{f}, \quad \frac{\delta k'}{k'k'} + \frac{\delta h'}{h'h'} = -\frac{\delta\nu'}{f'}.$$

Man findet hieraus

$$\delta h'' = \frac{\delta\nu'}{f'} \cdot k'k' + \frac{\delta\nu}{f} \cdot \frac{k'k'}{h'h'} \cdot kk$$

$$\delta\varphi_{,}'' = \varphi_{,}''h'' \cdot \left[\frac{\delta\nu''}{f''} + \frac{\delta\nu'}{f'} \cdot \frac{k'k'}{h''f''} + \frac{\delta\nu}{f} \cdot \frac{k'k'}{h'h'} \cdot \frac{kk}{h''f''}\right].$$

Da nun aber für $k'' = \infty$, $f'' = h''$ wird, so läfst sich dieser Ausdruck auch so schreiben:

$$\delta\varphi_{,,}'' = \varphi_{,}''h''.\left[\frac{\delta\nu''}{f'''} + \frac{\delta\nu'}{f''}.\frac{k'k'}{h''h''} + \frac{\delta\nu}{f'}.\frac{k'k'}{h''h''}.\frac{kk}{h'h'}\right],$$

oder, wenn man den Coefficienten von $\frac{\delta\nu}{f}$ absondert,

$$\delta\varphi_{,,}'' = \varphi_{,}''h''.\left[\frac{\delta\nu}{f} + \frac{\delta\nu'}{f''}.\frac{h'h'}{kk} + \frac{\delta\nu''}{f'''}.\frac{h'h'}{kk}.\frac{h''h''}{k'k'}\right].\frac{k'k'}{h''h''}.\frac{kk}{h'h'}.$$

Setzt man ferner statt $\varphi_{,}''$ seinen Werth

$$\varphi_{,}'' = \frac{h'}{k'}.\frac{t}{k},$$

so bleibt die Gleichung

$$\delta\varphi_{,,}'' = \frac{kk'}{h'h''}.t.\left[\frac{\delta\nu}{f} + \frac{\delta\nu'}{f'}.\frac{h'h'}{kk} + \frac{\delta\nu''}{f''}.\frac{h'h'}{kk}.\frac{h''h''}{k'k'}\right].$$

§. 470.

Aus den Formeln, welche die Winkelabweichung für zwei und drei Glaslinsen angeben, sieht man leicht, wie dieselbe bei einer noch gröfsern Anzahl beschaffen seyn wird, vorausgesetzt, dafs die Strahlen von mittlerer Brechbarkeit aus dem letzten Glase parallel ausgehen. Für vier Gläser wird

$$\delta\varphi_{,,,}'' = \frac{kk'k''}{h'h''h'''}.t.\left\{\begin{array}{l}\frac{\delta\nu}{f} + \frac{\delta\nu'}{f'}.\frac{h'h'}{kk} \\ + \frac{\delta\nu''}{f''}.\frac{h'h'}{kk}.\frac{h''h''}{k'k'} \\ + \frac{\delta\nu'''}{f'''}.\frac{h'h'}{kk}.\frac{h''h''}{k'k'}.\frac{h'''h'''}{k''k''}\end{array}\right\}$$

u. s. w. Die Längenabweichungen lassen sich auch so schreiben:

$$\delta k' = -\frac{kk}{h'h'}.k'k'.\left[\frac{\delta\nu}{f} + \frac{\delta\nu'}{f'}.\frac{h'h'}{kk}\right]$$

$$\delta k'' = -\frac{kk}{h'h'}.\frac{k'k'}{h''h''}.k''k''.\left\{\begin{array}{l}\frac{\delta\nu}{f} + \frac{\delta\nu'}{f'}.\frac{h'h'}{kk} \\ + \frac{\delta\nu''}{f'''}.\frac{h'h'}{kk}.\frac{h''h''}{k'k'}\end{array}\right\}$$

u. s. w. fort, und vergleicht man diese Ausdrücke mit denen der Winkelabweichungen, so erhält man sogleich

$$\delta\varphi'' = -\delta k \cdot \frac{t}{kk}$$

$$\delta\varphi_{,}'' = -\delta k' \cdot \frac{k't}{k} \cdot \frac{1}{k'k'}$$

$$\delta\varphi_{,,}'' = -\delta k'' \cdot \frac{k'k''}{kk'} \cdot \frac{t}{k''k''}$$

u. s. w. fort. Das hierbei Statt findende Gesetz ist leicht zu übersehen.

§. 471.

Für die stärker brechenden Strahlen sind die Größen $\delta\nu$, $\delta\nu'$, $\delta\nu''$.... positiv, und wenn zugleich die Brennweiten f, f', f''.... aller Gläser positiv sind, so wird ebenfalls die Winkelabweichung positiv. In diesem Fall bilden also die gebrochenen Strahlen, welche eine stärkere Brechbarkeit besitzen, als die mittlern, einen größern Winkel mit der Axe, und schneiden daher die Axe hinter dem letztern Glase unter einem Winkel, der der Winkelabweichung selbst gleich kommt, während die rothen die Axe unter demselben Winkel vor dem Glase schneiden. Bezeichnen wir nun die Entfernung, in welcher die Axe hinter dem Glase von den violetten Strahlen geschnitten wird, durch K, die Oeffnung des Glases, welches wir für das $n$te annehmen, durch $t^{(n-1)}$, die Winkelabweichung durch $\delta\varphi''(n-1)$, so hat man die Gleichung

$$K = t^{(n-1)} \cdot \cot \delta\varphi''_{(n-1)},$$

oder, da wir statt der Cotangente eines so kleinen Winkels das Umgekehrte des Winkels selbst setzen können,

$$K = \frac{t^{(n-1)}}{\delta\varphi''_{(n-1)}}.$$

Nun wird aber allgemein

$$\delta\varphi''_{(n-1)} = \frac{k \cdot k' \cdot k'' \cdot k''' \ldots\ldots k^{(n-2)}}{k' \cdot k'' \cdot k''' \cdot k^{IV} \ldots\ldots k^{(n-1)}} \cdot t \cdot P,$$

wo man leicht sieht, was der Factor P bedeutet, und

dem hat man §. 404., ohne Berücksichtigung des ichens,

$$t^{(n-1)} = \frac{h' . h'' . h''' \ldots\ldots h^{(n-1)}}{k . k' . k'' \ldots\ldots k^{(n-2)}} \cdot t.$$

ituirt man diese Werthe in vorige Gleichung, so t

$$\frac{1}{K} = \left(\frac{k . k' . k'' \ldots\ldots k^{(n-2)}}{h' . h'' . h''' \ldots\ldots h^{(n-1)}}\right)^2 . P.$$

Gröfse $\frac{1}{K}$ pflegt man gewöhnlich als das Maafs Undeutlichkeit wegen der Farbenzerstreuung an- en. Für ein Glas hat man

$$\frac{1}{K} = \frac{\delta v}{f}.$$

wei Gläser kommt

$$\frac{1}{K} = \frac{kk}{h'h'} \cdot \left(\frac{\delta v}{f} + \frac{\delta v'}{f'} \cdot \frac{h'h'}{kk}\right).$$

§. 472.

ei den ältern Fernröhren, wo man die Anwendung iedener Glasarten von ungleicher Zerstreuungs- noch nicht kannte, mufste diese Winkelabweichung erschieden gefärbten Strahlen nothwendigerweise Undeutlichkeit hervorbringen, und um für ver- ene Fernröhre bei gleicher Deutlichkeit bestimmte öfserungen zu erhalten, mufsten die Brennweiten bjectivgläser in einem bestimmten Verhältnisse zu ler stehen. Nehmen wir z. B. zwei Gläser, aus das Fernrohr bestehen soll, und sind die Glas- aus derselben Glasart gemacht, wodurch $n = n'$, $\delta n'$, also auch $\delta v = dv'$ wird, so hat man das der Undeutlichkeit

$$\frac{1}{K} = \frac{kk}{h'h'} \cdot \delta v \cdot \left[\frac{1}{f} + \frac{1}{f'} \cdot \frac{h'h'}{kk}\right].$$

e durch Fernröhre betrachteten Gegenstände ge- ch eine sehr grofse Entfernung haben, so ist

$k = f$, und da ferner, wenn die mittleren Strahlen parallel ausfahren sollen, die Brennpunkte beider Gläser zusammenfallen müssen, so wird $h' = f'$, also

$$\frac{1}{K} = \frac{ff}{f'f'} \cdot \delta\nu \cdot \left[\frac{1}{f} + \frac{f'}{ff}\right]$$
$$= \delta\nu \cdot \left[\frac{f}{f'f'} + \frac{1}{f'}\right].$$

Die Vergrößerung m wird bei einer solchen Zusammensetzung von Gläsern, wenn das Auge vermittelst paralleler Strahlen deutlich sieht, $m = \frac{f}{f'}$, also $f' = \frac{f}{m}$, und substituirt man diesen Werth in vorige Gleichung, so ist

$$\frac{1}{K} = \delta\nu \cdot \left[\frac{mm}{f} + \frac{m}{f}\right] = \delta\nu \cdot \frac{m.(m+1)}{f}.$$

Nach Huyghens's Angabe ist zu einer 109maligen Vergrößerung ein einfaches Glas von 30 Fuß Brennweite erforderlich, und nehmen wir an, die gebrauchte Glasart habe dasselbe Zerstreuungsverhältniß als Kronglas, so ist

$$m = 109, \quad f = 30, \quad \delta\nu = 0{,}021,$$

folglich das Maaß der Undeutlichkeit, welches bei solchen Fernröhren nicht überschritten werden darf,

$$\frac{1}{K} = \frac{109.110}{30} \cdot 0{,}021 = 8{,}4.$$

Will man also ein anderes Fernrohr von derselben Glasart verfertigen, dessen Vergrößerung $= M$, und wo das Objectiv die Brennweite $= F$ hat, so muß

$$\frac{m.(m+1)}{f} = \frac{M.(M+1)}{F}$$

seyn, oder wenn die Vergrößerungen stark sind, so hat man kürzer

$$f : F = mm : MM,$$

d. h. die Brennweiten müssen sich bei gleicher Deutlichkeit wie die Quadrate der Vergrößerungen verhalten.

der Abweichung der Strahlen wegen der Kugelgestalt der Gläser.

§. 473.

achdem wir im vorigen Abschnitt gezeigt haben, egen der verschiedenen Brechbarkeit der einzelnen ıstrahlen, die das weifse Licht enthält, nicht alle :n, selbst wenn sie unendlich nahe bei der Axe lases auffallen, in einem Punkt vereinigt werden, n jede Farbe ihren eigenen Sammlungspunkt be- ist uns noch übrig die Abweichung zu unter- , welche für diejenigen Strahlen Statt findet, die er bestimmten Entfernung von der Axe auffallen, ie man allgemein die Abweichung wegen der gestalt nennt. Bedeutet $\varkappa$ die Sammlungsweite rahlen, welche unendlich nahe bei der Axe auf- und k die Sammlungsweite derjenigen, welche em Punkt des Glases auftreffen, wo der Halb- der Krümmung einen Winkel $= \theta$ mit der Axe , so hatten wir in §. 380. den Ausdruck

$$k = \varkappa - \lambda . \sin \theta^2,$$

wir uns auf die zweite Potenz des Sinus be- ken. Die Gröfse $\lambda . \sin \theta^2$ ist das, was man die nabweichung wegen der Kugelgestalt nennt, und bei den gewöhnlichen Dimensionen der Gläser, rgleich zur Längenabweichung wegen der Zer- ng der Farben, nur sehr klein. Bezeichnen wir e durch q, und setzen wir die Entfernung von xe, in welcher der Strahl auffällt, wie früher, so ist

$$\sin \theta = \frac{t}{r}, \quad q = \frac{\lambda}{rr} \cdot tt.$$

erhält man folgenden Ausdruck:

$$k' = \frac{pz \cdot (p - c)}{pp - c \cdot (p - zn)}.$$

e beiden ersten Glieder des Ausdrucks von q lassen
h auch so schreiben:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{nntt}{(n-1)^2 \cdot pph^3 z} \cdot \left\{ \begin{array}{l} pp \cdot (h^3 + z^3) \\ + 2pzh \cdot (zz - hh) \\ + z^2h^2 \cdot (h + z) \end{array} \right\}$$

nnt man nun die Brennweite des Glases f, so dafs

$$\frac{h + z}{hz} = \frac{1}{f},$$

l bedenkt, dafs jedes Glied, was in der Parenthese
h befindet, den Factor $h + z$ in sich schliefst, so
d auch dieser Ausdruck

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{nnttzz}{(n-1)^2 \cdot f} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{hh} - \frac{1}{hz} + \frac{1}{zz} \\ + \frac{2}{p} \cdot \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{z}\right) + \frac{1}{pp} \end{array} \right\}$$

erzu kommen auch die beiden folgenden Glieder,
che sich so schreiben lassen:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{nzztt}{(n-1)^2 \cdot f} \cdot \left[\frac{1}{p} \cdot \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{z}\right) + \frac{2}{pp} \right],$$

glich wird der ganze Ausdruck von q

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{nzztt}{(n-1)^2 \cdot f} \cdot \left\{ \begin{array}{l} n \cdot \left(\frac{1}{zz} - \frac{1}{hz} + \frac{1}{hh}\right) \\ - \frac{2n+1}{p} \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{h}\right) \\ + \frac{n+2}{pp}. \end{array} \right\}$$

§. 476.

Differentiirt man diesen Ausdruck, indem p und q veränderlich betrachtet werden, so erhält man

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{nzztt}{(n-1)^2 \cdot f} \cdot \left[\frac{(2n+1)}{pp} \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{h}\right) - \frac{2n+4}{p^3} \right],$$

und setzt man dieses Differentialverhältnifs = Null, so m

$$(2n+1).p.\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{h}\right)=2n+4$$

werden. Hieraus ergiebt sich der Werth von

$$p=\frac{2.(n+2)}{2n+1}.\frac{xh}{h-x}$$

$$\frac{1}{p}=\frac{2n+1}{2n+4}.\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{h}\right).$$

Differentiirt man den Differentialcoefficienten $\frac{dq}{dp}$ noc mals, so kommt der veränderliche Theil desselben

$$=-2.\frac{2n+1}{p^3}.\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{h}\right)+3.\frac{2n+4}{p^4},$$

und wenn man hierin den so eben gefundenen We von $\frac{1}{p}$ substituirt, so kommt

$$-2.\frac{(2n+1)^4}{(2n+4)^3}.\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{h}\right)^4+3.\frac{(2n+1)^4}{(2n+4)^3}.\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{h}\right.$$

$$=\frac{(2n+1)^4}{(2n+4)^3}.\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{h}\right)^4.$$

Dieser zweite Differentialcoefficient ist in allen Fäl positiv, folglich ist p derjenige Werth, welcher q einem Minimum macht. Substituirt man diesen We von p in die allgemeine Gleichung

$$q=\frac{1}{2}.\frac{nxxtt}{(n-1)^2.f}.\left\{\begin{array}{l}n.\left(\frac{1}{xx}-\frac{1}{hx}+\frac{1}{hh}\right)\\-\frac{2n+1}{p}.\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{h}\right)\\+\frac{n+2}{pp}\end{array}\right\}$$

so erhält man den Ausdruck von q

$$q=\frac{1}{2}.\frac{nxxtt}{(n-1)^2.f}.\left\{\begin{array}{l}n.\left(\frac{1}{xx}-\frac{1}{hx}+\frac{1}{hh}\right)\\-\frac{1}{2}.\frac{(2n+1)^2}{2n+4}.\left(\frac{1}{x}-\right.\end{array}\right.$$

$$\frac{nxxtt}{(n-1)^2.(n+2).f}\left[(4n-1)\left(\frac{1}{xx}+\frac{1}{hh}\right)+2.(2nn+1).\frac{1}{xh}\right].$$

Werth von q giebt den kleinsten Werth der Abung wegen der Kugelgestalt für ein Glas von beter Brennweite.

§. 477.

Nehmen wir z. B. an, die Brennweite des Glases 8 Fufs betragen, so kann man bekanntlich die mungen der Gläser r, ϱ auf sehr verschiedene wählen, wenn nur der Gleichung

$$f = \frac{r\varrho}{(n-1).(r+\varrho)} = 8,$$

ttelst dieser Werthe von r und ϱ Genüge geleistet Allein die verschiedene Annahme dieser Gröfse auch immer eine verschiedene Längenabweichung, durch die im vorigen Paragraph entwickelten Forwird man diejenigen Werthe von r und ϱ finden, ge deren die Längenabweichung am kleinsten wird. t nämlich

$$p = \frac{2.(n+2)}{2n+1}.\frac{xh}{h-x},$$

wenn $x = 8$ werden soll, so mufs $h = \infty$ seyn. leibt also

$$p = \frac{2.(n+2)}{2n+1}.x.$$

n wir das Brechungsverhältnifs des Glases $n = \frac{3}{2}$, ommt

$$p = 14 \text{ Fufs.}$$

§. 383. hat man zwischen p, r, h, n die Gleichung

$$r = \frac{ph.(n-1)}{hn+p},$$

wenn wir $h = \infty$ setzen,

$$r = \frac{p.(n-1)}{n} = \frac{14}{3} \text{ Fufs.}$$

Werth von ϱ ergiebt sich dann, aus der obigen chung,

$$\frac{r\varrho}{(n-1).(r+\varrho)} = 8,$$

aus welcher sich $\varrho = 28$ findet. Für einen unendlich entfernten Gegenstand wird die kleinste Längenabweichung

$$q = \frac{1}{8} \cdot \frac{n.(4n-1).tt}{(n-1)^2.(n+2).f} = \frac{15}{14} \cdot \frac{tt}{f},$$

wenn wir das Brechungsverhältnifs $n = \frac{3}{2}$ setzen.

Nimmt man statt r, 5 Fufs, während die Brennweite f, wie früher, 8 Fufs bleibt, so ergiebt sich aus der Formel (§. 383.)

$$p = \frac{hnr}{h.(n-1) - r}$$

für den angegebenen Werth von r und für $h = \infty$, $p = 15$. Die für q gegebene Gleichung §. 475. wird für den Fall, dafs $h = \infty$,

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{nftt}{(n-1)^2} \cdot \left(\frac{n}{ff} - \frac{2n+1}{pf} + \frac{n+2}{pp}\right),$$

und wenn man hierin die angegebenen Zahlenwerthe $n = \frac{3}{2}$, $f = 8$, $p = 15$ substituirt, so erhält man

$$q = \frac{163}{1200} \cdot tt = 0{,}1358 \,.\, tt,$$

während die möglichst kleinste Längenabweichung durch

$$q = \frac{15}{14} \cdot \frac{tt}{f} = \frac{15}{112} \cdot tt = 0{,}1339 \,.\, tt$$

ausgedrückt wird.

§. 478.

Setzt man den Factor in der Parenthese des Werthes von q für $h = \infty$ Null, so erhält man

$$\frac{pp}{ff} - \frac{p}{f} \cdot \frac{2n+1}{n} + \frac{n+2}{n} = o,$$

und aus dieser quadratischen Gleichung folgt

$$\frac{p}{f} = \frac{2n+1}{2n} \pm \frac{\sqrt{1-4n}}{2n},$$

welcher Ausdruck in allen Fällen unmöglich ist, und man sieht hieraus, dafs man kein Glas anfertigen kann,

urch bei unendlich entfernten Gegenständen die genabweichung wegen der Kugelgestalt aufgehoben l. Bei andern Entfernungen ist dies jedoch möglich. n setzt man den allgemeinen Ausdruck von q (§. 475.) ch Null, so kommt

$$n.\left(\frac{1}{xz}-\frac{1}{xh}+\frac{1}{hh}\right)$$
$$-\frac{2n+1}{p}.\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{h}\right)+\frac{n+2}{pp}=0,$$

aus dieser quadratischen Gleichung ergiebt sich

$$\frac{1}{p}=\frac{2n+1}{2n+4}.\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{h}\right)$$
$$\sqrt{-\frac{4n-1}{4.(n+2)^2}.\left(\frac{1}{xz}+\frac{1}{hh}\right)-\frac{2nn+1}{2.(n+2)^2}.\frac{1}{xh}}$$

lange h und x gleiche Zeichen haben, d. h. sobald Object und das Bild auf verschiedenen Seiten der linse liegen, ist die Gröfse unter dem Wurzelzeichen ner negativ, also sind in diesem Falle die Werthe p unmöglich. Es mufs daher x negativ werden, l bezeichnen wir diesen Werth durch $-x'$, so wird

$$\frac{(4nn+2)}{x'h}-(4n-1).\left(\frac{1}{x'x'}+\frac{1}{hh}\right)>0$$

n müssen, wenn p einen reellen Werth erhalten soll. eraus ergiebt sich

$$\frac{h^2}{x'^2}-\frac{4nn+2}{4n-1}.\frac{h}{x'}<-1$$
$$\frac{h}{x'}<\frac{2nn+4}{4n-1}\pm\frac{2.\sqrt{n^4-3nn+2n}}{4n-1}.$$

mmt man für Glas $n=\frac{3}{2}$, so erhält man

$$\frac{h}{x'}<\frac{11+\sqrt{21}}{10}$$
$$\frac{h}{x'}>\frac{11-\sqrt{21}}{10},$$

l da bekanntlich aus dem Ausdruck $\frac{h}{x'}<\mu$ umge-

kehrt $\frac{z'}{h} > \mu$ folgt, so hat man durch Umkehrung

$$\frac{z'}{h} > \frac{10}{11 + \sqrt{21}} > \frac{11 - \sqrt{21}}{10} > 0{,}6417$$

$$\frac{z'}{h} < \frac{10}{11 - \sqrt{21}} < \frac{11 + \sqrt{21}}{10} < 1{,}5583.$$

Man sieht also, wie eng die Grenzen sind, innerhalb deren die Längenabweichung aufgehoben werden kann. Da nun, wenn f die Brennweite des Glases bedeutet,

$$\frac{1}{h} - \frac{1}{z'} = \frac{1}{f}, \quad \frac{z'}{h} = \frac{f}{f - h},$$

so folgt hieraus, dafs

$$\frac{f}{f - h} > 0{,}6417$$

$$\frac{f}{f - h} < 1{,}5583.$$

Man sieht übrigens aus der angegebenen Bedingung für die Möglichkeit der Aufhebung der Längenabweichung wegen der Kugelgestalt zwischen gewissen Grenzen, dafs die Glaslinse entweder eine concave seyn mufs, oder ist sie convex, so wird erforderlich seyn, dafs sich das Object näher am Glase befinde, als die Brennweite desselben beträgt, damit das Bild vor das Glas falle.

§. 479.

Befindet sich das Object im Brennpunkte selbst, so gehen die Strahlen, welche unendlich nahe bei der Axe auffallen, mit der Axe selbst parallel aus, es wird also für $h = f$, $z = \infty$, und dann läfst sich der Ausdruck von q, welchen wir §. 475. entwickelt haben, nicht mehr brauchen, weil er durch den Factor zz unendlich grofs wird, wenn auch das Resultat $q = \infty$, welches die Rechnung für diesen Fall giebt, an sich ganz richtig ist. Denn die Längenabweichung ist der Unterschied der Entfernungen, in welcher die Strahlen, welche unendlich nahe bei der Axe auffallen, und die-

nigen, welche in einer endlichen Entfernung von der xe das Glas treffen, die Axe durchschneiden. Befindet ch nun das Object im Brennpunkt, so schneiden die sten Strahlen die Axe in unendlicher, die zweiten in ndlicher Entfernung vom Glase, also ist der Unter- hied immer unendlich.

§. 480.

Für diesen Fall müssen wir den Winkel aufsuchen, nter welchen die in endlicher Entfernung von der Axe ffallenden Strahlen die Axe schneiden. Diesen Winkel aben wir früher durch φ'' bezeichnet, und indem wir ie Werthe der verschiedenen Winkel aufsuchten (§. 380.), o ergab sich bei der Entwickelung bis zur dritten otenz von $\sin\theta$

$$\sin\varphi'' = \delta.\sin\theta - D.\sin\theta^3.$$

er Werth von δ ist nach §. 380.

$$\delta = \frac{(n-1).(r+\varrho)}{\varrho} - \frac{r}{h} - \frac{c.(n-1)}{\varrho}.\frac{(n-1).h-r}{hn},$$

nd substituirt man hierin die Werthe von r, ϱ durch , z, h ausgedrückt (§. 383.), nämlich

$$r = \frac{ph.(n-1)}{p+hn}$$

$$\varrho = \frac{pz.(n-1)}{p-zn},$$

o erhält man

$$\delta = \frac{ph.(n-1)}{(p+hn).z} - \frac{ch.(n-1)}{pz}.\frac{p-zn}{p+hn}.$$

Der Werth von D ist §. 383. entwickelt, und man hat daselbst

$$D = \frac{1}{2}.\frac{(n-1).h^2p.(p-zn)}{(p+hn)^3.z^3}.[z.(h+z)-nh.(p-z)]$$

$$-\frac{1}{2}.\frac{n.(n-1).p.(p+h)}{(p+hn)^3.z}.[h.(h+z)+n.(p+h).z].$$

$$\cos\theta.(\sin\theta' + \sin\theta) + \cos\theta.\sin\theta = 0$$
$$\sin\theta = -\tfrac{1}{2}.\sin\theta'.$$

Hierdurch wird

$$y = \frac{\lambda r}{4z}\cdot\sin\theta'^5,$$

wenn wir auf das negative Vorzeichen keine Rücksicht nehmen. Da nun $\lambda.\sin\theta'^2$ die Längenabweichung $= q$ und $r.\sin\theta' = t$ ist, so kommt auch

$$y = \frac{qt}{4z}.$$

Beschreibt man mit diesem Werth von y als Halbmesser einen Kreis, dessen Mittelpunkt in der Axe liegt, und dessen Fläche senkrecht auf der Axe des Glases steht, so erhält man den kleinsten Abweichungskreis, durch welchen alle auf die Glaslinse fallenden Strahlen gehen müssen. Sein Halbmesser ist viermal so klein, als die Seitenabweichung. Die Gleichung

$$y - r.\sin\theta' = -\frac{r.\sin\theta'}{z - \lambda.\sin\theta'^2}\cdot x$$

läfst sich auch so schreiben:

$$y - t = -\frac{tx}{z - q},$$

und da mit Rücksicht auf das Vorzeichen $y = -\frac{qt}{4z}$, so bestimmt sich x aus der Gleichung

$$x = \left(1 + \frac{q}{4z}\right).(z - q).$$

Berücksichtigen wir also nur die erste Potenz der Längenabweichung q, so ist

$$x = z - \tfrac{3}{4}q.$$

Dieser Werth von x ist die Entfernung, in welcher der kleinste Abweichungskreis vom Glase liegt. Der Halbmesser dieses kleinsten Abweichungskreises kann als das Maafs der Undeutlichkeit einer Zusammensetzung von Gläsern betrachtet werden.

§. 482.

Wenn wir in der Gleichung des Weges eines zwei-
al gebrochenen Strahls

$$y - r.\sin\theta = -\frac{r.\sin\theta}{\varkappa - \lambda.\sin\theta^2}\cdot x$$

n $\theta = \frac{t}{r}$ setzen, so kommt

$$y - t = -\frac{trr}{\varkappa rr - \lambda tt}\cdot x.$$

ie Gleichung der Ebene, in welcher der kleinste Ab-
eichungskreis liegt, ist $x = k - \frac{3}{4}q$. Um daher die
Verthe von y für die Punkte zu finden, in welchen
er Strahl diese Ebene schneidet, müssen wir in der
leichung des Strahls $k - \frac{3}{4}q$ für x substituiren
ieraus folgt

$$y - t = -\frac{trr}{krr - \lambda t^2}\cdot(k - \tfrac{3}{4}q).$$

iese Gleichung ist in Bezug auf t vom dritten Grade;
s wird daher allgemein drei Werthe von t für jeden
Verth von y geben, d. h. jeder Punkt des Abweichungs-
reises erhält von drei Punkten des Glases Lichtstrahlen.
ringt man t auf die andere Seite, und reducirt, so
ird auch

$$y = \frac{\frac{3}{4}qtrr - \lambda t^3}{krr - \lambda t^2}.$$

m Nenner kann man das Glied λt^2 weglassen, da q
elbst schon von derselben Dimension als t^2 ist, so dafs

$$t^3 = \tfrac{3}{4}\cdot\frac{qrr}{\lambda}\cdot t - \frac{ykrr}{\lambda}$$

ird. Bezeichnet man noch den gröfsten Werth von t
urch T, so ist $qrr = \lambda T^2$, also auch

$$t^3 = \tfrac{3}{4}T^2t - \frac{ykrr}{\lambda},$$

nd wenn man den Halbmesser des kleinsten Abwei-
hungskreises $= \sigma$ setzt, so wird

$$\sigma = \frac{qT}{4k} = \frac{qTrr}{4krr} = \frac{\lambda T^3}{4krr}$$

$$\frac{ykrr}{\lambda} = \frac{yT^3}{4\sigma},$$

folglich hierdurch

$$t^3 = \tfrac{3}{4} T^2 t - \frac{\gamma T^5}{4\sigma}.$$

Nimmt man $t = T.\sin\mu$, so läfst sich vorige Gleichung auch so schreiben:

$$\sin\mu^3 = \tfrac{3}{4}.\sin\mu - \frac{\gamma}{4\sigma}.$$

Aus der Auflösung der cubischen Gleichungen mit drei möglichen Wurzeln ist aber bekannt, dafs man nur $\frac{\gamma}{\sigma} = \sin 3\mu$ zu setzen braucht, um den entsprechenden Werth durch $\sin\mu$ zu erhalten, folglich sind die Wurzeln der Gleichung

$$t^3 = \tfrac{3}{4} T^2 t - \frac{\gamma}{4\sigma}$$

$$t = +\ T.\sin\mu$$
$$t = +\ T.\sin(60^0 - \mu)$$
$$t = -\ T.\sin(60^0 + \mu).$$

§. 483.

Aendert sich γ um $d\gamma$, so ändert sich μ um $d\mu = \frac{d\gamma}{3\sigma.\cos 3\mu}$, und die correspondirenden Veränderungen der drei Werthe von t sind:

$$dt = \frac{T d\gamma.\cos\mu}{3\sigma.\cos 3\mu}$$

$$dt = -\frac{T d\gamma.\cos(60^0 - \mu)}{3\sigma.\cos 3\mu}$$

$$dt = -\frac{T d\gamma.\cos(60^0 + \mu)}{3\sigma.\cos 3\mu}.$$

Nun ist die Fläche eines concentrischen Kreisringes, der mit den Halbmessern z und $z + dz$ beschrieben ist $= 2\pi z dz$. Folglich fällt auf den Kreisring des Abweichungskreises, dessen Fläche $2\pi\gamma d\gamma$ ist, Licht von drei Kreisringen der Glaslinsen, deren Flächen durch

$$\frac{\pi T^2}{3\sigma \,.\, \cos 3\mu} \cdot \sin 2\mu \,.\, dy$$

$$\frac{\pi T^2}{3\sigma \,.\, \cos 3\mu} \cdot \sin (120^0 - 2\mu) \,.\, dy$$

$$\frac{\pi T^2}{3\sigma \,.\, \cos 3\mu} \cdot \sin (120^0 + 2\mu) \,.\, dy$$

usgedrückt werden. Nimmt man an, die Dichtigkeit es Lichts, welches auf die Glaslinse fällt, sey $= 1$, so wird die Dichtigkeit des Lichts auf dem Kreisring erhalten, indem man diese drei Flächen addirt, und die Summe durch die Fläche des letzten Ringes dividirt. Es wird also die gesuchte Dichtigkeit

$$= \frac{T^2}{6\sigma\gamma \,.\, \cos 3\mu} \cdot [\sin 2\mu + \sin (120^0 - 2\mu) + \sin (120^0 + 2\mu)]$$

$$= \frac{2T^2}{3\sigma\sigma} \cdot \frac{\sin (60^0 + 2\mu)}{\sin 6\mu}.$$

Uebrigens kann man bemerken, dafs

$$\sin 2\mu + \sin (120^0 + 2\mu) = \sin (120^0 - 2\mu),$$

folglich fällt auf die beiden Kreisringe, die die Entfernungen

$$t = T \,.\, \sin \mu, \quad t = T \,.\, \sin (60^0 - \mu)$$

vom Mittelpunkt des Glases haben, eben so viel Licht, als auf den dritten Kreisring.

§. 484.

Wir haben jetzt noch die Abweichungen wegen der Kugelgestalt zu untersuchen, wenn das Licht durch mehrere hinter einander aufgestellte Gläser geht, die eine gemeinschaftliche Axe besitzen. Es seyen daher zuerst zwei Gläser gegeben AB, $A'B'$ (Fig. 59.); der Sammlungspunkt der Axenstrahlen sey in F, der der Randstrahlen in G, für das erste Glas; der Strahl BG treffe verlängert das zweite Glas in D, so hat man $BGC = CGD$. Der Winkel BGC ist derjenige, unter welchem der Strahl die Axe schneidet, und es ist nach §. 380.

$$\sin BGC = \delta \,.\, \sin \theta - D \,.\, \sin \theta^3.$$

Nennen wir nun, analog mit θ, den Winkel, unter welchem der nach D an die Vorderfläche gezogne Halbmesser gegen die Axe geneigt ist, $\theta_{,}$, so wird, da CGD der Winkel (φ) ist, unter welchem der Strahl von dem als Object dienenden Punkt G ausgeht,

$$\sin CGD = \alpha' . \sin \theta_{,} - A' . \sin \theta_{,}^{3},$$

wo α', A' die Gröfsen für das zweite Glas bedeuten, welche α, A für das erste angeben. Man hat also zwischen θ und $\theta_{,}$ die Relation

$$\delta . \sin \theta - D . \sin \theta^{3} = \alpha' . \sin \theta_{,} - A' . \sin \theta_{,}^{3}.$$

§. 485.

Der Sammlungspunkt der Axenstrahlen hinter dem zweiten Glase liege in F', und der von G herkommende in G', so hat man allgemein für das zweite Glas

$$k = \varkappa - \lambda . \sin \theta_{,}^{2}.$$

Nun sey $CF = h'$, so ist $\varkappa = \varphi(h')$, $\lambda = \psi(h')$, wo φ und ψ Functionszeichen sind, weil beide Gröfsen für ein und dasselbe Glas sich nur mit h' ändern. Der Werth von k drückt also den Abstand desjenigen Punktes hinter dem Glase aus, in welchem die aus F ausgehenden Strahlen, die einen Punkt der Vorderseite des Glases treffen, an welchem das Einfallsloth einen Winkel $= \theta_{,}$ mit der Axe macht, die Axe schneiden. Man erhält also

$$CF' = \varphi(h'),$$

indem $\theta_{,} = o$ gesetzt wird. Da ferner $GF = q$, so wird $CG = (h' + q)$, und für Strahlen, die von G kommen, ist $\varkappa = \varphi . (h' + q)$ und $\lambda = \psi . (h' + q)$, folglich

$$CG' = \varphi . (h' + q) - \psi . (h' + q) . \sin \theta_{,}^{2},$$

oder wenn man entwickelt, und $\frac{d\varphi h'}{dh'} = \varphi'(h')$, $\frac{d\psi(h')}{dh'} = \psi'(h')$ setzt

$$CG' = \varphi(h') + \varphi'(h') . q - \psi(h') . \sin \theta_{,}^{2} - \psi'(h') . q . \sin \theta_{,}^{2}.$$

as letzte Glied im Ausdruck CG' kann man vernachssigen, weil q selbst dem $\sin\theta^2$ proportional ist. Es ird also $CF' - CG' =$

$$FG' = -q\varphi'(h') + \psi(h').\sin\theta_{,}^{2}.$$

ie Längenabweichung für das zweite Glas besteht also is zwei Theilen, von denen der zweite $\psi(h').\sin\theta_{,}^{2}$ ejenige Abweichung der Strahlen vom Sammlungspunkt er Axenstrahlen ausdrückt, welche allein daher rührt, ıfs die Strahlen von der Axe entfernt auffallen. Setzt an in dem Werthe von q (§. 475.) statt $n, k, t, f, h, p,$ e Werthe n', k', t', f', h', p', so wird q in q' überehen, und $\psi(h').\sin\theta_{,}^{2} = q'$ seyn. Es ergiebt sich also

$$F'G' = -q\varphi'(h') + q'.$$

un ist aber

$$x' = \varphi(h') = \frac{h'f'}{h'-f'}$$

$$\varphi'(h') = -\left(\frac{x'}{h'}\right)^2,$$

lglich wird auch die Längenabweichung durch zwei läser

$$= \frac{x'x'}{h'h'}\cdot q + q'.$$

ıf gleiche Weise erhält man dieselbe durch drei Gläser

$$= \frac{x'x'x''x''}{h'h'h''h''}\cdot q + \frac{x''x''}{h''h''}\cdot q' + q''$$

s. w. für mehr Gläser, wo das Gesetz der Fortschreiıng deutlich vor Augen liegt.

§. 486.

Sobald man die Längenabweichung für eine bebige Anzahl von Gläsern gefunden hat, läfst sich die itenabweichung sogleich aus derselben ableiten. Man hält dieselbe nämlich nach dem im §. 481. gegebenen rfahren, indem man die Längenabweichung mit dem ıotienten multiplicirt, welcher entsteht, wenn die Entnung von der Axe, in welcher der Randstrahl das as trifft, durch die Entfernung des Bildes vom letzten

Nun ist aber nach §. 404., wenn wir das Vorzeichen nicht berücksichtigen,

$$t' = \frac{h'}{z} \cdot t,$$

Folglich läfst sich q' auch so schreiben:

$$q' = \frac{h'h'}{zz} \cdot tt \cdot \left(a' - \frac{b'}{p'} + \frac{c'}{p'p'}\right).$$

Es wird daher die Längenabweichung durch zwei Gläser

$$= tt \cdot \left\{\begin{array}{l} \frac{az'z'}{h'h'} - \frac{b}{h'h'} \cdot \frac{z'z'}{p} + \frac{c}{h'h'} \cdot \frac{z'z'}{pp} \\ + \frac{a'h'h'}{zz} - \frac{b'}{zz} \cdot \frac{h'h'}{p'} + \frac{c'}{zz} \cdot \frac{h'h'}{p'p'} \end{array}\right\}$$

Hierzu kommen noch die Hülfsgleichungen

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{z} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{z'} = \frac{1}{f'}$$

$$h' + z = l,$$

wo l die Entfernung beider Gläser von einander bedeutet.

§. 488.

Soll die Längenabweichung wegen der Kugelgestalt bei der Zusammensetzung zweier Gläser Null werden, so hat man zwischen p und p' die Gleichung

$$\frac{1}{p'} - \frac{b'}{c'} \cdot \frac{1}{p'} = -\frac{a'}{c'} - \frac{zz z'z'}{h'^4} \cdot \left(\frac{a}{c'} - \frac{b}{c'} \cdot \frac{1}{p} + \frac{c}{c'} \cdot \frac{1}{pp}\right).$$

Hieraus ergiebt sich

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{b'}{c'} \pm \sqrt{\left[\frac{b'b' - 4a'c'}{4c'c'} - \frac{zz z'z'}{h'^4}\left(\frac{a}{c'} - \frac{b}{c'} \cdot \frac{1}{p} + \frac{c}{c'} \cdot \frac{1}{pp}\right)\right]}.$$

Ist der Gegenstand unendlich weit entfernt, also $h = \infty$, so wird $z = f$, und nehmen wir aufserdem an, beide Glaslinsen seyen so nahe an einander, dafs ihre gegenseitige Entfernung vernachlässigt werden kann, so ist $l = o$, $h' = -f$, $z' = \frac{ff'}{f+f'}$. Durch diese Voraussetzungen wird dann noch

chnen wir die Brennweiten der einzelnen Gläser
ie Strahlen von mittlerer Brechbarkeit durch f und
nd nehmen an, dafs die Brennweite der zusam-
esetzten Gläser die Einheit werden soll, so hat
nach §. 403.,

$$1 = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'}.$$

n nun die mittlern und violetten Strahlen, welche
llich nahe bei der Axe, von einem unendlich ent-
n Gegenstand herkommend, auffallen, in einen
t vereinigt werden, so ist nach der oft angewand-
leichung

$$f' = -f \cdot \frac{\delta\nu'}{\delta\nu},$$

us der Verbindung dieser beiden Gleichungen er-
sich

$$f = + \frac{\delta\nu' - \delta\nu}{\delta\nu'}$$

$$f' = - \frac{\delta\nu' - \delta\nu}{\delta\nu},$$

in Zahlen

$$f = + 0{,}3671328;$$
$$f' = - 0{,}5801103.$$

urch finden sich nun die in §. 488. angegebenen
en folgendermafsen:

$$\log a = 1.0711774$$
$$\log b = 1.0608815$$
$$\log c = 0.5663100$$
$$\log a' = 1.8327989 \text{ (n)}$$
$$\log b' = 1.7758014 \text{ (n)}$$
$$\log c' = 1.1377145 \text{ (n)}$$
$$\log \frac{k}{k'} = 9.5648232.$$

ituirt man diese Werthe in der für $\frac{1}{p'}$ in §. 488.
gebenen Gleichung, so erhält man

$$\frac{1}{p'} = 2{,}172986 \pm \sqrt{6{,}131667 - \frac{6{,}216139}{p} + \frac{1{,}99044}{pp}}.$$

§. 489.

Man kann nun aber auch statt der Gröfsen p, p' die Krümmungshalbmesser r und r' der vordern Seiten beider Gläser einführen, wozu wir uns der Gleichungen

$$\frac{1}{p} = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{p'} = \frac{n'-1}{n'} \cdot \frac{1}{r'} + \frac{1}{fn'}$$

zu bedienen haben. Dann kommt

$$\frac{0{,}3756906}{r'} = 0{,}472486$$

$$\pm \sqrt{6{,}131667 - \frac{2{,}113515}{r} + \frac{0{,}2301010}{rr}}.$$

§. 490.

Um eine zweite Gleichung zwischen p, p' oder r, r' zu entwickeln, kann man folgendermafsen verfahren. Alle Coefficienten a, b, c ...., so wie die Brennweiten f und f', sind für Strahlen von mittlerer Brechbarkeit berechnet; man braucht also nur dieselbe Rechnung für die violetten Strahlen zu führen, und diese neuen Werthe in dieselbe Gleichung §. 488. zu substituiren, so erhält man die zweite numerische Gleichung zwischen p und p' und dann zwischen r und r'. Es seyen F, F' die Brennweiten für die violetten Strahlen, so ist

$$f = \frac{r\varrho}{(n-1).(r+\varrho)}, \quad F = \frac{r\varrho}{(n-1+\delta n).(r+\varrho)}$$

folglich, wenn man $\frac{r\varrho}{r+\varrho}$ eliminirt

$$F = \frac{f.(n-1)}{n-1+\delta n} = \frac{f}{1+\delta\nu}.$$

Auf gleiche Weise wird für das zweite Glas

$$F' = \frac{f'}{1+\delta\nu'}.$$

an erhält also durch Anwendung der gegebenen numerischen Werthe

$$\begin{aligned}
\log F &= 9.5558013 \\
\log F' &= 9.7493392\ (n) \\
\log a &= 1.0683323 \\
\log b &= 1.0482501 \\
\log c &= 0.5436664 \\
\log a' &= 1.8436433\ (n) \\
\log b' &= 1.7777308\ (n) \\
\log c' &= 1.1313218\ (n).
\end{aligned}$$

ergiebt sich also die Gleichung

$$\frac{1}{p'} = +\,2{,}215027 \pm \sqrt{\left\{\begin{matrix} +\,6{,}439961 \\ -\,6{,}387423 \cdot \frac{1}{p} \\ +\,1{,}998674 \cdot \frac{1}{pp} \end{matrix}\right\}}$$

er, wenn man die im vorigen §. angegebenen Werthe r, r' substituirt,

$$\frac{0{,}3833745}{r'} = +\,0{,}500210 \pm \sqrt{\left\{\begin{matrix} +\,6{,}439961 \\ -\,2{,}201628 \cdot \frac{1}{r} \\ +\,0{,}2374534 \cdot \frac{1}{rr} \end{matrix}\right\}}$$

§. 491.

Dividirt man in den beiden Gleichungen durch den efficienten von $\frac{1}{r'}$, so erhält man folgende Ausdrücke

$$\frac{1}{r'} = +\,1{,}257646 \pm \sqrt{\left\{\begin{matrix} +\,43{,}44282 \\ -\,14{,}97424 \cdot \frac{1}{r} \\ +\,1{,}630264 \cdot \frac{1}{rr} \end{matrix}\right\}}$$

wie den Abstand derselben von einander vernachlässigt haben. Allein sie können doch dienen, um, vermittelst der vollständigen Formeln, die genauen Werthe abzuleiten, wie wir jetzt zeigen wollen. Nach §. 379. ist die Vereinigungsweite der Strahlen von dem Brechungsverhältnifs n, wenn sie unendlich nahe bei der Axe auffallen,

$$k = \frac{(p-c).\varrho}{(p-c).(n-1)+n\varrho},$$

indem wir, wie schon früher geschehen ist,

$$\frac{hrn}{h.(n-1)-r} = p$$

setzen. Nehmen wir nun

$$r = +\,0{,}13953$$
$$\varrho = -\,0{,}53203$$
$$h = \infty, \quad c = 0{,}01,$$

so kommt für mittlere Strahlen

$$\log r = 9.1446676$$
$$\log n = 0.1804591$$
$$\text{C.log}\,(n-1) = 0.2880562$$
$$\overline{9.6131829} = \log p$$
$$p = 0{,}4103769$$
$$p - c = 0{,}4003769$$
$$\log\,(p-c) = 9.6024690$$
$$\log \varrho = 9.7259361\ (n)$$
$$\log k = 9.5503590$$
$$k = 0{,}3551068.$$

Der Abstand des zweiten Glases vom ersten sey 0,0025, die Dicke $c' = 0{,}004$, man hat also für die Berechnung der Vereinigungsweite hinter dem zweiten Glase

$$\frac{h'r'n'}{h'.(n'-1)-r'} = p'$$

$$k' = \frac{(p'-c').\varrho'}{(p'-c').(n'-1)+n'\varrho'}$$

$$r' = +\,0{,}17520$$
$$\varrho' = -\,0{,}11665$$
$$-h' = k' - 0{,}0025 = 0{,}3526068$$

$$\log h' = 9.5472907 \text{ (n)}$$
$$\log r' = 9.2435341$$
$$\log \varrho' = 9.0668847 \text{ (n)}$$
$$\log n' = 0.2046002$$
$$\log (n' - 1) = 9.7794305$$
$$\log p' = 9.4072786$$
$$p' = 0{,}2554339$$
$$p' - c' = 0{,}2514339$$
$$\log (p' - c') = 9.4004239$$
$$\log k' = 9.9165778$$
$$k' = 0{,}8252352.$$

§. 493.

Man vermehre nun nach und nach r um 0,0 ϱ, r' um 0,02, ϱ' um 0,005, und berechne mit die neuen Werthen die vier zugehörigen Werthe von so kommt

$$k' = 0{,}8662288$$
$$k' = 0{,}8640030$$
$$k' = 1{,}1780076$$
$$k' = 1{,}0196279.$$

Die Gröfse k' ist bei gleichbleibenden Brechungsv hältnissen n, n' der beiden Gläser für bestimmte F benstrahlen blofs als eine Function der vier Rad r, ϱ, r', ϱ' anzusehen. Man hat daher das vollständi Increment der Gröfse k' durch die Gleichung

$$dk' = \left(\frac{dk'}{dr}\right).dr + \left(\frac{dk'}{d\varrho}\right).d\varrho$$
$$+ \left(\frac{dk'}{dr'}\right).dr' + \left(\frac{dk'}{d\varrho'}\right).d\varrho'.$$

Zieht man nun die aus den anfänglichen Werthen v r, ϱ, r', ϱ' berechnete Gröfse k' von denjenigen a die nach und nach durch die Veränderung von r, r', ϱ' entstanden, so erhält man die Unterschiede

$$+ 0{,}0409936;$$
$$+ 0{,}0387678;$$
$$+ 0{,}3527724;$$
$$+ 0{,}1943927.$$

$$\begin{aligned}
\text{C.log } r' &= 0.7564659\\
\sin\varphi &= 9.1031245\,(\text{n}) = (-\sin\varphi'')\\
\sin(\theta+\varphi) &= 9.0807500\\
\theta+\varphi &= \quad 6^0\,55'\,1'',8\\
\varphi &= -\,7^0\,17'\,5'',3\\
\theta &= \quad 14^0\,12'\,7'',1\\
\sin(\theta+\varphi) &= 9.0807500\\
\log n' &= 0.2046002\\
&= 8.8761498 = \sin(\theta-\varphi')\\
\theta-\varphi' &= \quad 4^0\,18'\,43'',3\\
\theta &= \quad 14\;\;12\;\;7,\;1\\
\varphi' &= \quad 9^0\,53'\,23''\,8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{g}(r'+\varrho'-c') &= 8.7367948 \qquad \log r' = 9.2435341\\
\text{C.log}\,\varrho' &= 0.9331153\,(\text{n}) \quad \text{C.log}\,\varrho' = 0.9331153\,(\text{n})\\
\sin\varphi' &= 9.2349126 \quad \sin(\theta-\varphi') = 8.8761498\\
&\quad 8.9048227\,(\text{n}) \qquad\qquad 9.0527992\,(\text{n})\\
&\quad -\,0,08031980\\
&\quad -\,0,11292734\\
&\quad -\,0,19324714\\
\sin(\theta'+\varphi') &= 9.2861131\,(\text{n})\\
\theta'+\varphi' &= -\,11^0\;\;8'\,32''\,4\\
\varphi' &= \quad\;\; 9^0\,53'\,23''\,8\\
\theta' &= -\,21^0\;\;1'\,56''\,2\\
\sin(\theta'+\varphi') &= 9.2861131\;(\text{n})\\
\log n' &= 0.2046002\\
&= 9.4907133\,(\text{n}) = \sin(\theta'+\varphi'')\\
\theta'+\varphi'' &= -\,18^0\,1'\,52''\,8\\
\theta' &= -\,21\;\;1\;\;56''\,2\\
\varphi'' &= \quad\;\; 3^0\,0'\;\;3''\,4\\
\log\varrho' &= 9.0668847\;(\text{n})\\
\sin(\theta'+\varphi'') &= 9.4907133\;(\text{n})\\
\text{C.sin}\,\varphi'' &= 1.2810633\\
&\quad 9.8386613\\
&\quad 0,6897068\\
-\,' &= 0,11665\\
&\quad 0,8063568 = \varepsilon'.
\end{aligned}$$

die in einer bestimmten Entfernung von der Axe
fallenden Strahlen, sowohl von der mittlern als
violetten Farbe, dieselbe Vereinigungsweite besitzen
len, als die ersten Strahlen.

§. 494.

Wir gehen also jetzt zur Vereinigungsweite der
letten Axenstrahlen über. Hierbei haben wir

$$r = +\ 0{,}13953$$
$$\varrho = -\ 0{,}53203$$
$$\log r = 9.1446676$$
$$\log \varrho = 9.7259361\ (n)$$
$$\log n = 0.1835478$$
$$\log (n-1) = 9.7209660$$
$$\log p = 9.6072494$$
$$p = 0{,}4048083$$
$$p - c = 0{,}3948083$$
$$\log (p-c) = 9.5963862$$
$$\log k = 9.5411376$$
$$k = 0{,}3476463$$
$$k' = -\ 0{,}3451463$$
$$\log k' = 9.5380033\ (n)$$
$$\log n' = 0.2099785$$
$$\log (n'-1) = 9.7936018$$
$$\log r' = 9.2435341$$
$$\log \varrho' = 9.0668847\ (n)$$
$$\log p' = 9.4006866$$
$$p' = 0{,}2515861$$
$$p' - c' = 0{,}2475861$$
$$\log (p'-c') = 9.3937264$$
$$\log k' = 0.9135382$$
$$k' = 0{,}8194796.$$

§. 495.

Um nun die zweite Gleichung zu finden, vermehr
wir die Krümmungshalbmesser der Gläser nach u
nach um dieselben Gröfsen, als §. 493. geschehen i
so erhalten wir folgende Vereinigungsweiten:

$\theta + \varphi = \quad 7^0\ 9'\ 50''\ 5$
$\varphi = -\ 7.14.56,9$
$\theta = +\ 14.24.47,4$
$\sin(\theta + \varphi) = 9.0960028$
$\log n' = 0.2046002$
$8.8914026 = \sin(\theta - \varphi')$
$\theta - \varphi' = \ 4^0\ 27'\ 59''\ 3$
$\theta = 14.24.47,4$
$\varphi' = \ 9.56.48,1$

$\log(r' + \varrho' - c') = 8.7367948$ $\log r' = 9.2435341$
$\text{C.}\log \varrho' = 0.9331153\,(\text{n})$ $\text{C.}\log \varrho' = 0.9331153\,(\text{n})$
$\sin \varphi' = 9.2373725$ $\sin(\theta - \varphi') = 8.8914026$
$8.9072826\,(\text{n})$ 9.0680520

$- 0,08077606$
$- 0,11696394$
$- 0,19774000$
$9.2960945\,(\text{n}) = \sin(\theta' + \varphi')$
$\theta' + \varphi' = -\ 11^0\ 24'\ 17''\ 5$
$\varphi' = \ 9.56.48.1$
$\theta' = -\ 21^0\ 21'\ 5''\ 6$
$\sin(\theta' + \varphi') = 9.2960945\ (\text{n})$
$\log n' = 0.2046002$
$9.5006947\ (\text{n}) = \sin(\theta' + \varphi'')$
$\theta' + \varphi'' = -\ 18^0\ 27'\ 56''\ 0$
$\theta' = -\ 21.21.\ 5''\ 6$
$\varphi'' = +\ 2^0\ 53'\ 9''\ 6$
$\log \varrho' = 9.0668847\ (\text{n})$
$\sin(\theta' + \varphi'') = 9.5006947\ (\text{n})$
$\text{C.}\sin \varphi'' = 1.2970990$
9.8655784

$0,7338012$
$- \varrho' = 0,11665$
$0,8504512 = l'.$

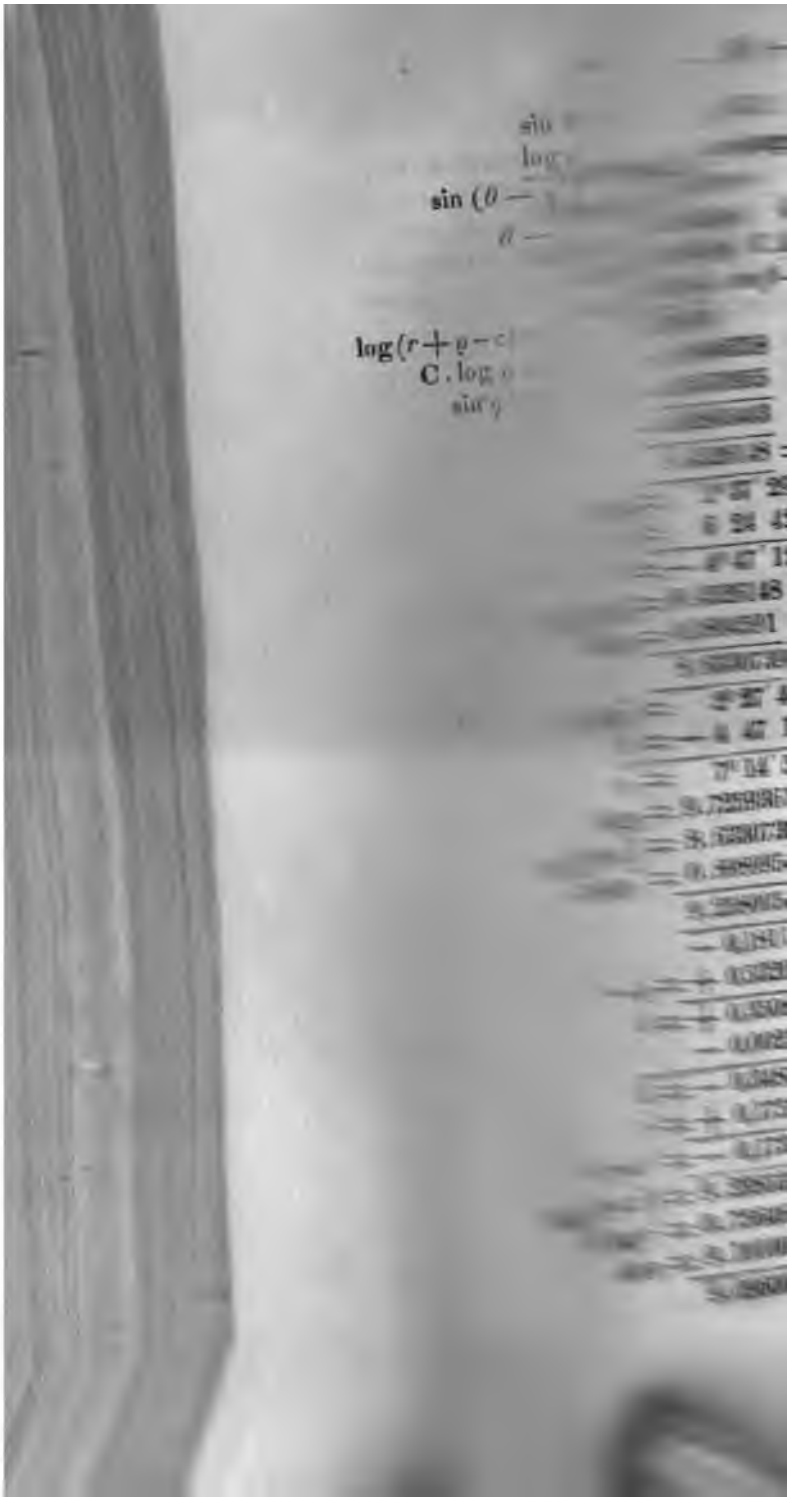
§. 497.

Berechnung der Vereinigungsweite der mit Strahlen für ein verändertes r.

$\log(r+\varrho-c) = 9.6026025\,(n)$ $\quad \log r = 9.150848$
$\mathrm{C}.\log\varrho = 0.2740639\,(n)$ $\quad \mathrm{C}.\log\varrho = 0.274063$
$\sin\varphi' = 9.0479415$ $\quad \sin(\theta-\varphi') = 9.321017$
8.9246079 $\quad 8.745929$
$+\ 0{,}08406358$
$-\ 0{,}05570955$
$+\ 0{,}02835403$
$8.4526148 = \sin(\theta'+\varphi')$
$\theta'+\varphi' = 1^\circ\,37'\,29'',2$
$\varphi' = 6\ 24\ 42,\ 0$
$\theta' = -\ 4^\circ\,47'\,12,\ 8$
$\sin(\theta'+\varphi') = 8.4526148$
$\log n = 0{,}1804591$
$8.6330739 = \sin(\theta'+\varphi'')$
$\theta'+\varphi'' = 2^\circ\,27'\,44''\,1$
$\theta' = -\ 4\ 47\ 12{,}8$
$\varphi' = 7^\circ\,14'\,56''\,9$
$\log\varrho = 9.7259361\ (n)$
$\sin(\theta'+\varphi'') = 8.6330739$
$\mathrm{C}.\sin\varphi'' = 0.8989954$
$9.2580054\ (n)$
$-\ 0{,}1811362$
$-\varrho = +\ 0{,}5320300$
$k = +\ 0{,}3508938$
$-\ 0{,}0025$
$k' = -\ 0{,}3483938$
$r' = +\ 0{,}17520$
$k'+r' = -\ 0{,}1731938$
$\log(k'+r') = 9.2385323\ (n)$
$\mathrm{C}.\log r' = 0.7564659$
$\sin\varphi = 9.1010046\ (n)$
$9.0960028 = \sin(\theta+\varphi)$

$$\begin{aligned}
\text{C.}\log r' &= 0.7564659\\
\sin\varphi &= 9.1031245\,(\text{n}) = (-\sin\varphi'')\\
\sin(\theta+\varphi) &= 9.0807500\\
\theta+\varphi &= \quad 6^{0}\,55'\,1'',8\\
\varphi &= -\,7^{0}\,17'\,5'',3\\
\theta &= \quad 14^{0}\,12'\,7'',1\\
\sin(\theta+\varphi) &= 9.0807500\\
\log n' &= 0.2046002\\
&= 8.8761498 = \sin(\theta-\varphi')\\
\theta-\varphi' &= \quad 4^{0}\,18'\,43'',3\\
\theta &= \quad 14\;\;12\;\;7,\;1\\
\varphi' &= \quad 9^{0}\,53'\,23''\,8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}(r'+\varrho'-c') &= 8.7367948 \qquad \log r' = 9.2435341\\
\text{C.}\log\varrho' &= 0.9331153\,(\text{n}) \quad \text{C.}\log\varrho' = 0.9331153\,(\text{n})\\
\sin\varphi' &= 9.2349126 \quad \sin(\theta-\varphi') = 8.8761498\\
&\quad 8.9048227\,(\text{n}) \qquad\qquad 9.0527992\,(\text{n})\\
&\quad -\,0,08031980\\
&\quad -\,0,11292734\\
&\quad -\,0,19324714\\
\sin(\theta'+\varphi') &= 9.2861131\;(\text{n})\\
\theta'+\varphi' &= -\,11^{0}\;8'\,32''\,4\\
\varphi' &= \quad\;\; 9^{0}\,53'\,23''\,8\\
\theta' &= -\,21^{0}\;1'\,56''\,2\\
\sin(\theta'+\varphi') &= 9.2861131\;(\text{n})\\
\log n' &= 0.2046002\\
&= 9.4907133\,(\text{n}) = \sin(\theta'+\varphi'')\\
\theta'+\varphi'' &= -\,18^{0}\,1'\,52''\,8\\
\theta' &= -\,21\;\;1\;\;56''\,2\\
\varphi'' &= \quad\;\; 3^{0}\,0'\;\;3''\,4\\
\log\varrho' &= 9.0668847\;(\text{n})\\
\sin(\theta'+\varphi'') &= 9.4907133\;(\text{n})\\
\text{C.}\sin\varphi'' &= 1.2810633\\
&\quad 9.8386613\\
&\quad 0,6897068\\
-\,\varrho' &= 0,11665\\
&= 0,8063568 = k'.
\end{aligned}$$



$\theta + \varphi = 6^0\,59'\,2''0$
$\varphi = -\,7.10.23,9$
$\theta = 14^0\,9'\,25''9$

$\sin(\theta+\varphi) = 9.0848986$
$\log n' = 0.2046002$
$8.8802984 = \sin(\theta - \varphi')$

$\theta - \varphi' = 4^0\,21'\,12''6$
$\theta = 14.\ 9.25,9$
$\varphi' = 9^0\,48'\,13''3$

$\log(r'+\varrho'-c') = 8.7367948$ $\log r' = 9,2435341$
C.$\log\varrho' = 0.9331153$(n) C.$\log\varrho' = 0.9331153$(n)
$\sin\varphi' = 9,2311463$ $\sin(\theta-\varphi') = 8.8802984$
8.9010564(n) 9.0569478(n)
$-\ 0,07962627$
$-\ 0,11401129$
$-\ 0,19363756$

$\sin(\theta'+\varphi') = 9.2869896$ (n)

$\theta' + \varphi' = -\,11^0\,9'\,54''6$
$\varphi' = 9.48.13,3$
$\theta' = -\,20^0\,58'\,7''9$

$\sin(\theta'+\varphi') = 9.2869896$ (n)
$\log n' = 0.2046002$
9.4915898 (n) $= \sin(\theta'+\varphi'')$

$\theta' + \varphi'' = -\,18^0\,4'\,8''8$
$\theta' = -\,20.58.7,9$
$\varphi'' = +\,2,53.59,1$

$\log\varrho' = 9.0668847$ (n)
$\sin(\theta'+\varphi'') = 9.4915898$ (n)
C.$\sin\varphi'' = 1.2959475$
9.8544220
$0,7151910$
$-\ \varrho' = 0,11665$
$0,8318410 = k'$

§. 498.

Berechnung der Vereinigungsweite der mittlen Strahlen für ein verändertes ϱ.

$\log(r+\varrho-c) = 9.5826314\,(n)$ $\quad \log r = 9.1446676$

$\mathrm{C}.\log\varrho = 0.2907046\,(n)$ $\quad \mathrm{C}.\log\varrho = 0.2907046\,(n)$

$\sin\varphi' = 9.0479415$ $\quad \sin(\theta-\varphi') = 9.3210173$

8.9212775 $\quad 8.7563895$

$+ 0{,}08342140$

$- 0{,}05706758$

$+ 0{,}02635382$

$8{,}4208436 = \sin(\theta'+\varphi')$

$\theta'+\varphi' = 1^\circ 30' 36'' 5$

$\varphi' = 6.24.42{,}0$

$\theta' = -4^\circ 53' 5'' 5$

$\sin(\theta'+\varphi') = 8.4208436$

$\log n = 0.1804591$

$8.6013027 = \sin(\theta'+\varphi'')$

$\theta'+\varphi'' = 2^\circ 17' 18'' 4$

$\theta' = -4.53.5{,}5$

$\varphi'' = 7.10.23{,}9$

$\log\varrho = 9.7092954\,(n)$

$\sin(\theta'+\varphi'') = 8.6013027$

$\mathrm{C}.\sin\varphi'' = 0.9035385$

$9.2141366\,(n)$

$- 0{,}1637331$

$-\varrho = + 0{,}51203$

$k = + 0{,}3482969$

$- 0{,}0025$

$k' = - 0{,}3457969$

$r' = + 0{,}17520$

$k'+r' = - 0{,}1705969$

$\log(k'+r') = 9.2319712\,(n)$

$\mathrm{C}.\log r' = 0.7564659$

$\sin\varphi = 9.0964615\,(n)$

$9.0848986 = \sin(\theta+\varphi)$

$\theta + \varphi = 6^0\,59'\,2''0$

$\varphi = -\,7.10.23,9$

$\theta = 14^0\,9'\,25''9$

$\sin(\theta+\varphi) = 9.0848986$

$\log n' = 0.2046002$

$8.8802984 = \sin(\theta - \varphi')$

$\theta - \varphi' = 4^0\,21'\,12''6$

$\theta = 14.\ 9.25,9$

$\varphi' = 9^0\,48'\,13''3$

$(r'+\varrho'-c') = 8.7367948$ $\quad \log r' = 9,2435341$

C.$\log \varrho' = 0.9331153$(n) C.$\log \varrho' = 0.9331153$(n)

$\sin \varphi' = 9.2311463$ $\quad \sin(\theta-\varphi') = 8.8802984$

8.9010564(n) $\qquad$ 9.0569478(n)

$-\ 0,07962627$

$-\ 0,11401129$

$-\ 0,19363756$

$\sin(\theta' + \varphi') = 9.2869896$ (n)

$\theta' + \varphi' = -\ 11^0\ 9'\ 54''6$

$\varphi' = 9.48.13,3$

$\theta' = -\ 20^0\,58'\ 7''9$

$\sin(\theta' + \varphi') = 9.2869896$ (n)

$\log n' = 0.2046002$

9.4915898 (n) $= \sin(\theta' + \varphi'')$

$\theta' + \varphi'' = -\ 18^0\ 4'\ 8''8$

$\theta' = -\ 20.58.7,9$

$\varphi'' = +\ 2.53.59,1$

$\log \varrho' = 9.0668847$ (n)

$\sin(\theta' + \varphi'') = 9.4915898$ (n)

C.$\sin \varphi'' = 1.2959475$

9.8544220

$0,7151910$

$-\ \varrho' = 0,11665$

$0,8318410 = k$

§. 499.

Berechnung der Vereinigungsweite der mittle Strahlen für ein verändertes r'.

$$h' = -\ 0{,}3416023 \quad (\S.\ 496.)$$
$$r' = +\ 0{,}19520$$
$$h' + r' = -\ 0{,}1464023$$
$$\log (h' + r') = 9.1655479\ (n)$$
$$\text{C.log}\, r' = 0.7095202$$
$$\sin \varphi = 9.1031245\ (n)$$
$$8.9781926 = \sin (\theta + \varphi)$$
$$\theta + \varphi = 5^\circ 27' 25'' 8$$
$$\varphi = -\ 7.17.\ 5.3$$
$$\theta = 12.44.31,1$$
$$\sin (\theta + \varphi) = 8.9781926$$
$$\log n' = 0.2046002$$
$$8.7735924 = \sin (\theta - \varphi')$$
$$\theta - \varphi' = 8^\circ 24' 13'' 9$$
$$\theta = 12.44.31,1$$
$$\varphi' = 9^\circ 20' 17'' 2$$

$\log (r' + \varrho' - c') = 8.8724476$ $\quad \log r' = 9.2904898$

$\text{C.log}\, \varrho' = 0.9331153\,(n)$ $\quad \text{C.log}\, \varrho' = 0.9331153\,(n)$

$\sin \varphi' = 9.2102159$ $\quad \sin(\theta - \varphi') = 8.7735924$

$9.0157788\,(n)$ $\quad 8.9971975\,(n)$

$$-\ 0{,}1037000$$
$$-\ 0{,}0993568$$
$$-\ 0{,}2030568$$
$$\sin (\theta' + \varphi') = 9.3076175\ (n)$$
$$\theta' + \varphi' = -\ 11^\circ 42' 57''$$
$$\varphi' = 9.20.17,2$$
$$\theta' = -\ 21.\ 3.14.2$$
$$\sin (\theta' + \varphi') = 9.3076175\ (n)$$
$$\log n' = 0.2046002$$
$$\sin (\theta' + \varphi'') \quad 9.5122177\ (n)$$
$$\theta' + \varphi'' = -\ 18^\circ 58' 50'' 7$$
$$\theta' = -\ 21.\ 3.14,2$$
$$\varphi'' = +\ 2.\ 4.23,5$$

$$\log \varrho' = 9.0668847\ (n)$$
$$\sin(\theta' + \varphi'') = 9.5122177\ (n)$$
$$\text{C.sin}\ \varphi'' = 1.4415780$$
$$0.0206804$$
$$1,0487700$$
$$-\varrho' = 0,11665$$
$$1,1654200 = k'.$$

§. 500.

Berechnung der Vereinigungsweite der mittlern rahlen für ein verändertes ϱ'.

$$g(r' + \varrho' - c') = 8.7748818 \qquad \log r' = 9.2435341$$
$$\text{C.log}\ \varrho' = 0.9521413\ (n) \qquad \text{C.log}\ \varrho' = 0.9521413\ (n)$$
$$\sin \varphi' = 9.2349126 \qquad \sin(\theta - \varphi') = 8.8761498$$
$$8.9619357\ (n) \qquad 9.0718252\ (n)$$
$$-\ 0,09160848$$
$$-\ 0,11798454$$
$$-\ 0,20959302$$
$$9.3213768\ (n) = \sin(\theta' + \varphi')$$
$$\theta' + \varphi' = -\ 12.\ 5.54''5$$
$$\varphi' = +\ 9.53.23,8$$
$$\theta' = -\ 21^0\,59'\,18''3$$
$$\sin(\theta' + \varphi') = 9.3213768\ (n)$$
$$\log n' = 0.2046002$$
$$9.5259770\ (n) = \sin(\theta' + \varphi'')$$
$$\theta' + \varphi'' = -\ 19^0\,36'\,58''5$$
$$\theta' = -\ 21.59.18,3$$
$$\varphi'' = +\ 2^0\,22'\,19''8$$
$$\log \varrho' = 9.0478587\ (n)$$
$$\sin(\theta' + \varphi'') = 9.5259770\ (n)$$
$$\text{C.sin}\ \varphi'' = 1.3831014$$
$$9.9569371\ (n)$$
$$0,9056016$$
$$-\varrho' = 0,11165$$
$$1,0172516 = k'.$$

§. 501.

Wir haben also folgende fünf Werthe von k'

$$k' = 0{,}8063568$$
$$k' = 0{,}8504512$$
$$k' = 0{,}8818410$$
$$k' = 1{,}1654200$$
$$k' = 1{,}0172516.$$

Zieht man den ersten Werth von den folgenden vier ab, so bleiben die Unterschiede

$$+ 0{,}0440944$$
$$+ 0{,}0254842$$
$$+ 0{,}3390732$$
$$+ 0{,}2108948,$$

und da die entsprechenden Veränderungen der Krümmungshalbmesser der Gläser r, ϱ, r', ϱ', wie früher, folgendermaßen angenommen waren

$$dr = + 0{,}002; \quad d\varrho = + 0{,}020$$
$$dr' = + 0{,}020; \quad d\varrho' = + 0{,}005,$$

so erhält man die partiellen Differentialcoefficienten

$$\left(\frac{dk'}{dr}\right) = + 22{,}0472$$

$$\left(\frac{dk'}{d\varrho}\right) = + 1{,}27421$$

$$\left(\frac{dk'}{dr'}\right) = + 17{,}95366$$

$$\left(\frac{dk'}{d\varrho'}\right) = + 42{,}1789.$$

Es ist aber die vollständige Veränderung von k'

$$dk' = 1 - 0{,}8063568$$
$$= + 0{,}1936432,$$

und hierdurch erhält man die dritte Bedingungsgleichung

$$+ 0{,}1936432 = + 22{,}0472 \,.dr + 1{,}27421 \,.d\varrho$$
$$+ 17{,}95366 \,.dr' + 42{,}1789 \,.d\varrho'.$$

§. 502.

Um die vierte Bedingungsgleichung zu erhalten, betrachten wir den Weg der violetten Lichtstrahlen,

che so auf das erste Glas parallel mit der Axe ein-
en, dafs der Winkel $\theta = 18^0\,30'$ wird

$$\sin\theta = 9.5014764$$
$$\log n = 0.1835478$$
$$\sin(\theta - \varphi') = 9.3179286$$
$$\theta - \varphi' = 12^0\ 0'\ 5''$$
$$\theta = 18.30$$
$$\varphi' = 6^0\,29'\,55''$$

$(r + \varrho - c) = 9.6047695\,(n)$ $\quad \log r = 9.1446676$
$\mathrm{C}.\log\varrho = 0.2740639\,(n)$ $\quad \mathrm{C}.\log\varrho = 0.2740639\,(n)$
$\sin\varphi' = 0.0537663$ $\quad \sin(\theta - \varphi') = 9.3179286$
8.9345997 $\quad 8.7366601\,(n)$

$+ 0{,}08602006$
$- 0{,}05453309$
$+ 0{,}03148697$

$8.4981309 = \sin(\theta' + \varphi')$

$\theta' + \varphi' = 1^0\,48'\,15'',8$
$\varphi' = 6\ 29\ 55,0$
$\theta' = -4^0\,41'\,39'',2$
$\sin(\theta' + \varphi') = 8.4981309$
$\log n = 0.1835478$
$8.6816787 = \sin(\theta' + \varphi'')$
$\theta' + \varphi'' = 2^0\,45'\,14'',4$
$\theta' = -\ 4\ 41\ 39,2$
$\varphi'' = 7\ 26\ 53,6.$
$\log\varrho = 9.7259361\ (n)$
$\sin(\theta' + \varphi'') = 8.6816787$
$\mathrm{C}.\sin\varphi'' = 0.8872969$
$9.2949117\ (n)$

$- 0{,}1972017$
$-\varrho' = + 0{,}5320300$
$k = + 0{,}3348283$
$- 0{,}0025$
$k' = - 0{,}3323283$
$r' = + 0{,}17520$
$k' + r' = - 0{,}1571283$

§. 503.

Berechnung der Vereinigungsweite der violetten rahlen für ein verändertes r.

$$\begin{aligned}
;(r+\varrho-c) &= 9.6026025\,(n) & \log r &= 9.1508485\\
\text{C.}\log\varrho &= 0.2740639\,(n) & \text{C.}\log\varrho &= 0.2740639\,(n)\\
\sin\varphi' &= 9.0537663 & \sin(\theta-\varphi') &= 9.3179286\\
& 8.9304327 & & 8.7428410\,(n)\\
& + 0{,}08591864\\
& - 0{,}05531475\\
& + 0{,}03060389\\
& 8.4857767 = \sin(\theta'+\varphi')\\
\theta'+\varphi' &= 1^0\,45'\,13''\,5\\
\varphi' &= 6\;29\;55\;0\\
\theta' &= -\,4^0\,44'\,41''\,5\\
\sin(\theta'+\varphi') &= 8.4857767\\
\log n &= 0.1835478\\
& 8.6693245 = \sin(\theta'+\varphi'')\\
\theta'+\varphi'' &= 2^0\,40'\,36''\,2\\
\theta' &= -\,4\;44\;41\;5\\
\varphi'' &= 7^0\,25'\,17''\,7\\
\log\varrho &= 9.7259361\;(n)\\
\sin(\theta'+\varphi'') &= 8.6693245\\
\text{C.}\sin\varphi'' &= 0.8888457\\
& 9.2841063\;(n)\\
& - 0{,}1923550\\
-\varrho &= + 0{,}53203\\
k &= + 0{,}3396750\\
& - 0{,}0025\\
k' &= - 0{,}3371750\\
r' &= + 0{,}17520\\
k'+r' &= - 0{,}1619750\\
\log(k'+r') &= 9.2094481\;(n)\\
\text{C.}\log r' &= 0.7564659\\
\sin\varphi &= 9.1111543\;(n)\\
& 9.0770683 = \sin(\theta+\varphi)
\end{aligned}$$

§. 504.

Berechnung der Vereinigungsweite der violetten Strahlen für ein verändertes ϱ.

$\log(r+\varrho-c) = 9.5826314\,(n)$ $\quad \log r = 9.1446676$
$\mathrm{C}.\log\varrho = 0.2907046\,(n)$ $\quad \mathrm{C}.\log\varrho = 0.2907046\,(n)$
$\sin\varphi' = 9.0537663$ $\quad \sin(\theta-\varphi') = 9.3179286$
8.9271023 $\quad 8.7533008\,(n)$
$+\ 0{,}08454779$
$-\ 0{,}05666415$
$+\ 0{,}02788364$
$8.4453495 = \sin(\theta'+\varphi')$

$\theta'+\varphi' = 1^{0}\,35'\,52''\,1$
$\varphi' = 6\ 29\ 55\ 0$
$\theta' = -\ 4\ 54\ 2\ 9$
$\sin(\theta'+\varphi') = 8.4453495$
$\log n = 0.1835478$
$8.6288973 = \sin(\theta'+\varphi'')$

$\theta'+\varphi'' = 2^{0}\,26'\,19''\,1$
$\theta' = -\ 4\ 54\ 2\ 9$
$\varphi'' = 7\ 20\ 22\ 0$
$\log\varrho = 9.7092954\,(n)$
$\sin(\theta'+\varphi'') = 8.6288973$
$\mathrm{C}.\sin\varphi'' = 0.8936478$
$9.2318405\,(n)$
$-\ 0{,}1705455$
$-\varrho = +\ 0{,}51203$
$k = +\ 0{,}3414845$
$-\ 0{,}0025$
$k' = -\ 0{,}3389845$
$r' = +\ 0{,}17520$
$k'+r' = -\ 0{,}1637845$
$\log(k'+r') = 9.2142728\,(n)$
$\mathrm{C}.\log r' = 0.7564659$
$\sin\varphi = 9.1063522\,(n)$
$9.0770909 = \sin(\theta+\varphi)$

§. 505.

Berechnung der Vereinigungsweite der violetten Strahlen für ein verändertes r'.

$$h' = -0{,}3323283$$
$$r' = +0{,}19520$$
$$h' + r' = -0{,}1371283$$
$$\log(h' + r') = 9.1371271\ (n)$$
$$\text{C.}\log r' = 0.7095202$$
$$\sin\varphi = 9.1127031\ (n)$$
$$8.9593504 = \sin(\theta + \varphi)$$
$$\theta + \varphi = 5^0\,13'\,29''\,1$$
$$\varphi = -\ 7\ 26\ 53\ 6$$
$$\theta = +\ 12^0\,40'\,22''\,7$$
$$\sin(\theta + \varphi) = 8.9593504$$
$$\log n' = 0.2099785$$
$$8.7493719 = \sin(\theta - \varphi')$$
$$\theta - \varphi' = 3^0\,13'\ 8''\,4$$
$$\theta = 12\ 40\ 22\ 7$$
$$\varphi' = 9^0\,27'\,14''\,3$$

$\log(r' + \varrho' - c') = 8.8724476$	$\log r' = 9.2904898$
$\text{C.}\log\varrho' = 0.9331153$	$\text{C.}\log\varrho' = 0.9331153$
$\sin\varphi' = 9.2155190$	$\sin(\theta - \varphi') = 8.7493719$
$9.0210819\,(n)$	$8.9729770\,(n)$
$-\ 0{,}1049740$	
$-\ 0{,}0939673$	
$-\ 0{,}1989413$	

$$9.2987250\ (n) = \sin(\theta' + \varphi')$$
$$\theta' + \varphi' = -\ 11^0\,28'\,30''\,1$$
$$\varphi' = 9\ 27\ 14\ 3$$
$$\theta' = -\ 20\ 55\ 44\ 4$$
$$\sin(\theta' + \varphi') = 9.2987250\ (n)$$
$$\log n' = 0.2099785$$
$$\sin(\theta' + \varphi'') = 9.5087035\ (n)$$
$$\theta' + \varphi'' = -\ 18^0\,49'\,19''\,1$$
$$\theta' = -\ 20\ 55\ 44\ 4$$
$$\varphi'' = +\ 2^0\ 6'\,25''\,3$$

§. 507.

Wir haben also folgende fünf Werthe von k':

$$k' = 0{,}7864175$$
$$k' = 0{,}8175620$$
$$k' = 0{,}8730535$$
$$k' = 1{,}1402695$$
$$k' = 1{,}2193108.$$

eht man den ersten Werth von den folgenden vier ab, bleiben die Unterschiede

$$+ 0{,}0311445$$
$$+ 0{,}0866360$$
$$+ 0{,}3538520$$
$$+ 0{,}4328933,$$

d da die entsprechenden Veränderungen der Krümngshalbmesser der Gläser r, ϱ, r', ϱ', folgenderıfsen angenommen waren:

$$dr = + 0{,}002; \quad d\varrho = + 0{,}020$$
$$dr' = + 0{,}020 \quad d\varrho' = + 0{,}005,$$

erhält man die partiellen Differentialcoefficienten

$$\left(\frac{dk'}{dr}\right) = + 15{,}5722$$
$$\left(\frac{dk'}{d\varrho}\right) = + 4{,}33180$$
$$\left(\frac{dk'}{dr'}\right) = + 17{,}6926$$
$$\left(\frac{dk'}{d\varrho'}\right) = + 86{,}5787.$$

s ist aber die vollständige Veränderung von k'

$$dk' = 1 - 0{,}7864175$$
$$= 0{,}2135825,$$

so erhält man die vierte Bedingungsgleichung

$$0{,}2135825 = + 15{,}5722 . dr + 4{,}3318 . d\varrho$$
$$+ 17{,}6926 . dr' + 86{,}5787 . d\varrho'.$$

§. 508.

Zur Bestimmung der Veränderungen der Krümungshalbmesser der Gläser haben wir also diese Gleiungen ausgemittelt:

lirt man noch durch den Coefficienten von dr', so
:bt sich

$$0{,}00479594 = dr' + 0{,}963226 \,.\, d\varrho'$$
$$0{,}00529024 = dr' + 3{,}053736 \,.\, d\varrho'.$$

erhält also

$$d\varrho' = + 0{,}000237$$
$$dr' = + 0{,}004568$$
$$dr = + 0{,}002334$$
$$d\varrho = + 0{,}017525.$$

Werthe der Krümmungshalbmesser, von welchen
bei der Berechnung ausgingen, waren folgende
91.):

$$r = + 0{,}13953$$
$$\varrho = - 0{,}53203$$
$$r' = + 0{,}17520$$
$$\varrho' = - 0{,}11665,$$

ich erhält man die verbesserten Werthe

$$r = + 0{,}141864$$
$$\varrho = - 0{,}514505$$
$$r' = + 0{,}179768$$
$$\varrho' = - 0{,}116413.$$

§. 509.

Wir haben nun in den vorhergehenden Paragraphen
igt, wie man ein achromatisches und aplanatisches
, vermittelst zweier Glaslinsen von verschiedenem
hungsverhältnifs und verschiedener Zerstreuungs-
zusammensetzen kann. Es ist aber zu bemerken,
die Abweichung wegen der Kugelgestalt bei dieser
von Berechnung nur für eine bestimmte Entfernung
Einfallspunktes des Strahls von der Axe aufgehoben
; wie in vorigem Beispiel bei einem Winkel von
30′. Es entsteht nun die Frage, ob man nicht
rgend eine Art eine bestimmte, durch die Theorie
tigte Entfernung finden kann, für welche, wenn
ihr entsprechende Abweichung wegen der Kugel-
lt völlig aufgehoben wird, die übrigen Abweichun-
die geringste Undeutlichkeit in dem Bilde eines
tes hervorbringen. In dem sechsten Bande (erste

$$t = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{r} \cdot \alpha \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{t^2}{r^2}\right) + \beta.$$

s ergiebt sich hieraus

$$y = \alpha . (x - \alpha - bt^2 - ct^4)$$

$$t = \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot \frac{t^2}{r} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{t^2}{r^2}\right) - \alpha . (\alpha + bt^2 + ct^4)$$

$$y = \frac{2 . (\alpha + bt^2 + ct^4 - x) . r}{2r . (\alpha + bt^2 + ct^4) - t^2 . \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{t^2}{r^2}\right)} \cdot t.$$

§. 511.

Nimmt man nun für x einen besondern Werth an, id denkt sich durch die Axe senkrecht auf selbige rch diesen angenommenen Punkt eine Ebene gelegt, durchschneidet man auf diese Weise den ganzen rahlenkegel, und es stellt sich auf der Ebene eine reisfläche von bestimmtem Halbmesser y, aber in den rschiedenen Zonen von ungleicher Erleuchtung dar. s ist nun nicht blofs nöthig, diesen Kreis so klein als öglich zu machen, sondern man mufs auch suchen e leuchtendern Theile der Axe so nahe als möglich bringen, und wir werden diese Bedingung durch s von Gauss am angeführten Orte aufgestellte Princip n besten bewerkstelligen, indem wir das Integral

$$\int yy . \varrho . ds$$

f den ganzen Durchschnittskreis ausgedehnt zu einem inimum machen, wo ϱ die Dichtigkeit des Lichts auf m Durchschnittskreis in einem Abstand $= y$ von der e bedeutet, und ds die Fläche des mit den Halbessern y, $y + dy$ beschriebenen Ringes angiebt. Nun aber ϱds die ganze Lichtmenge, welche auf diesen ing fällt, und da diese auf der Vorderfläche des lases einer Zone entspricht, die mit den Halbmessern $t + dt$ beschrieben ist, deren Fläche also $= 2\pi t dt$ rd, so kann man

$$\varrho ds = t dt$$

tzt man der Kürze wegen

$$1 + \frac{t^2}{2ar} + \frac{t^4}{4a^2r^2} - \frac{ct^4}{a} + \frac{t^4}{8ar^3} = P,$$

wird

$$\int yy\varrho ds = \frac{1}{aa} \cdot \int PPt^3dt \,.\, (a - x + ct^4)^2,$$

die Integration nach t von $t = o$ bis $t = T$ aus-führt werden mufs. Da nun die Gröfse x bei dieser egration als constant betrachtet wird, und das Integral ıde in Hinsicht dieser Gröfse zu einem Minimum ge-cht werden soll, so kann man bekanntlich gleich nach ser Gröfse unter dem Integralzeichen differentiiren, durch sich der Ausdruck

$$o = \int PPt^3dt \,.\, (a - x + ct^4)$$

iebt, und man sieht folglich aus demselben, dafs $- x$ dieselbe Dimension haben mufs, als t^4. Es wird ıer erlaubt seyn, da wir in der Entwickelung der ihe für die Vereinigungsweite k blofs bis zur vierten tenz von t inclusive fortgeschritten sind, in dem rthe von P alle Potenzen von t zu vernachlässigen, durch $P = 1$ wird. Dann bleibt

$$\begin{aligned}
\int yy\varrho ds &= \frac{1}{aa} \cdot \int t^3dt \,.\, (a - x + ct^4)^2 \\
&= \frac{1}{aa} \cdot \int t^3dt \,.\, (a - x)^2 \\
&+ \frac{2c}{aa} \cdot \int t^7dt \,.\, (a - x) \\
&+ \frac{cc}{aa} \cdot \int t^{11}dt \\
&= \frac{(a - x)^2}{4aa} \cdot T^4 + \frac{c \,.\, (a - x)}{4aa} \cdot T^8 \\
&\qquad + \frac{cc}{aa} \cdot \frac{T^{12}}{12},
\end{aligned}$$

, wenn dieser Ausdruck nach x differentiirt und ın Null gesetzt wird,

$$o = 2 \,.\, (a - x) + cT^4$$

$$a - x = - \frac{c}{2} \cdot T^4.$$

so dafs man also vermittelst dieses Werthes die Gröfse δ in dem Ausdruck von y eliminiren kann. Hierdurch wird

$$y = \frac{(ct^4 - ct^2\theta^2) \cdot t}{(a + ct^4 - ct^2\theta^2) - \frac{t^2}{2r} \cdot \left(1 + \frac{1}{4} \cdot \frac{t^2}{r^2}\right)},$$

wo man aber statt des ganzen Nenners, da die höhern Potenzen von t vernachlässigt werden, blofs a zu setzen braucht. Es ist also

$$y = \frac{ct^5}{a} \cdot (t^2 - \theta^2)$$

$$\int yy\varrho ds = \frac{cc}{aa} \cdot \int t^7 dt \,.\, (t^2 - \theta^2)^2$$

$$= \frac{cc}{aa} \cdot \left(\frac{T^{12}}{12} - \frac{T^{10}}{5} \cdot \theta^2 + \frac{T^8}{8} \cdot \theta^4\right).$$

Differentiirt man nach θ, um diesen Ausdruck zu einem Minimum zu machen, so erhält man

$$o = \tfrac{1}{2} \,.\, T^8\theta^3 - \tfrac{2}{5} \,.\, T^{10}\theta,$$

und hieraus ergiebt sich

$$\theta = T \,.\, \sqrt{\tfrac{4}{5}}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in den Werth des Integrals

$$\frac{cc}{aa} \cdot T^8 \cdot \left(\frac{\theta^4}{8} - \frac{\theta^2 T^2}{5} + \frac{T^4}{12}\right),$$

so kommt

$$\frac{cc}{aa} \cdot T^{12} \cdot \left(\frac{2}{25} - \frac{4}{25} + \frac{1}{12}\right)$$

$$= \frac{cc}{aa} \cdot \frac{T^{12}}{12 \,.\, 25} = \frac{1}{25} \cdot E.$$

§. 515.

In dem vierten und letzten Fall bestimmen wir x anfangs nicht, sondern fügen nur die Bedingung hinzu, dafs es so angenommen werden müsse, dafs das Integral $\int yy\varrho ds$ ein Minimum werde. Aufserdem setzen wir voraus, das Glas sey so eingerichtet, dafs die Abweichung wegen der Kugelgestalt für einen bestimmten

Wenn von $t = 0$ bis zur vierten Potenz von t inclusive vernachlässigt, so dafs wir wieder die Gleichung

$$\ddot{s} = -c\theta^2$$

haben. Hierdurch wird

$$\dot{s} = \frac{(a - x + ct^4 - ct^2\theta^2).t}{(a + ct^4 - ct^2\theta^2) - \frac{t^2}{2r}\cdot\left(1 + \frac{1}{4}\cdot\frac{t^2}{r^2}\right)}.$$

Hieraus man sieht leicht ein, dafs die Gröfse $a - s$ dieselbe Dimension als t^4 erhalten werde, weswegen man aus des Nenners blofs a zu setzen braucht. Dann ist

$$\gamma = \frac{t}{a}\cdot(a - x + ct^4 - ct^2\theta^2)$$

$$\int \gamma\gamma\varrho ds = \frac{(a-x)^2}{aa}\cdot\int t^3dt$$
$$+ \frac{2.(a-x).c}{aa}\cdot\int t^3dt.(t^4 - t^2\theta^2)$$
$$+ \frac{cc}{aa}\cdot\int t^3dt.(t^4 - t^2\theta^2)^2$$
$$= \frac{(a-x)^2}{aa}\cdot\frac{T^4}{4}$$
$$+ \frac{2.(a-x).c}{aa}\cdot\left(\frac{T^8}{8} - \frac{T^6\theta^2}{6}\right)$$
$$+ \frac{cc}{aa}\cdot\left(\frac{T^{12}}{12} - \frac{T^{10}\theta^2}{5} + \frac{T^8\theta^4}{8}\right).$$

Differentiirt man diesen Ausdruck, um ihn zu einem Minimum zu machen, sowohl nach x als nach θ, und setzt die daraus hervorgehenden Differentialcoefficienten besonders Null, so erhält man die beiden Gleichungen

$$0 = \frac{a-x}{4} + c.\left(\frac{T^4}{8} - \frac{T^2\theta^2}{6}\right)$$

$$0 = -\frac{2.(a-x).c}{aa}\cdot\frac{\theta}{3}$$
$$+ \frac{cc}{aa}\cdot\left(\frac{T^2\theta^3}{2} - \frac{2T^4\theta}{5}\right).$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man

$$\frac{a-x}{4} = c.\left(\frac{3T^2\theta^2}{16} - \frac{3T^4}{20}\right),$$

folglich wird

$$\frac{3}{16}\cdot\theta^2 - \frac{3}{20}\cdot T^2 + \frac{1}{8}\cdot T^2 - \frac{1}{6}\cdot\theta^2 = o,$$

und hieraus erhält man

$$\theta = T.\sqrt{\tfrac{5}{7}};$$

$$a - x = \frac{3}{10}\cdot cT^4.$$

Substituirt man diese Werthe in den Ausdruck des Integrals

$$+\frac{(a-x)^2}{aa}\cdot\frac{T^4}{4}$$

$$+\frac{2.(a-x).c}{aa}\cdot\left(\frac{T^8}{8} - \frac{T^6\theta^2}{6}\right)$$

$$+\frac{cc}{aa}\cdot\left(\frac{T^{12}}{12} - \frac{T^{10}\theta^2}{5} + \frac{T^8\theta^4}{8}\right),$$

so wird derselbe

$$= \frac{1}{1200}\cdot\frac{cc}{aa}\cdot T^{12} = \frac{1}{100}\cdot E.$$

Der Werth von y war allgemein in diesem Fall

$$y = \frac{t}{a}\cdot(a - x + ct^4 - ct^2\theta^2),$$

und substituirt man hierin die Werthe von $a - x$ und θ, so kommt:

$$y = \frac{tc}{a}\cdot\left(\frac{3}{10}\cdot T^4 + t^4 - \frac{6}{5}\cdot t^2T^2\right).$$

Dies wird Null für $t = o$, und für

$$t = \pm\sqrt{\frac{6-\sqrt{6}}{10}}\cdot T$$

$$t = \pm\sqrt{\frac{6+\sqrt{6}}{10}}\cdot T.$$

In der angeführten Stelle des physicalischen Wörterbuchs ist das Wurzelzeichen vor dem ganzen Ausdruck vergessen.

Es ergiebt sich also aus der in dem letzten Fall geführten Untersuchung, daſs die Undeutlichkeit des Bildes eines in der Axe liegenden Punktes am kleinsten

eitsichtige. Sollte freilich das Fernrohr so grofs seyn, afs man genöthigt wäre, ein Ocular von einer Brenn-eite zu wählen, die gröfser ist, als der Abstand, auf elchen das Auge deutlich sieht, so würde bei einem oncaven Ocular $\omega - f'$ negativ ausfallen, und also as Ocular vom Objectiv entfernt werden müssen, wenn as Auge nicht etwa übersichtig wäre, d. h. vermittelst onvergenter Strahlen deutlich sehen könnte.

§. 519.

Es können also hierbei zwei Fälle Statt finden, um as einem einfachen Objectiv und Ocular ein Fernrohr asammen zu setzen, indem entweder der Ocular mit egativer oder mit positiver Brennweite genommen wird. ie erste Zusammensetzung ist die älteste, und ein lches Fernrohr führt den Namen des Galilaeischen, eil dieser Mathematiker, so viel man weifs, zuerst urch ein solches selbst verfertigtes Fernrohr Beobach-ngen am Himmel angestellt hat. Man nennt dasselbe ohl auch das Holländische, weil diese Art von Fern-ihren ebenfalls anfänglich in Holland construirt wurde. etzt ist dieses Fernrohr ganz aufser Gebrauch gekom-en, und wird höchstens nur zu kleinen Taschenper-ectiven angewendet.

Da die Entfernung beider Gläser von einander im-er der Summe der Brennweiten derselben, im algebrai-hen Sinne genommen, gleich seyn mufs, so ergiebt ch, dafs bei dem Galilaeischen Fernrohr, wo $l = f - f'$, e Brennweite des Objectivs gröfser als die Länge des ernrohrs seyn mufs, also die durch das Objectiv zur onvergenz gebrachten Strahlen schon früher vom cularglas aufgefangen werden, als das Bild entsteht. ies konnte man schon ohne weitere Rechnung be-erken; denn da zum deutlichen Sehen nothwendig ist, afs die von einem Punkte herkommenden Strahlen nur enig Divergenz besitzen, so würde, wenn man das cular hinter das vom Objectiv hervorgebrachte Bild

$$\frac{-w'')}{w''},$$

$$: \alpha' + \frac{h'}{k'} \cdot (\alpha' - \alpha)$$

$$= -\frac{k}{h'} \cdot \alpha;$$

: bedeutet, welchen der vom durch die Mitte des Objectivs Axe bildet. Man erhält hieraus

$$\frac{k}{h'} \cdot \alpha - \frac{k}{k'} \cdot \alpha - \frac{h'}{k'} \cdot \alpha$$

$$\frac{\frac{k}{h'} + 1}{+ \frac{k}{k'} + \frac{h'}{k'}} \cdot h',$$

$$\frac{k + h'}{k + \frac{h'h' + kh'}{k'}} \cdot h',$$

och die Gleichungen

$$+ \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$

$$+ \frac{1}{k'} = \frac{1}{f'}$$

e in unserm Fall, wo das Object nt angesehen wird, und die gebro- ter dem zweiten Glase parallel aus- lfs $h = \infty$, $k' = \infty$ gesetzt wer-

$h' = f'$, $k + h' = l$

die Länge des Fernrohrs bedeutet,

$$u' = \frac{f'l}{f},$$

m Fall die Brennweite f' des Ocular- , so folgt, dafs dieser Durchschnitts-

r Oeffnung der Pupille ungefähr ein Zwölftheil Zoll
esetzt werden mufs. Dies ist auch der Grund ge-
esen, dafs man das Galilaeische Fernrohr für stärkere
ergröfserungen bald bei Seite gelegt hat, und das-
lbe nur noch bei ganz geringer Länge und geringer
ergröfserung anwendet.

§. 522.

Wollte man z. B. ein Galilaeisches Taschenperspectiv
rfertigen, dessen halbes Gesichtsfeld einen Grad be-
üge, so hat man, da $1^0 = 0{,}01745$,

$$\frac{1}{12 \cdot l} = 0{,}01745,$$

so ungefähr $l = 4{,}8$ Zoll. Wendet man nun rück-
chtlich der Deutlichkeit der Bilder auf das Galilaeische
ernrohr die in §. 472. entwickelte Formel an, indem
an annimmt, das Objectiv dieses Fernrohrs sey ein-
ch, also nicht achromatisch, so hat man, wenn m
e Vergröfserung, f die Brennweite des Objectivs be-
eutet,

$$\frac{109 \times 110}{30} = \frac{m \cdot (m+1)}{f}.$$

s ist aber aufserdem noch $m = \frac{f}{f'}$, $f - f' = 4{,}8$ Zoll
$= \frac{2}{7}$ Fufs, folglich erhält man auch

$$m = \frac{5f}{5f-2}$$

$$m \cdot (m+1) = \frac{5f \cdot (10f-2)}{(5f-2)^2},$$

nd hieraus ergiebt sich die Gleichung

$$1199 = \frac{15 \cdot (10f-2)}{(5f-2)^2}.$$

öfst man diese quadratische Gleichung auf, so er-
ilt man

$$f = 0{,}4342 \text{ und } f = 0{,}3708,$$

n welchen Werthen nur der erste für unsern Zweck
ssend ist. Da nun $f - f' = 0{,}4$, so wird $f = 0{,}0342$.

$$+ \frac{h'}{k'} \cdot (\alpha' - \alpha)$$

$$= - \frac{k}{h'} \cdot \alpha$$

... im vorliegenden Fall $k = f$, ... so bleibt

$$= - \frac{f}{f'} \cdot \alpha.$$

... das Verhältnifs $\frac{f}{f'}$ die Vergrößerungs-... kann also diesen Ausdruck auch so

$$= - m\alpha, \quad \alpha = - \frac{\psi''}{m},$$

... Vorzeichen nichts weiter bedeutet, als ..., welcher von einem über der Axe ge... des Objects herkommt, nach seiner ... einem unter der Axe befindlichen Punkte ...scheint. Der Winkel ψ'' ist also das ver...ichtsfeld.

§. 527.

... die Helligkeit anbetrifft, mit welcher das ...h das Fernrohr gesehen erscheint, so ist ...d, dafs, wenn wir einen in der Axe gelegenen entfernten Punkt betrachten, das Auge blofs ...in Ocular hervortretenden Strahlencylinder ...ssen Basis der Fläche der Pupille gleich ist; ...uchte man in dieser Rücksicht das Ocular ...ser als die Pupille zu machen. Es sey nun ...esser der Pupille $= p$, so mufs der Halb... des Objectivs

$$t = \frac{pf}{f'}$$

indem man nur in der letzten Formel des ... statt t' schreibt, wenn der auf das Objectiv ...ahlencylinder nach erlittener Brechung hinter

dem Ocular einen der Pupille gleichen Raum ausfüllen soll. Ist das Objectiv gröfser, so wird die Helligkeit nicht vermehrt, weil in diesem Fall die aufserhalb der besagten Gränze liegenden Strahlen des einfallenden Strahlencylinders auch hinter dem Ocular das Auge aufserhalb der Pupille treffen, also zum Sehen nichts beitragen. Hat aber das Objectiv die angegebene Gröfse, so ist die Helligkeit des Gegenstandes durch das Fernrohr der mit dem bloſsen Auge gesehen gleich, wenn wir das in den brechenden Materien verloren gehende Licht nicht berücksichtigen. Ist im Gegentheil der Halbmesser des Objectivs kleiner $= t^0$, so verhalten sich die Helligkeiten wie die Grundflächen der Strahlencylinder, d. h. wie $tt : t^0t^0$. Setzen wir also die mit bloſsem Auge gesehene Helligkeit der Einheit gleich, so wird dieselbe für ein Objectivglas vom Halbmesser t^0, wo $t^0 < t$,

$$= \left(\frac{t^0 . f'}{pf}\right)^2.$$

Nun ist aber $f = f'm$, wo m die Vergröfserung andeutet, also auch der Ausdruck der Helligkeit

$$= \left(\frac{t^0}{pm}\right)^2.$$

§. 528.

Da ferner ein und dasselbe Objectivglas, indem man verschiedene Oculare anwendet, zu verschiedenen Vergröfserungen gebraucht werden kann, wenigstens in dem Fall, wo selbiges ein zusammengesetztes achromatisch-aplanatisches Glas ist, so sey die stärkste Vergröfserung, welche man anwenden kann, ohne die Helligkeit geringer zu machen, als die mit dem bloſsen Auge gesehene, $= m^0$, dann hat man die Gleichung

$$1 = \left(\frac{t^0}{pm^0}\right)^2.$$

Sucht man hieraus den Werth von $\frac{t^0}{p}$, und substituirt

ihm in obigen Ausdruck $\left(\frac{t^0}{pm}\right)^2$, so erhält man die Helligkeit bei der Vergrösserung m

$$= \frac{m^0 m^0}{mm},$$

wo der Natur der Sache nach die Formel nur anwendbar ist, so lange m gröfser als m^0 ist; denn wenn m^0 gröfser als m angenommen wird, so ist das Verhältnifs $\frac{m^0 m^0}{mm}$ gröfser als die Einheit, welches nicht möglich ist, und man mufs in allen solchen Fällen hierfür die Einheit substituiren.

Hat das Objectiv z. B. eine Oeffnung, deren Halbmesser 4,5 Zoll beträgt, wie das in Dorpat befindliche, und setzt man den Halbmesser der Pupille $= \frac{1}{12}$ Zoll, so hat man $t^0 = 4{,}5$, $p = \frac{1}{12}$, $m^0 = 12 \times 4{,}5 = 54$. Bis zu 54facher Vergrösserung ist also die Helligkeit der Gegenstände durch das Fernrohr gesehen, der mit dem bloßen Auge gleich, allein bei stärkern Vergrösserungen nimmt dieselbe im quadratischen Verhältnisse der Vergrösserung ab. So beträgt sie z. B. bei 480facher Vergrösserung nur $\left(\frac{54}{480}\right)^2 = \frac{1}{79}$.

§. 529.

In so fern das astronomische Fernrohr, wie dies in den ältern Zeiten der Fall immer war, ein einfaches Objectiv besafs, war für jede Art von Farbenstrahlen ein besonderer Brennpunkt vorhanden. Denkt man sich nun in dem Punkte der Axe, in welchem sich der Brennpunkt der mittlern Farbenstrahlen befindet, eine Ebene senkrecht auf der Axe errichtet, so bilden die rothen Strahlen sowohl als die violetten auf dieser Ebene Kreise, deren Durchmesser merklich gleich sind. Es sey der Abstand des Sammlungspunkts der rothen Strahlen von dem der mittlern $= q$, der Abstand des Sammlungspunktes der mittlern Strahlen vom Glase $= f$, der Halbmesser des Objectivs $= t$, so ist der

Halbmesser des rothen Strahlenkreises, wie man leicht findet,

$$= \frac{qt}{f+q},$$

und der des violetten, da der Abstand des Sammlungspunktes der violetten Strahlen von dem der mittlern ebenfalls $= q$ gesetzt werden kann,

$$= \frac{qt}{f-q}.$$

Da nun aber q sehr klein gegen f ist, so kann man die Potenzen von q vernachlässigen, und es bleibt der gemeinschaftliche Halbmesser beider Kreise $= \frac{qt}{f}$. Nun ist aber, wenn r, ϱ die Halbmesser der Krümmungen des Glases, n, $n - \delta n$ die Brechungsverhältnisse für die mittlern und rothen Strahlen bedeuten, mit Vernachlässigung der Dicke des Glases für Axenstrahlen,

$$f = \frac{r\varrho}{(n-1).(r+\varrho)}$$

$$f+q = \frac{r\varrho}{(n-1-\delta n).(r+\varrho)}$$

$$= \frac{f.(n-1)}{n-1-\delta n} = f + f\delta\nu,$$

indem wir, wie schon früher geschehen ist, das Zerstreuungsverhältniss $\frac{\delta\nu}{n-1}$ durch δn bezeichnen; es wird daher $q = f\delta\nu$, und der Halbmesser des farbigen Kreises $= t\delta\nu$.

§. 530.

Wird dieser Kreis durch ein Ocular von der Brennweite f' betrachtet, so ist der Gesichtswinkel, unter welchem er dem Auge erscheint $= \frac{t}{f'}.\delta\nu$, also die Fläche des Bildes auf der Netzhaut dem Quadrat

$$\frac{tt}{f'f'}.\delta\nu^2$$

l, und die Undeutlichkeit wird immer desto
n, je gröfser dieser Ausdruck ist, d. h. bei
nder Brennweite des Oculars, je mehr der
des Objectivs vergröfsert wird. Man mufste
practische Untersuchungen ausmachen, wie
n der Gröfse des Halbmessers der Oeffnung
vs gehen konnte, ohne die Gegenstände zu
zu machen. Bei dem in §. 472. von Huyghens
n Fernrohr konnte t ungefähr zu 1,4 Zoll
n werden. Für ein anderes Fernrohr, wel-
be Deutlichkeit haben soll, sey der Halb-
Oeffnung $= T$, die Brennweite des Oculars
hat man

$$\frac{tt}{f'f'} = \frac{TT}{F'F'}.$$

Helligkeit erfordert nach §. 527. die Gleichung

$$\frac{tf'}{f} = \frac{TF'}{F},$$

F die Brennweiten der Objective sind. End-
an nach §. 472. noch die Gleichung

$$\frac{mm}{f} = \frac{MM}{F},$$

Vergröfserungszahl des zweiten Fernrohrs
wenn beide Fernröhren gleiche Deutlichkeit
durch das Ocular Statt findenden Winkel-
g der Farbenstrahlen besitzen sollen. Führt
f', F', die Werthe $\frac{f}{m}$, $\frac{F}{M}$ ein, so lassen sich
ichungen auch so schreiben:

$$\frac{tm}{f} = \frac{TM}{F},$$

$$\frac{t}{m} = \frac{T}{M},$$

itte schon in den beiden ersten enthalten ist.
olgt

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$
$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{f'}$$
$$\frac{1}{h''} + \frac{1}{k''} = \frac{1}{f''}$$
$$h' + k = l$$
$$h'' + k' = l'.$$

men nun die Strahlen von einem unendlich ent-ten Punkt her, so ist $h = \infty$, und sollen die hlen aus dem letzten oder Oculargla parallel mit Axe ausfahren, so ist ebenfalls $k'' = \infty$; hierdurch ciren sich vorige Gleichungen auf diese:

$$k = f; \quad h'' = f'';$$
$$h' = l - f; \quad k' = l' - f''$$
$$\frac{1}{l - f} + \frac{1}{l' - f''} = \frac{1}{f'}.$$

eichnet man aufserdem die Entfernung des Samm-spunktes der Strahlen vom Objectivglas durch F, Länge des ganzen Rohrs durch L, so hat man die Gleichungen

$$l + k' = F$$
$$l + l' = L.$$

t man statt k' seinen Werth $l' - f''$ in die Glei-g $l + k' = F$, so wird

$$l + l' - f'' = F,$$

diese Gleichung zeigt, wenn man L statt $l + l'$, dafs die Länge des ganzen Rohrs der Summe $- f''$ gleich wird, wie man schon daraus voraus-n konnte, dafs, um parallel ausfahrende Strahlen rhalten, der Brennpunkt des Oculars mit dem ge-schaftlichen Brennpunkt des Objectivs und des Col-glases zusammenfallen mufste.

§. 532.

Verbindet man die Gleichung $l + l' - f'' = L$ der frühern

$$\frac{1}{l-f}+\frac{1}{l'-f''}=\frac{1}{f'},$$

so lassen sich aus ihnen die Gröfsen l und l' bestimmen, und man erhält zur Bestimmung von $l'-f''$ die quadratische Gleichung

$$(l'-f'')^2+(l'-f'').(f-F)=f'.(f-F),$$

wo $f-F$ eine positive Gröfse seyn wird, da das Objectiv allein eine gröfsere Brennweite haben mufs, als dann, wenn die Strahlen durch das Collectivglas noch einmal zur Convergenz gebracht werden. Die Auflösung dieser quadratischen Gleichung giebt

$$l'-f''=-\tfrac{1}{2}.(f-F)+\sqrt{(f-F).(f'+\tfrac{1}{4}.f-\tfrac{1}{4}.F)},$$

wo man natürlicherweise blofs das positive Vorzeichen des Radicals gebrauchen kann, da im vorliegenden Fall $l'-f''$ positiv ist.

Den Werth von $l-f$ findet man dann

$$l-f=-\tfrac{1}{2}.(f-F)-\sqrt{(f-F).(f'+\tfrac{1}{4}.f-\tfrac{1}{4}.F)}.$$

Man hat also auch

$$k=f$$
$$k'=-\tfrac{1}{2}.(f-F)+\sqrt{(f-F).(f'+\tfrac{1}{4}.f-\tfrac{1}{4}.F)}$$
$$k''=-\tfrac{1}{2}.(f-F)-\sqrt{(f-F).(f'+\tfrac{1}{4}.f-\tfrac{1}{4}.F)}$$
$$k'''=f''.$$

§. 533.

Die Vergröfserung dieses aus drei Gläsern bestehenden Fernrohrs wird nach §. 417. durch

$$m=\frac{k.k'}{k''}.\frac{\omega+f''}{\omega f''}$$

ausgedrückt, oder wenn wir der Kürze wegen annehmen, dafs das Auge bei parallelen Strahlen deutlich sehen könne, also $\omega=\infty$ ist, so kommt

$$m=\frac{kk'}{k''f''}.$$

Aus den vorigen Werthen von k', k'' ergiebt sich aber

$$\frac{k'}{k''}=-\frac{\sqrt{4f'.(f-F)+(f-F)^2}-(f-F)}{\sqrt{4f'.(f-F)+(f-F)^2}+(f-F)}$$
$$=-\frac{k'k'}{f'.(f-F)},$$

also ohne weitere Rücksicht auf das Vorzeichen

$$m = \frac{f}{f''} \cdot \frac{k'}{f'} \cdot \frac{k'}{f - F'}$$

§. 534.

Die Winkel, unter welchen ein unter dem Winkel α gegen die Axe geneigter und durch die Mitte des Objectivs gehender Hauptstrahl die Axe nach und nach hinter jedem Glase schneidet, sind in §. 407. durch $\psi'', \psi_{,}''$ bezeichnet, und der Werth von $\psi_{,}''$, welcher hinter dem Ocularglase Statt findet, ist

$$\psi_{,}'' = \alpha'' + \frac{h''}{k''} \cdot (\alpha'' - \alpha') - \frac{h'h''}{k'k''} \cdot (\alpha' - \alpha),$$

und da ferner

$$\alpha' = -\frac{k}{h'} \cdot \alpha$$

$$\alpha'' = +\frac{kk'}{h'h''} \cdot \alpha,$$

so erhält man

$$\psi_{,}'' = \left(\frac{kk'}{h'h''} + \frac{kk'}{h'k''} + \frac{kh''}{h'k''} + \frac{kh''}{k'k''} + \frac{h'h''}{k'k''}\right) \cdot \alpha.$$

Es ist aber $k'' = \infty$, es bleibt daher blofs

$$\psi_{,}'' = \frac{kk'}{h'h''} \cdot \alpha = -\frac{f}{f''} \cdot \frac{k'}{f'} \cdot \frac{k'}{f - F} \cdot \alpha.$$

Dies ist der vergrösserte Halbmesser des Gesichtsfeldes, wenn sich das Auge im vortheilhaftesten Punkt hinter dem Ocular befindet.

§. 535.

Um diese vortheilhafteste Entfernung des Auges hinter dem Ocular zu finden, müssen wir noch den in ihrem Ausdruck vorkommenden Winkel $\psi_{,}''$ berechnen. Dieser ist nach §. 407.:

$$\begin{aligned}
\psi_{,}'' &= \alpha' + \frac{h'}{k'} \cdot (\alpha' - \alpha) \\
&= -\left(\frac{k}{h'} + \frac{k}{k'} + \frac{h'}{k'}\right) \cdot \alpha \\
&= -\frac{k}{f'} \cdot \alpha + \frac{f' \cdot (f - F)}{k'k'} \cdot \alpha \\
&= \frac{f'f' \cdot (f - F) - k'kf}{f'k'f} \cdot \alpha,
\end{aligned}$$

und nach §. 408. die vortheilhafteste Entfernung des Auges hinter dem Ocular

$$u'' = h'' \cdot \frac{a'' - \psi_{,}''}{\psi_{,,}''}$$

ist, so kommt

$$a'' - \psi_{,}'' = -\frac{f}{f''} \cdot \frac{k'}{f} \cdot \frac{k'}{f - F} \cdot a$$
$$- \frac{f'f' \cdot (f - F) - k'k'f}{f'k'k'} \cdot a$$

$$\frac{a'' - \psi_{,}''}{\psi_{,,}''} = 1 + \frac{f'f' \cdot (f - F) - k'k'f}{f'k'k'} \cdot \frac{f'f'' \cdot (f - F)}{fk'k'}$$

$$u = f'' + \frac{f'f' \cdot (f - F) - k'k'f}{fk'k'} \cdot \frac{f''f'' \cdot (f - F)}{k'k'}.$$

§. 536.

Um nun vermittelst der Längenabweichung wegen der Farbenzerstreuung eine ähnliche Berechnung der Gröfse des Objectivglases als §. 529. anstellen zu können, müssen wir die bei zwei Gläsern Statt findende Längenabweichung wegen der Farbenzerstreuung kennen; diese ist nach §. 461., wenn wir statt des negativen Vorzeichens, das daselbst gebraucht ist, das positive nehmen, welches erlaubt ist, indem dort der Abstand des Vereinigungspunktes der mittlern Strahlen von den der violetten bestimmt ist, wir aber vermittelst des positiven Vorzeichens den Unterschied der Vereinigungsweiten der mittlern und rothen Strahlen finden,

$$\delta k' = + k'k' \cdot \left(\frac{\delta \nu'}{f'} + \frac{\delta \nu}{f} \cdot \frac{kk}{h'h'} \right).$$

Da wir aber annehmen dürfen, dafs das Objectivglas aus derselben Glasart besteht, als das Collectivglas, so werden die Brechungsverhältnisse beider Gläser, also auch ihre Zerstreuungsverhältnisse, gleich, d. h. es ist $\delta r = \delta \nu'$, und hierdurch wird dann

$$\delta k' = \delta \nu \cdot \left(\frac{k'k'}{f'} + \frac{kk}{f} \cdot \frac{k'k'}{h'h'} \right).$$

bstituirt man hierin die Werthe von k und $\frac{k'}{k}$ aus
532 und §. 533., so ergiebt sich

$$\delta k' = \delta v \cdot \left(\frac{k'k'}{f'} + f \cdot \frac{k'^4}{f'f' \cdot (f-F)^2}\right)$$
$$= \delta v \cdot \frac{k'k'}{f'} \cdot \frac{f' \cdot (f-F)^2 + fk'k'}{f' \cdot (f-F)^2}.$$

§. 537.

Um hieraus den Halbmesser des Farbenkreises zu
den, der sich auf einer Ebene bildet, welche senk-
ht auf die Axe durch den Vereinigungspunkt der
ttlern Strahlen gelegt ist, mufs man die Gröfse $\delta k'$
rch die Tangente desjenigen Winkels multipliciren,
lchen ein auf den Rand des Objectivs fallender Licht-
ahl nach seiner zweimaligen Brechung durch das
jectiv und das Collectivglas mit der Axe bildet, wo
n wegen der Kleinheit der Winkel statt der Tan-
nte den Winkel selbst setzen kann. Bezeichnet man
se Winkel hinter den ersten und zweiten Glase durch
, φ_1'', die Entfernungen von der Axe, in welchen
Strahl die Gläser trifft, durch t, t', so hat man
h §. 404.

$$t' = -h'\varphi'', \quad t'' = -h''\varphi_1''$$
$$t' = -\frac{h'}{k} \cdot t$$
$$t'' = -\frac{h'h''}{kk'} \cdot t,$$

$\varphi_1'' = -\frac{t''}{h''} = \frac{h'}{kk'} \cdot t$. Substituirt man hierin die
rthe von k und $\frac{h'}{k'}$, so kommt

$$\varphi_1'' = -\frac{f'}{f} \cdot \frac{f-F}{k'} \cdot \frac{t}{k'},$$

glich wird der Halbmesser des Farbenkreises, wenn
das negative Vorzeichen vernachlässigen,

$$\varphi''.\delta k' = t\delta\nu.\frac{f'.(f-F)^2+fk'k'}{ff'.(f-F)},$$

und wir finden hieraus den Winkel, unter welchem er dem Auge erscheint, wenn wir durch die Brennweite des Ocularglases f'' dividiren,

$$= \delta\nu.\frac{t}{f''}.\frac{f'.(f-F)^2+fk'k'}{ff'.(f-F)}.$$

§. 538.

Was die Undeutlichkeit wegen der Winkelabweichung der verschiedenen farbigen Strahlen durch das Ocular gesehen betrifft, so hat man die Winkelabweichung durch drei Gläser nach §. 469.

$$\delta\gamma'' = \frac{kk'}{h'h''}.t.\left[\frac{\delta\nu}{f}+\frac{\delta\nu'}{f'}.\frac{h'h'}{kk}+\frac{\delta\nu''}{f''}.\frac{h'h'}{kk}.\frac{h''h''}{k'k'}\right],$$

und wenn die Glasarten als gleich zerstreuend angesehen werden, so ist $\delta\nu = \delta\nu' = \delta\nu''$, also auch

$$\delta\gamma'' = \frac{kk'}{h'h''}.t.\frac{\delta\nu}{f}.\left[1+\frac{f}{f'}.\frac{h'h'}{kk}+\frac{f}{f''}.\frac{h'h'}{kk}.\frac{h''h''}{k'k'}\right].$$

In §. 471. haben wir das Maafs der hiervon abhängenden Undeutlichkeit durch $\frac{1}{K}$ bezeichnet, und gezeigt, dafs diese Gröfse gefunden wird, indem diese Winkelabweichung durch den Halbmesser der Oeffnung des letzten Glases dividirt wird. Bezeichnen wir diese durch t, so ist

$$t'' = \frac{h'h''}{kk'}.t,$$

folglich wird auch

$$\frac{1}{K} = \left(\frac{kk'}{h'h''}\right)^2.\frac{\delta\nu}{f}.\left[1+\frac{f}{f'}.\frac{h'h'}{kk}+\frac{f}{f''}.\frac{h'h'}{kk}.\frac{h''h''}{k'k'}\right].$$

Es wird aber vermittelst der in §. 532 und 533. angegebenen Werthen

$$\frac{kk'}{h'h''} = -\frac{f}{f''}.\frac{k'k'}{f'.(f-F)}$$

$$\frac{h'h'}{kk} = \frac{k'k'}{kk}.\frac{h'h'}{k'k'} = \frac{f'f'}{ff}.\frac{(f-F)^2}{k'k'}$$

$$\frac{h'h'}{kk}.\frac{h''h''}{k'k'} = \frac{f''f''}{ff}.\frac{f'f'.(f-F)^2}{k'^4}.$$

Man erhält daher

$$\frac{1}{K} = \frac{\delta v}{f} \cdot \left\{ \begin{array}{l} + \frac{ff}{f''f''} \cdot \frac{k'k'}{f'f'} \cdot \left(\frac{k'}{f - F}\right)^2 \\ + \frac{k'k'}{f''f''} \cdot \frac{f}{f'} + \frac{f}{f''} \end{array} \right\}$$

§. 539.

In den jetzigen Zeiten wendet man bei astronomischen Fernröhren keine andern Objectivgläser an, als solche, welche achromatisch und aplanatisch sind. Sie bestehen aus zwei Gläsern, welche sehr nahe hinter einander liegen, von denen das vordere ein Sammlungsglas von Kronglas, welches weniger die Farben zerstreut, das hintere ein Zerstreuungsglas von Flintglas ist, welches eine stärkere Zerstreuungskraft gegen die Farben besitzt. Wie man nun aus den gegebenen Brechungsverhältnissen und Zerstreuungsverhältnissen beider Glasarten die Krümmungen der Gläser berechnet, ist früher gezeigt worden, und wir haben uns jetzt blofs mit den Wirkungen des Oculars auf das im Focus dargestellte Bild zu beschäftigen. Bezeichnen wir den Winkel, unter welchem der gebrochene Strahl die Axe schneidet, durch φ'', den Winkel, welchen der vom Mittelpunkt der Krümmung nach dem Einfallspunkt auf der vordern Fläche gezogene Radius mit der Axe macht, durch θ, durch r und ϱ die Krümmungshalbmesser des Oculars, durch c seine Dicke, so hat man nach §. 379., in so fern man die Winkel φ'', θ als sehr klein ansieht, die Gleichung

$$\sin \varphi'' = \frac{n\varrho - c.(n-1)}{\varrho} \cdot \left(1 - \frac{1}{n} - \frac{r}{hn}\right) . \sin \theta + \frac{(n-1).r}{\varrho} \cdot \sin \theta,$$

wo n das Brechungsverhältnifs für die mittlern Strahlen bedeutet.

Setzt man in dieser Gleichung $n + \delta n$ statt n, so erhält man den Winkel der violetten Strahlen mit der Axe

$$\sin\varphi'' = (n-1).\sin\theta - \frac{r}{f}\cdot\sin\theta + \frac{(n-1).r}{\varrho}\cdot\sin\theta + \delta n.\sin\theta + \delta n\cdot\frac{r}{\varrho}\cdot\sin\theta.$$

Da nun aber die drei ersten Glieder dieser Gleichung

$$(n-1).\sin\theta - \frac{r}{f}\cdot\sin\theta + \frac{(n-1).r}{\varrho}\cdot\sin\theta$$

den Winkel angeben, welchen die mittlern Strahlen mit der Axe bilden, und welcher Null ist, so bleibt blofs

$$\sin\varphi'' = \delta n.\left(1+\frac{r}{\varrho}\right).\sin\theta$$
$$= \delta\nu.(n-1).\left(1+\frac{r}{\varrho}\right).\sin\theta.$$

Aus diesem positiven Werth von $\sin\varphi''$ sieht man, dafs die violetten Strahlen hinter dem Ocular convergiren; für die rothen würde das Brechungsverhältnifs $n - \delta n$ werden, und der Ausdruck des $\sin\varphi''$ ist

$$= -\delta\nu.(n-1).\left(1+\frac{r}{\varrho}\right).\sin\theta,$$

welches eine Divergenz der rothen Strahlen hinter dem Ocular anzeigt.

§. 543.

Nach §. 540. ist mit Vernachlässigung der Dicke des Glases

$$r = \frac{(n-1).\varrho f}{\varrho - (n-1).f}$$
$$\frac{r+\varrho}{\varrho} = \frac{\varrho}{\varrho-(n-1).f},$$

also, wenn man diesen Werth in die Gleichung

$$\sin\varphi'' = \delta\nu.(n-1).\left(1+\frac{r}{\varrho}\right).\sin\theta$$

substituirt, so kommt

$$\sin\varphi'' = \delta\nu.(n-1)\cdot\frac{\varrho}{\varrho-(n-1).f}\cdot\sin\theta.$$

Bezeichnet man die Oeffnung des Objectivs durch T, und die Entfernung desjenigen Punktes des Oculars von der Axe, wohin der Randstrahl fällt, durch t, so hat man, wenn F die Brennweite des Objectivs bezeichnet,

$$\frac{T}{F} = \frac{t}{f},$$

und da $\frac{t}{f}$ den Winkel ausdrückt, unter welchem der äufserste vom Bilde ausgehende Strahl gegen die Axe geneigt ist, den wir in §. 379. durch φ bezeichnet haben, so hat man, vermöge der daselbst befindlichen Gleichung,

$$\sin\varphi = \frac{r}{h}\cdot\sin\theta$$

$$= \frac{r}{f}\cdot\sin\theta,$$

auch diese andere

$$\frac{T}{F} = \frac{r}{f}\cdot\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{T}{F}\cdot\frac{f}{r},$$

oder, wenn man statt r seinen Werth

$$r = \frac{(n-1).\varrho f}{\varrho - (n-1).f}$$

einführt, so kommt

$$\sin\theta = \frac{T}{F}\cdot\frac{\varrho - (n-1).f}{(n-1).\varrho},$$

und der Werth von $\sin\varphi''$ wird ganz einfach

$$\sin\varphi'' = \frac{T}{F}\cdot\delta\nu.$$

§. 544.

Denkt man sich durch den Ort des Auges hinter dem Ocular, welches in einer Entfernung, die der Brennweite f des Oculars gleich kommt, sich befinden mufs, eine Ebene senkrecht auf die Axe gelegt, und fängt man die aus dem Ocular hervortretenden Strahlen

durch diese Ebene auf, so bilden die mittlern Farbenstrahlen einen Kreis vom Halbmesser

$$t = \frac{f}{F} \cdot T,$$

die violetten Farbenstrahlen einen Kreis vom Halbmesser

$$t - f \cdot \sin \varphi'' = \frac{f}{F} \cdot T - f \cdot \frac{T}{F} \cdot \delta\nu,$$

und die rothen Farbenstrahlen einen Kreis vom Halbmesser

$$t + f \cdot \sin \varphi'' = \frac{f}{F} \cdot T + \frac{f}{F} \cdot T\delta\nu.$$

Innerhalb desjenigen Kreises, welchen die violetten Strahlen angeben, werden die Farben vollkommen gemischt seyn, also dasselbe Licht zeigen, welches das von Objectiv hergebrachte Bild, oder der Gegenstand selbst hat; allein innerhalb des concentrischen Kreisringes, der sich innerhalb der Gränzen des violetten und rothen Kreises befindet, wird eine Färbung vorherrschen, und die Breite dieses farbigen Ringes, an dessen äufsern Ende das Roth sich befindet, wird durch

$$2 \cdot \frac{f}{F} \cdot T\delta\nu$$

ausgedrückt. Wir sehen also, dafs auf der Ebene die rothen Strahlen das Bild begrenzen, das Auge hingegen wird, da die violetten Strahlen am stärksten convergiren, am Rand eine violette oder blaue Einfassung des Bildes erblicken. Obgleich daher das Objectivglas achromatisch ist, so wird doch durch ein einfaches Ocularglas wieder eine, wiewohl geringe, Farbenzerstreuung hervorgebracht werden.

§. 545.

Bringen wir jetzt zwei Oculare an, und bezeichnen den Winkel, unter welchem ein gebrochener Strahl die Axe hinter dem ersten derselben schneidet, durch φ'', hinter dem zweiten durch φ_1'', und nehmen an, die Entfernung von der Axe, in welcher der Strahl auf das

[illegible] Glas [illegible], sey t, so hat man aus §. 404., wenn wir [illegible] Vorzeichen nicht berücksichtigen, die Gleichung

$$v' = \frac{h't}{kk'}.$$

Ferner seyen die Brennweiten der Gläser f, f', die Entfernung beider Gläser von einander $= l$, so wird

$$\bar{k} + \bar{h} = l$$

$$\frac{1}{\bar{k}} + \frac{1}{\bar{h}} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{\bar{k}} + \frac{1}{\bar{h}'} = \frac{1}{f'}.$$

und hieraus erhält man

$$\bar{k} = \frac{hf}{h - f};$$

$$\bar{k} = \frac{l.(h - f) - hf}{h - f}$$

$$\bar{k} = \frac{lf'.(h - f) - hff'}{(l - f').(h - f) - hf}$$

wogegen wird durch Substitution dieser Werthe

$$v' = \frac{t}{h} \cdot \frac{(l - f').(h - f) - hf}{ff'}.$$

§. 546.

Differentirt man diesen Ausdruck nach dem Zeichen [illegible] indem v', f', f'', als veränderlich betrachtet werden, so kommt

$$hv' = \frac{t}{h} \cdot \frac{u}{fff'f'},$$

indem wir der Kürze wegen

$$-\delta f'.(h - f) + \delta f.(l - f') - h\delta f)$$
$$-(\delta f' + f'\delta f).(l - f').(h - f) - hf) = u$$

setzen. Bezeichnen wir ferner die Zerstreuungsverhältnisse beider Gläser durch δv, $\delta v'$, so ist nach §. 461.

$$\delta f = -f\delta v, \quad \delta f' = -f'\delta v',$$

und der Werth von u läſst sich auch so schreiben:

$$u = ff'\delta v h.(l - f')$$
$$+ ff'\delta v.(lh - lf - hf),$$

ıd hierdurch wird die Aenderung des Winkels $\varphi_{,}''$, dem man von den mittlern Strahlen zu den violetten ›ergeht,

$$\delta\varphi'' = \frac{t}{h}\cdot\delta\nu\cdot\frac{h.(l-f')}{ff'} + \frac{t}{h}\cdot\delta\nu'\cdot\frac{lh-lf-hf}{ff'}.$$

§. 547.

Sollen nun die mittlern Strahlen hinter dem zweiten las der Axe parallel auslaufen, so mufs $\varphi_{,}'' = o$ wer- n, und dies giebt die Gleichung

$$(l-f').(h-f) - hf = o.$$

›llen ferner auch die violetten und folglich auch die then Strahlen parallel mit der Axe hinter dem zweiten lase ausfahren, so wird ebenfalls $\delta\varphi_{,}'' = o$ gesetzt :rden müssen, wodurch man erhält:

$$h\delta\nu.(l-f') + \delta\nu'.(lh-lf-hf) = o.$$

ie erste Gleichung giebt

$$h = \frac{(l-f').f}{l-f'-f},$$

ıd wenn man diesen Werth in die zweite substituirt, wird

$$o = \frac{(l-f')^2.f}{l-f'-f}\cdot\delta\nu + \frac{fff'}{l-f'-f}\cdot\delta\nu',$$

ler mit f dividirt und den gemeinschaftlichen Nenner eggelassen

$$o = (l-f')^2.\delta\nu + ff'\delta\nu'.$$

us dieser Formel läfst sich eine der drei Gröfsen f, , l ableiten, wenn die beiden andern gegeben sind, ıd man sieht, dafs durch Verbindung zweier Oculare ın verschiedenen Glasarten, die Abweichung wegen :r Farbenzerstreuung beim Durchgange durch das cular gehoben werden kann.

Aus §. 417. folgt, dafs, wenn die Brennweite des bjectivs $= F$ gesetzt wird, die Vergröfserung sich ırch die Formel

$$m = \frac{Fk}{hf'}$$

läser enthält, und die zuerst Rheita angegeben hat, ann man auch aus drei Gläsern ein Fernrohr zusam- ensetzen, welches die Bilder aufrecht zeigt. Es sey ie Brennweite des Objectivs $= f$, die Brennweite des rsten Oculars $= f'$, welches hinter dem Bilde, das urch das Objectiv entsteht, in einer Entfernung $e > f'$ ufgestellt wird, so giebt dieses Ocular ein zweites Bild der Entfernung k', wo k' durch die Gleichung

$$\frac{1}{k'} = \frac{1}{f'} - \frac{1}{e},$$

$$k' = \frac{ef'}{e - f'}$$

estimmt wird. Dieses zweite Bild erscheint aufrecht, o wie der Gegenstand selbst, und betrachtet man asselbe durch ein zweites Ocular von der Brennweite '', so hat man ein terrestrisches Fernrohr. Die Länge es ganzen Fernrohrs, oder die Entfernung des Ob- ectivs vom zweiten Ocular, wird

$$= f + e + k' + f''$$

$$= f + \frac{ee}{e - f'} + f''.$$

Da die Entfernung e ganz willkürlich ist, wenn sie nur röfser als f' genommen wird, so kann man dieselbe urch die Bedingung bestimmen, dafs die Länge des ernrohrs so gering als möglich wird. Dann mufs

$$d \cdot \frac{ee}{e - f'} = o$$

eyn, und man erhält

$$e - 2f' = o,$$

lso wird die Länge des Fernrohrs in diesem Fall

$$= f + 4f' + f''.$$

Die Vergröfserung ist nach §. 417., wenn sie durch m ezeichnet wird,

$$m = \frac{kk'}{k'f''},$$

nd da wir in vorliegendem Fall allgemein $k = f$,

$h' = e$, $k' = \frac{ef'}{e - f'}$, $h'' = f''$ haben, so ist auch

$$m = \frac{ff'}{(e - f').f''},$$

und für $e = 2f'$, $m = \frac{f}{f''}$, also dieselbe wie für ein aus dem Objective und dem zweiten Oculare zusammengesetztes astronomisches Fernrohr. Um das Gesichtsfeld zu finden, hat man nach §. 407.

$$\psi_{,}'' = + \alpha' + \frac{h'}{k'} \cdot (\alpha' - \alpha)$$

$$\psi_{,,}'' = + \alpha'' + \frac{h''}{k''} \cdot (\alpha'' - \psi_{,}'')$$

$$\alpha' = - \frac{k}{h'} \cdot \alpha = - \frac{f}{2f'} \cdot \alpha$$

$$\alpha'' = + \frac{kk'}{h'h''} \cdot \alpha = + \frac{f}{2f'} \cdot \frac{2f'}{f''} \cdot \alpha = \frac{f}{f''} \cdot \alpha.$$

Da nun hinter dem zweiten Ocular die Strahlen parallel mit der Axe ausfahren, so ist $k'' = \infty$, folglich bleibt

$$\psi_{,,}'' = \alpha'' = \frac{f}{f''} \cdot \alpha.$$

Nach §. 408. ist die Entfernung, in welcher ein durch die Mitte des Objectivs unter dem Winkel α gegen die Axe geneigter Strahl hinter dem zweiten Ocular die Axe schneidet,

$$u'' = h'' \cdot \frac{\alpha'' - \psi_{,}''}{\psi_{,,}''}.$$

Wir haben aber

$$\alpha'' = + \frac{f}{f''} \cdot \alpha$$

$$\psi_{,}'' = - \frac{f}{2f'} \cdot \alpha - \frac{f}{2f'} \cdot \alpha - \alpha$$

$$= - \frac{f + f'}{f'} \cdot \alpha,$$

folglich hieraus

$$u''.\psi_{,,}'' = + \frac{f''.(f + f')}{f'} \cdot \alpha + f\alpha.$$

un ist aber, wie man leicht sieht, $u''\psi_{,}''$ nichts an-
ers, als die halbe Oeffnung des letzten Oculars, welche
forderlich ist, um die unter dem Winkel α durch die
itte des ersten Glases fallenden Strahlen durch zu
ssen. Bezeichnet man diese durch t'', so wird

$$t'' = \frac{ff' + (f + f') \cdot f''}{f'} \cdot \alpha$$

$$\alpha = \frac{f't''}{ff' + (f + f') \cdot f''},$$

nd dieser Werth von α würde die Gröfse des halben
esichtsfeldes darbieten, welche man durch ein solches
ernrohr erhält. Setzt man aufserdem die Brennweiten
er beiden Oculargläser gleich, $f' = f''$, so bleibt

$$\alpha = \frac{t''}{2f + f''}.$$

ei dem zuerst angeführten Erdfernrohr würde, wenn
e Brennweiten aller drei Oculare gleich gesetzt wer-
en, $= f''$, die Gröfse des halben Gesichtsfeldes eben
, wie bei einem astronomischen Fernrohr, das die
bjectivbrennweite $= f$, und Ocularbrennweite $= f''$,
at, durch die Formel

$$\alpha = \frac{t''}{f + f''}$$

efunden werden, also beinahe doppelt so grofs, als
ei der so eben betrachteten Einrichtung mit zwei
cularen.

Man hat aufserdem auch wohl noch Erdfernröhre
rfertigt, welche aus fünf Gläsern bestehen, von denen
is eine als Collectivglas zwischen dem Objectiv und
em durch dasselbe hervorgebrachten Bilde aufgestellt
rd.

§. 551.

Bezeichnet man den Halbmesser der Krümmung eines sphärischen Hohlspiegels durch r, die Entfernung des in der Axe liegenden Objects von dem Mittelpunkt der Krümmung durch h, die Entfernung des Durchschnittspunkts des reflectirten Strahls mit der Axe ebenfalls vom Mittelpunkt der Krümmung durch x, den Winkel, welchen der nach dem Einfallspunkt gezogene Radius mit der Axe bildet, durch α, so hat man nach §. 263. den Ausdruck

$$x = \frac{rh}{2h \cdot \cos\alpha + r}.$$

Nun sey die Entfernung des Objects von der Mitte des Spiegels $= H$, die Entfernung des Durchschnittspunkts des reflectirten Strahls von der Mitte des Spiegels $= K$, so ist

$$h = H - r, \quad x = r - K,$$

also, wenn man diese Werthe in die vorige Gleichung substituirt,

$$r - K = \frac{Hr - rr}{2.(H - r).\cos\alpha + r},$$

und hieraus ergiebt sich

$$K = \frac{H.(2.\cos\alpha - 1) + 2r.(1 - \cos\alpha)}{2.(H - r).\cos\alpha + r} \cdot r.$$

Bezeichnet man die Entfernung des Einfallspunkts von der Axe des Spiegels durch T, so ist

$$T = r.\sin\alpha,$$

folglich, wenn man die das Quadrat von $\frac{T}{r}$ übersteigenden Potenzen vernachlässigt, erhält man

$$\cos\alpha = 1 - \frac{TT}{2rr}.$$

Substituirt man diesen Werth in den Ausdruck von K, so wird

$$K = \frac{H - (H - r) \cdot \frac{TT}{rr}}{(2H - r) - (H - r) \cdot \frac{TT}{rr}} \cdot r$$

$$= \left(\frac{H - r}{H - r}\right)^2 \cdot \frac{TT}{r}.$$

Man setze den Werth von K, welcher sich ergiebt, wenn $T = o$, $H = \infty$ genommen wird, $= F$, so ist F die Brennweite des Spiegels $= \frac{1}{2}r$, und wenn man diese Gröfse statt r einführt, so kommt

$$K = \frac{HF}{H-F} - \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{H-2F}{H-F}\right)^2\cdot\frac{TT}{F}.$$

§. 552.

Es sey ABM (Fig. 60.) ein sphärischer Spiegel von der Brennweite $= F$, auf dessen Punkt M in der Entfernung von der Axe $MP = T$ ein Strahl von einem Object gefallen ist, dessen Entfernung, von B aus gerechnet, $= H$ ist, und dieser Strahl werde nach MQM' zurückgeworfen, so wird die Entfernung BQ des Durchschnittspunktes des zurückgeworfenen Strahles mit der Axe durch den im vorigen §. gegebenen Werth von K ausgedrückt. In M' treffe dieser Strahl einen andern Hohlspiegel $A'B'M'$, dessen Axe mit der des erstern zusammenfällt, und der von diesem zweiten Hohlspiegel zurückgeworfene Strahl sey $M'Q'$. Setzt man nun die Brennweite des zweiten Spiegels F', $QB' = H'$, $Q'B' = K'$, $M'P' = T'$, so erhält man die Gleichung

$$K' = \frac{H'F'}{H'-F} - \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{H'-2F'}{H'-F'}\right)^2\cdot\frac{T'T'}{F'}.$$

Ferner hat man die Proportion $MP : PQ = M'P' : P'Q$, oder da man mit Vernachlässigung der Potenzen von T, T', die das Quadrat übersteigen, die Längen PQ, $P'Q$, mit BQ, $B'Q$ oder K, H' vertauschen kann, so wird

$$T : K = T' : H'$$

$$T' = \frac{H'.T}{K},$$

oder, wenn man statt K seinen Werth aus der ersten Gleichung

$$K = \frac{H.F}{H-F}$$

stituirt, so wird

$$T' = \frac{H'.(H-F)}{HF} \cdot T.$$

§. 553.

Setzt man diesen Werth in den Ausdruck von K', erhält man

$$= \frac{H'.F'}{H'-F'} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{H'-2F'}{H'-F'}\right) \cdot \left(\frac{H-F}{H}\right)^2 \cdot \left(\frac{H'}{F}\right)^2 \cdot \frac{T^2}{F'},$$

für einen sehr entlegenen Gegenstand, wo $H = \infty$, bt blofs

$$= \frac{H'.F'}{H'-F'} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{H'-2F'}{H'-F'}\right)^2 \cdot \left(\frac{H'}{F}\right)^2 \cdot \frac{T^2}{F'}.$$

die Entfernung beider Spiegel von einander $= L$, wird

$$K + H' = L,$$

er da rücksichtlich der Axenstrahlen des ersten Spie- s $K = F$, so ist auch

$$H' = L - F,$$

l hierdurch wird, wenn man H' eliminirt

$$= \frac{(L-F).F'}{L-F-F'} - \frac{1}{8} \cdot \left(\frac{L-F-2F'}{L-F-F'}\right)^2 \cdot \left(\frac{L-F}{F}\right)^2 \cdot \frac{T^2}{F'}.$$

§. 554.

Sollen die Axenstrahlen vom zweiten Spiegel so ückgeworfen werden, dafs das Bild des Gegenstandes die Oberfläche des ersten Spiegels fällt, so wird $= L$, folglich

$$L.(L - F - F') = (L - F).F'.$$

eraus ergiebt sich

$$F' = \frac{(L-F).L}{2L-F},$$

l der Werth von K' für Strahlen, die in der Ent- nung $= T'$ von der Axe auf den ersten Spiegel en, wird

$$K' = L - \frac{1}{8} \cdot \frac{(2L-F)}{L-F} \cdot \frac{TT}{L}.$$

Um die Größe des Bildes zu erfahren, welches nach einer einmaligen Zurückwerfung vom Gegenstand entsteht, hat man nach §. 277., wenn h die Entfernung des Gegenstandes vom Mittelpunkt der Krümmung des Spiegels bedeutet, l die Größe des Gegenstandes und η diejenige des Bildes ist,

$$\eta = -\frac{lr}{2h + r},$$

wo das negative Vorzeichen die entgegengesetzte Lage des Bildes gegen die des Gegenstandes genommen anzeigt. Setzt man hierin $H - r$ statt h, wo wie früher H die Entfernung des Gegenstandes von der Wand des Spiegels angiebt, und $2F$ statt r, so ist für die Größe des nach der ersten Zurückwerfung entstandenen Bildes

$$\eta = -\frac{lF}{H - F}.$$

Führt man statt l den Gesichtswinkel, unter welchen der Gegenstand erscheint, ein, und bezeichnet selbigen durch ε, so ist, da ε immer klein bleiben wird, $l = H\varepsilon$, also

$$\eta = -\frac{HF}{H - F}\cdot\varepsilon.$$

Die Entfernung des Bildes vom Spiegel ist übrigens immer der Sammlungsweite der Strahlen vom Spiegel gleich.

§. 555.

Es wird also ein Bild im Punkt Q (Fig. 60.) entstehen, und indem dessen Strahlen auf den zweiten Spiegel AB fallen, wird durch die Zurückwerfung ein neues Bild in Q' hervorgebracht. Man setze dessen Größe $= \eta'$, so wird man η' aus der Formel

$$\eta' = -\frac{lF}{H - F}$$

finden, indem in derselben η', H', F', η statt η, H, F, l gesetzt werden. Hierdurch erhält man

$$\eta' = -\frac{\eta F'}{H' - F'},$$

r, wenn man hierin statt η seinen Werth

$$\eta = -\frac{HF}{H - F} \cdot 6$$

stituirt, so kommt

$$\eta' = \frac{F}{H - F} \cdot \frac{F'}{H' - F'} \cdot H6.$$

so fern wir nun bei Telescopen blofs sehr entfernte genstände zu betrachten haben, wird $H = \infty$, und rdurch reducirt sich der Werth von η' auf

$$\eta' = \frac{FF'}{H' - F'} \cdot 6.$$

zeichnet man, wie früher, den Abstand beider Spiegel einander durch L, so hat man für den Fall, dafs Gegenstand unendlich weit entfernt ist, nach §. 553.,

$$H' = L - F,$$

l hierdurch ergiebt sich

$$\eta' = \frac{FF'}{L - F - F'} \cdot 6.$$

nn nun das Bild auf den ersten Spiegel zurück- en soll, wie §. 554. angenommen wurde, so hat man die Brennweite des zweiten Hohlspiegels die Gleichung

$$F' = \frac{(L - F) \cdot L}{2L - F},$$

l für diesen Fall wird der Werth von

$$\eta' = \frac{LF}{L - F} \cdot 6.$$

§. 556.

Die verschiedenen Arten von Telescopen unter- eiden sich von einander blofs durch die Gestalt des inen zweiten Spiegels; je nachdem dieser eben, hohl r erhaben ist, erhält man das Newtonsche, Gre- ianische und Cassegrainsche Telescop. Es würde in den vorigen Formeln für das Newtonsche lescop $F' = \infty$, für das Gregorianische F' positiv,

für das Cassegrainsche F' negativ genommen werden müssen, und man sieht übrigens, dafs vorige Formeln für den Normalfall des Gregorianischen Telescopes entwickelt sind. Bei dem Newtonschen Telescop ist übrigens zu bemerken, dafs die Ebene des kleinen Planspiegels nicht senkrecht auf der Axe des Hohlspiegels steht, sondern unter einem Winkel von 45° gegen dieselbe geneigt sind, wodurch die Strahlen unter einem Winkel von 90° gegen die Axe zurückgeworfen werden, und man das Bild durch ein seitwärts in die Röhre des Telescops gestecktes Ocularrohr betrachtet. Es ist freilich nöthig, dafs dieser Planspiegel die Strahlen eher auffängt, als sich die reflectirten Strahlen zu einem Bilde vereinigt haben. Das bekannte grofse Herschelsche Telescop, dessen Spiegel vier Fufs Oeffnung und vierzig Fufs Brennweite hat, ist nach dieser Art eingerichtet. Oefters liefs jedoch Herschel den Planspiegel weg, und betrachtete das Bild, welches vom Hohlspiegel hervorgebracht wurde, gradezu mit einem Ocularglas, indem er die Axe des Spiegels nicht in die Richtung des zu beobachtenden Objects, sondern etwas darunter brachte, so dafs das Bild an dem untern Theile des Rohrs entstand; auf diese Art war der durch den Kopf des Beobachters hervorgebrachte Lichtverlust nur unbedeutend. Hierdurch wurde bedeutend an Licht gewonnen, da bekanntlich die Metallspiegel bei der Zurückwerfung fast die Hälfte des Lichts verschlucken.

§. 557.

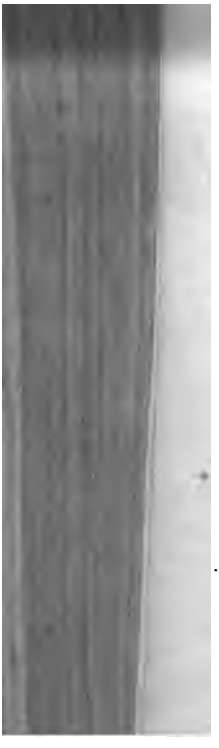
Bei dem Gregorianischen und Cassegrainschen Telescop sind die Spiegel in einem solchen Verhältnifs zu einander gestellt, dafs, während ihre Axen zusammenfallen, das Bild, welches durch die doppelte Zurückwerfung entsteht, auf die Oberfläche des ersten Spiegels, der die Strahlen von den Objecten direct erhält, fallen, und natürlicherweise wird dies Bild in der

itte dieses Hauptspiegels liegen müssen. Um also sselbe sehen zu können, wird der Spiegel in der itte durchbohrt, und daselbst eine Ocularröhre ange-acht. Es gehen freilich bei diesen Telescopen sehr el Strahlen verloren, indem theils der kleinere Fang-iegel eine Menge derselben aufhält, theils die Durch-ohrung des Spiegels grade die Strahlen, die in der itte des Spiegels auffallen, und welche am meisten einem guten Bilde beitragen, wegnimmt. Da übri-ens das entstandene Bild farblos ist, indem bei der eflexion des Lichts keine Zerlegung in Farben vor ch geht, so kann man dasselbe als von einem achro-atischen Objectiv entstanden ansehen, und die Rech-ung für die Oculare grade so wie bei den Fernröhren ihren, indem die Abweichung wegen der Kugelgestalt ei der geringen Dimension der Spiegel vernachlässigt erden kann. Man wird die Brennweite des Objectiv-lases, welches man an die Stelle der beiden Spiegel esetzt denken kann, durch $\frac{LF}{L-F}$ darstellen können, dem dieses ein unter dem Gesichtswinkel 6 gesehenes bject in eben dem Maafse vergröfsert, als es die bei-en Spiegel thun, wie aus §. 555. leicht zu sehen ist.

Von den Microscopen.

§. 558.

So wie Fernröhre und Telescope dazu dienen, um hr entfernte Objecte deutlich und gröfser als mit ofsen Augen zu sehen, so werden die Microscope an-ewandt, um Gegenstände, die sehr nahe und wegen rer Kleinheit dem bloſsen Auge unsichtbar sind, ver-röfsert zu erhalten. Schon ein einfaches erhabenes



Auge, zu acht Zoll an,
der Gesichtswinkel in S

$$\frac{2062}{80}$$

ausgedrückt werden.
einem so kleinen Gesich
stände, die im Ganzen
Auge unsichtbar, und
kleinsten Gesichtswinkel
sichtbar zu werden, zu

Bezeichnen wir dah
Gegenstand vom Auge
Gesichtswinkel von zwei
erscheinen, durch x,
von x die Gleichung

$$\frac{2062}{x.10}$$

und hieraus folgt

$$x =$$

Bringt man aber einen
Auge, so wird man wege

$= r$, $c = 2r$, so kommt

$$k = \frac{h.(2-n) + 2r}{2h.(n-1) - r.(2-n)} \cdot r,$$

nd dieser Ausdruck giebt die Sammlungsweite k der trahlen von der hintern Seite einer Kugel an, deren albmesser $= r$ ist, wenn die Entfernung des Objects n der vordern Seite $= h$ ist. Sieht man nun das uge als eine Kugel an, für welche $r = 6$ Linien, $= \frac{4}{3}$, und substituiren wir hierin

$$h = 20{,}6 \text{ Linien},$$

erhalten wir $k = 15{,}9$ Linien, also geschieht die ereinigung erst weit hinter dem hintern Theil des Auges.

§. 560.

Die geringste Gröfse, welche ein Gegenstand haen kann, um auf die Entfernung von acht Zoll so ben sichtbar zu seyn, findet sich durch die Gleichung

$$\frac{206265.y}{8} = 120,$$

o y diese Gröfse bedeutet. Man erhält hieraus $\frac{1}{215}$ Zoll; le Gegenstände, die kleiner sind, würden daher nicht eutlich erkannt werden können, wenn die convexen insen uns nicht ein Mittel hierzu an die Hand gäben. lan nehme eine Glaslinse von der Brennweite $= f$, nd stelle das Auge dicht hinter dieselbe, bringe das bject in die Entfernung h von der Linse, so entsteht n Bild desselben in der Entfernung k, die durch die hon oft gebrauchte Gleichung

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{h} = \frac{1}{f}$$

estimmt wird. Da das Bild vor das Glas fallen mufs, mufs k negativ werden, also h kleiner als f seyn. erner mufs das Bild an eine solche Stelle fallen, dafs e durch das Glas gebrochenen Strahlen eine schickhe Divergenz haben, um einen deutlichen Eindruck f der Netzhaut hervorzubringen: dies geschieht, wenn e besagte Entfernung k der Gesichtsweite, auf welche

man deutlich sieht, gleich wird, und wir bezeichnen diese durch ω; dann giebt vorige Gleichung diese:

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{h} - \frac{1}{f}$$

$$h = \frac{\omega f}{\omega + f}.$$

Da nun die durch die Mitte des Glases von den Rändern des Objects gehenden Strahlen ungebrochen bleiben, so folgt, daſs der Gesichtswinkel einerlei bleibt, man mag das Object in der Entfernung h vom Auge mit bloſsem Auge, oder vermittelst der Glaslinse betrachten. Ist nun die lineare Gröſse des Objects $= \lambda$, so wird der Gesichtswinkel $= \frac{\lambda}{h}$, oder, wenn man statt h seinen Werth setzt,

$$= \frac{\lambda . (\omega + f)}{\omega f},$$

und man sieht aus dieser Gleichung, daſs der Gesichtswinkel desto gröſser wird, je kleiner f ist. Da ferner ω gegen f immer bedeutend ausfällt, so kann man ohne Fehler ω statt $\omega + f$ setzen, und es bleibt dann der Gesichtswinkel $= \frac{\lambda}{f}$.

§. 561.

Die Vergröſserungszahl selbst wird gefunden, indem man den Gesichtswinkel sucht, unter welchem das Auge in der Entfernung des deutlichen Sehens $= \omega$ den Gegenstand erblicken würde. Dieser beträgt $\frac{\lambda}{\omega}$, und dividiren wir hiermit in den durch die Glaslinse entstehenden Gesichtswinkel $\frac{\lambda}{f}$, so wird man die Vergröſserungszahl $= \frac{\omega}{f}$ finden. Hieraus sieht man, daſs die Vergröſserung durch eine einfache Linse gefunden wird, indem man die Entfernung des deutlichen Sehens

urch die Brennweite der Glaslinse theilt. Es ist dies reilich ein precaires Mittel die Vergrößerung zu bestimmen, da die Größe ω für verschiedene Augen auch ußerst verschieden ist, allein wir haben doch so viel adurch gewonnen, daß wir die Vergrößerungen durch erschiedene Loupen mit einander vergleichen können. enn sind m, m' die Vergrößerungen zweier Loupen on den Brennweiten f, f', so hat man die Proportion

$$m : m' = f' : f,$$

. h. die Vergrößerungen verhalten sich umgekehrt wie ie Brennweiten.

§. 562.

In §. 475. haben wir den Ausdruck für die Abeichung wegen der Kugelgestalt folgendermaßen geunden:

$$q = \frac{1}{2} \cdot \frac{nkktt}{(n-1)^2 . f} \cdot \left\{ \begin{array}{l} n \cdot \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{hk} + \frac{1}{hh} \right) \\ - \frac{2n+1}{p} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{h} \right) \\ + \frac{n+2}{pp} \end{array} \right\}$$

nd hieraus läßt sich die Seitenabweichung oder der albmesser wegen der Undeutlichkeit leicht finden, wenn an obigen Ausdruck noch mit dem Winkel multiplicirt, elchen die in der Entfernung t von der Axe auf das las fallenden Strahlen mit der Axe bilden; dieser inkel wird durch $\frac{t}{k}$ ausgedrückt. Man kann nun agen, wie das Glas beschaffen seyn müsse, damit bei eich bleibender Brennweite der Halbmesser der Unutlichkeit ein Minimum werde, und man sieht leicht, ß hierzu nur die Längenabweichung zu einem Minium gemacht werden muß, da k, als von der Brennite und der Entfernung des Objects abhängend, welche nstante Größen sind, auch constant bleibt.

§. 563.

Differentiirt man vorigen Ausdruck der Längenab
weichung wegen der Kugelgestalt, indem q und p a
veränderlich betrachtet werden, so ergiebt sich

$$\frac{dq}{dp} = \frac{1}{2} \cdot \frac{nkktt}{(n-1)^2 . f} \cdot \left[\frac{2n+1}{pp} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{h} \right) - \frac{2n+4}{p^3} \right.$$

und setzt man diesen Ausdruck Null, so ist

$$\frac{(2n+1)}{pp} \cdot \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{h} \right) = \frac{2n+4}{p^3}$$

$$p = \frac{2n+4}{2n+1} \cdot \frac{kh}{h-k}.$$

Nun ist aber auch

$$k = \frac{hf}{h-f},$$

und durch Substitution dieses Werthes wird

$$p = \frac{2n+4}{2n+1} \cdot \frac{hf}{h-2f}.$$

Nach §. 474. ist ferner der Werth von

$$p = \frac{hnr}{h.(n-1)-r},$$

folglich hat man zur Bestimmung von r die Gleich

$$\frac{nr}{h.(n-1)-r} = \frac{2n+4}{2n+1} \cdot \frac{f}{h-2f}.$$

§. 564.

Hieraus ergiebt sich der Werth von

$$r = \frac{(2n+4).fh.(n-1)}{n.(2n+1).(h-2f)+(2n+4).}$$

und da nach §. 560. $h = \frac{\omega f}{\omega + f}$, oder wegen
Kleinheit des Verhältnisses $\frac{f}{\omega}$, kürzer $h = f$, so

durch Substitution dieses Werthes

$$r = \frac{(2n+4).(n-1).}{4+n-2nn}$$

Setzt man hierin z. B. $n = \frac{3}{2}$, so kommt $r = \frac{7}{2}.f$, und vermöge der Formel

$$f = \frac{r\varrho}{(n-1).(r+\varrho)},$$

erhält man den Halbmesser der hintern Fläche der Glaslinse $\varrho = \frac{7}{12}.f$. Substituirt man den Werth von p, der q zu einem Minimum macht,

$$p = \frac{2n+4}{2n+1}.\frac{hk}{h-k}$$

in die Gleichung der Längenabweichung

$$q = \frac{1}{2}.\frac{nkktt}{(n-1)^2.f}.\left\{\begin{array}{l} n.\left(\frac{1}{kk} - \frac{1}{kh} + \frac{1}{hh}\right) \\ -\frac{2n+1}{p}.\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{h}\right) \\ +\frac{n+2}{pp} \end{array}\right\},$$

so erhält man

$$q = \frac{1}{2}.\frac{nkktt}{(n-1)^2.f}.\left\{\begin{array}{l} n.\left(\frac{1}{kk} - \frac{1}{kh} + \frac{1}{hh}\right) \\ -\frac{1}{4}.\frac{(2n+1)^2}{n+2}.\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{h}\right)^2 \end{array}\right\},$$

also den Halbmesser der Undeutlichkeit, indem mit $\frac{t}{k}$ multiplicirt wird,

$$= \frac{1}{2}.\frac{nkt^3}{(n-1)^2.f}.\left\{\begin{array}{l} n.\left(\frac{1}{kk} - \frac{1}{kh} + \frac{1}{hh}\right) \\ -\frac{1}{4}.\frac{(2n+1)^2}{n+2}.\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{h}\right)^2 \end{array}\right\}.$$

§. 565.

Für Mikroscope fanden wir bei einfachen Linsen (§. 560.)

$$h = \frac{\omega f}{\omega + f}; \quad k = -\omega,$$

und wenn wir diese Werthe in vorige Gleichung substituiren, welche die Seitenabweichung wegen der Ku-

gelgestalt ausdrückt, und dieselbe durch s bezeichnet, so kommt

$$s = -\frac{n\omega t^3}{2.(n-1)^2.f}\cdot\left\{\begin{array}{l} n.\left(\frac{3}{\omega\omega}+\frac{3}{\omega f}+\frac{1}{ff}\right) \\ -\frac{1}{4}\cdot\frac{(2n+1)^2}{n+2}\cdot\left(\frac{2}{\omega}+\frac{1}{f}\right)^2 \end{array}\right\}.$$

Multiplicirt man mit dem aufserhalb der Parenthese stehenden Factor ω die Glieder innerhalb der Parenthese, so kommt

$$n.\left(\frac{3}{\omega}+\frac{3}{f}+\frac{\omega}{ff}\right)$$
$$-\frac{1}{4}\cdot\frac{(2n+1)^2}{n+2}\cdot\left(\frac{4}{\omega}+\frac{4}{f}+\frac{\omega}{ff}\right).$$

Bemerkt man nun, dafs f gegen ω immer sehr klein genommen wird, da man eine Vergröfserung wünscht, die so stark als möglich ist, so kann man alle Glieder, ausgenommen $\frac{\omega}{ff}$, weglassen, und dann bleibt

$$\left(n-\frac{1}{4}\cdot\frac{(2n+1)^2}{n+2}\right)\cdot\frac{\omega}{ff}$$
$$=\frac{4n-1}{4.(n+2)}\cdot\frac{\omega}{ff}.$$

Auf diese Weise wird der Werth von s, mit Weglassung des negativen Vorzeichens, welches durch die Lage des Bildes vor dem Glase eingeführt wurde,

$$s=\frac{n.(4n-1).\omega}{8.(n-1)^2.(n+2)}\cdot\frac{t^3}{f^3}.$$

§. 566.

Um nun die Undeutlichkeit der durch die Loupe gesehenen Gegenstände wegen der Seitenabweichung nicht zu sehr zu erhöhen, darf das Verhältnifs $\frac{t}{f}$ eine gewisse Grenze nicht überschreiten. Wir nehmen dieselbe mit Euler $=\frac{1}{20}$ an, und dann wird, wenn für Glas $n=\frac{3}{2}$ gesetzt wird,

$$\frac{s}{\omega} = \frac{15}{14} \cdot \frac{1}{8000}.$$

ehmen wir dann $\omega = 8$ Zoll, so wird

$$s = \tfrac{1}{933} \text{ Zoll.}$$

ieraus zeigt sich übrigens, welche geringe Helligkeit ei starken Vergröfserungen entsteht. Denn da $t = \frac{1}{20} f$, wird der Strahlenkegel, der durch das Glas geht nd die Pupille trifft, eine Lichtmenge mit sich führen, ie der Gröfse

$$x \cdot \frac{ff}{400}$$

roportional ist. Bezeichnet man ferner den Halbmesser er Pupille durch 6, so ist die Lichtmenge, welche das loſse Auge erhalten würde, der Gröfse $n66$ proporonal; folglich ist die Helligkeit mit der Loupe gesehen $= \left(\frac{f}{206}\right)^2$, die mit bloſsem Auge als Einheit angenomen. Setzen wir im Mittel $6 = 1$ Linie, so würde bei iner Brennweite von 20 Linien, welche ungefähr einer ierfachen Vergröfserung entspricht, die Helligkeit durch as Glas der mit bloſsem Auge gleich werden. Da die ergröfserungszahl sich umgekehrt wie die Brennweite erhält, und die Helligkeit dem Quadrate der Brennweite proportional ist, so folgt, daſs die Helligkeit im mgekehrten quadratischen Verhältniſs der Vergröfseungszahl steht.

§. 567.

Gesetzt z. B., man wolle eine hundertfache Vergröfserung haben, so würde sich die vortheilhafteste Einrichtung der Loupe folgendermaſsen bestimmen lasen. Setzen wir $\omega = 8$ Zoll $= 96$ Linien, so wird

$$f = 0{,}96 \text{ Linien.}$$

Ferner erhält man die halbe Oeffnung des Glases

$$t = 0{,}048 \text{ Linien,}$$

ie Helligkeit, die des bloſsen Auges als Einheit genommen,

$$= 0{,}002304.$$

Die beiden Halbmesser der Krümmung der vordern und der hintern Seite des Glases erhält man nach §. 564. aus den Formeln $r = \frac{7}{4}f$, $\varrho = \frac{7}{12}f$, wo das Brechungsverhältnifs $n = \frac{3}{2}$ gesetzt wurde, also für unsern Fal

$$r = 3{,}36 \text{ Linien}, \quad \varrho = 0{,}56 \text{ Linien}.$$

Man kann auch statt eines Linsenglases von sehr kurzer Brennweite, zwei oder mehrere Gläser von gröfserer Brennweite auf einander legen, wo dann die Rechnung auf gleiche Art wie für ein einziges Glas geführt wird. Nach §. 403. würde dann, wenn man m Gläser von gleicher Brennweite f nähme, die Brennweite dieser Zusammensetzung $= \frac{f}{m}$ werden.

§. 568.

Nimmt man zwei Glaslinsen von verschiedenen Glasarten, um die Farbenzerstreuung aufzuheben, so wird die Rechnung folgendermafsen geführt. In der allgemeinen Formel zwischen h und k (§. 379.) lasse man die in die Dicke des Glases multiplicirten Glieder weg, so kommt

$$k = \frac{hr\varrho}{h.(r + \varrho).(n - 1) - r\varrho},$$

oder, wenn man statt $\frac{r\varrho}{r + \varrho}$, R setzt,

$$k = \frac{hR}{h.(n - 1) - R}.$$

Bei dem Durchgange der Strahlen durch das zweite Glas mufs man $-k$ für h setzen, und bezeichnet man das Brechungsverhältnifs für die mittlern Strahlen durch n, die Gröfse $\frac{r'\varrho'}{r' + \varrho'}$ durch R', wo r', ϱ' die Halbmesser der Krümmung der vordern und hintern Fläche des Glases bedeuten, so ist

$$k = + \frac{kR'}{k.(n - 1) + R'}.$$

§. 569.

Substituirt man den Werth von k in die letzte eichung, so erhält man, wenn statt k' das Reciproke genommen wird,

$$\frac{1}{k'} = \frac{n'-1}{R'} + \frac{n-1}{R} - \frac{1}{h},$$

id da k' die Entfernung des Bildes nach der Brechung irch das zweite Glas ist, so mufs man $\frac{1}{k'} = -\frac{1}{\omega}$ tzen, weil das Bild in die Entfernung ω vor das Glas llen mufs. Wir haben also

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{h} - \frac{n'-1}{R'} - \frac{n-1}{R}.$$

oll nun das Bild der violetten Strahlen an dieselbe telle fallen, an welche das der mittlern Farbenstrahlen i liegen kommt, so darf sich ω nicht ändern, wenn an $n' + \delta n'$, $n + \delta n$ statt n', n substituirt, d. h. wird

$$\frac{\delta n'}{R'} + \frac{\delta n}{R} = \omega,$$

ler, wenn man statt $\delta n'$, δn die Zerstreuungsverhältnisse $\delta\nu$, $\delta\nu'$ einführt, wo $\delta n = \delta\nu.(n-1)$, $n' = \delta\nu'.(n'-1)$,

$$\frac{\delta\nu.(n-1)}{R} + \frac{\delta\nu'.(n-1)}{R'} = o.$$

§. 570.

Wir haben also zur Bestimmung von R, R' die beiden Gleichungen

$$\frac{1}{h} - \frac{1}{\omega} = \frac{n-1}{R} + \frac{n'-1}{R'}$$

$$\frac{\delta\nu.(n-1)}{R} + \frac{\delta\nu'.(n'-1)}{R'} = o.$$

ezeichnet man die Brennweiten der beiden Gläser urch f, f', so hat man

$$f = \frac{r\varrho}{(n-1).(r+\varrho)} = \frac{R}{n-1}$$
$$f' = \frac{r'\varrho'}{(n'-1).(r'+\varrho')} = \frac{R'}{n'-1},$$

also lassen sich die beiden vorigen Gleichungen au so schreiben:

$$\frac{1}{h} - \frac{1}{\omega} = \frac{1}{f} + \frac{1}{f'}$$
$$\frac{\delta v}{f} + \frac{\delta v'}{f'} = 0,$$

und man erhält aus denselben

$$\frac{1}{f} = \frac{\delta v'}{\delta v' - \delta v} \cdot \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\omega}\right)$$
$$\frac{1}{f'} = -\frac{\delta v}{\delta v' - \delta v} \cdot \left(\frac{1}{h} - \frac{1}{\omega}\right).$$

Der Gesichtswinkel, unter welchem der Gegenstand v Durchmesser λ durch das Glas erscheint, ist = und mit bloſsen Augen gesehen würde der Gesich winkel $= \frac{\lambda}{\omega}$ seyn, folglich ist die Vergröſserung $m =$ $\frac{1}{h} = \frac{m}{\omega}$, und die Werthe der Brennweiten lassen s auch so schreiben:

$$f = +\frac{\delta v' - \delta v}{\delta v'} \cdot \frac{\omega}{m-1}$$
$$f' = -\frac{\delta v' - \delta v}{\delta v'} \cdot \frac{\omega}{m-1},$$

und eine Loupe, die aus zwei solchen Gläsern zus mengesetzt ist, wird den Gegenstand ohne Farben scheinen lassen.

§. 571.

Wenn man das Object in einer solchen Entfern vom Objectiv eines Microscops aufstellt, daſs hin demselben die Strahlen convergiren, so kann man zweierlei Art die Einrichtung des Oculars treffen, ind

an entweder ein concaves Glas aufstellt ehe die Strahn sich vereinigen, oder indem man ein convexes Glas immt, und dasselbe so stellt, dafs sein Brennpunkt it der Stelle des Bildes zusammenfällt. Den ersten all wollen wir bei Seite setzen, da in demselben, so ie in Galilaeischen Fernrohr, die Gröfse des Gesichtseldes zu unbedeutend wird. Es seyen f, f' die Brennweiten der beiden Gläser, so hat man

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$
$$\frac{1}{h'} + \frac{1}{k'} = \frac{1}{f'}$$
$$k + h' = l$$

o l die Entfernung der beiden Gläser von einander edeutet. Sollen die Strahlen aus dem zweiten Glase arallel ausfahren, so ist $k' = \infty$, also $h' = f'$, und s bleibt blofs

$$\frac{1}{h} + \frac{1}{k} = \frac{1}{f}$$
$$k + f' = l.$$

§. 572.

Die Gröfse des Durchmessers des Gegenstandes ey λ, so wird die Gröfse des Bildes $= \frac{\lambda k}{h}$, und der esichtswinkel, unter welchem dasselbe durch das Ocular esehen erscheint, $= \frac{\lambda k}{f'h}$. Für das blofse Auge ist er Gesichtswinkel $= \frac{\lambda}{\omega}$, also die Vergröfserung

$$m = \frac{\omega k}{hf'}.$$

s den beiden Gleichungen des vorigen §. erhält man

$$h = \frac{(l - f').f}{l - f - f'}$$
$$k = l - f',$$

Von der Brechung des Lichts in der Atmosphäre.

§. 574.

Bei allen bisherigen Untersuchungen über den Weg des Lichts in brechenden Mitteln, haben wir blofs solche Körper betrachtet, die im Inneren eine gleichförmige Brechungskraft gegen das Licht besafsen, wo folglich die Bahn des Lichtstrahls selbst eine grade Linie war. Anders verhält es sich bei solchen durchsichtigen Körpern, deren Dichtigkeit sich im Innern ändert, und zwar continuirlich nach einem bestimmten Gesetze, wie dies z. B. bei der atmosphärischen Luft Statt findet; hier wird das Licht sich nicht in grader, sondern in krummer Linie bewegen. Jedenfalls werden aber auch hier dieselben Gesetze der Brechung gelten, als bei Körpern von gleicher Dichtigkeit, weil man sich immer die brechenden Mittel auf irgend eine Art in unendlich schmale Schichten zerlegt denken kann, in deren jeder eine constante Dichtigkeit herrscht.

§. 575.

Wir wollen zuerst als einfachsten Fall den Weg des Strahls betrachten, wenn die Flüssigkeit von ungleicher Dichtigkeit so beschaffen ist, dafs dieselbe in parallele ebene Schichten von unendlich kleiner Dicke getheilt werden kann, in denen eine gleichförmige Dichtigkeit herrscht. Wo nun auch der Strahl auf seinem Wege eine dieser Schichten treffen mag, so werden doch alle an diesen Punkten errichteten Einfallslothe unter einander parallel seyn, und daher, wie man leicht

begreift, der ganze Weg des Lichtstrahls in einer und derselben Ebene liegen.

Diese besagte Ebene, in welcher der Lichtstrahl seinen Weg nimmt, durchschneide zwei auf einander folgende unendlich dünne Schichten, in deren jeder die Dichtigkeit als gleichförmig angenommen werden kann, in $ABDC$, $CDEF$ (Fig. 61.). Das absolute Brechungsverhältniſs der Schicht $ABCD$ bezeichnen wir durch n, das der Schicht $CDEF$ durch $n + dn$, so ist, nach §. 351., das relative Brechungsverhältniſs aus der ersten Schicht in die zweite

$$= \frac{n + dn}{n} = 1 + \frac{dn}{n}.$$

§. 576.

Es stelle GHK den Weg des Lichttheilchens in diesen beiden auf einander folgenden Schichten vor, LP das Einfallsloth am Punkt H; OQ sey eine Linie parallel mit den Trennungsflächen der Schichten, $OP = x$, $HP = y$. Man hat dann zwischen dem Einfallswinkel und Brechungswinkel die Gleichung

$$\sin GHL = \left(1 + \frac{dn}{n}\right) . \sin MHK.$$

Man hat aber

$$\sin GHL = \frac{GL}{GH};$$

$$\sin MHK = \frac{MK}{HK};$$

Nach unsern Bezeichnungen wird nun aber auch

$$GL = -dx, \quad LH = MH = dy$$

$$MK = dx + ddx$$

$$GH = -\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

$$HK = \sqrt{dx^2 + dy^2 + 2dxddx + ddx^2}$$

$$\sin GHL = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}$$

$$\sin MHK = \frac{dx + ddx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + 2dxddx}}$$

§. 577.

Entwickelt man den Nenner des Bruchs, welcher sin MHK ausdrückt, in eine Reihe, und setzt der Kürze wegen

$$\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds,$$

so erhält man

$$\sin MHK = \frac{dx + ddx}{ds} \cdot \left(1 - \frac{dxddx}{ds^2}\right),$$

indem die höhern Glieder der Differentiale vernachlässigt werden. Führt man die Multiplication wirklich aus, so ergiebt sich

$$\sin MHK = \frac{dx}{ds} + \frac{ddx}{ds} - \frac{dx^2ddx}{ds^3}.$$

Die beiden letzten Glieder geben

$$+ \frac{ddx}{ds} - \frac{dx^2ddx}{ds^3} = \frac{ddx}{ds^3} \cdot (ds^2 - dx^2),$$

und wenn man bedenkt, dafs

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$
$$ds^2 - dx^2 = dy^2,$$

so erhält man

$$\sin MHK = \frac{dx}{ds} + \frac{dy^2}{ds^2} \cdot \frac{ddx}{ds}.$$

§. 578.

Die früher entwickelte Gleichung zwischen dem Einfallswinkel und Brechungswinkel

$$\sin GHL = \left(1 + \frac{dn}{n}\right) . \sin MHK$$

läfst sich auch so schreiben:

$$\sin GHL - \sin MHK = \frac{dn}{n} \cdot \sin MHK,$$

und wenn man die gefundenen Werthe von sin GHL, sin MKH hierin substituirt, und zugleich bemerkt, dafs hinter dem Gleichheitszeichen wegen des Differentialfactors $\frac{dn}{n}$ statt sin MHK blofs das erste Glied seiner Entwickelung $\frac{dx}{ds}$ geschrieben zu werden braucht, so kommt

$$-\frac{dy^3}{ds^3}\cdot\frac{ddx}{ds}=\frac{dn}{n}\cdot\frac{dx}{ds},$$

[illegible] der Bahn des Lichts, wel[illegible] parallele Schichten getrenntes [illegible]

§. 579.

[illegible] ist y als die unabhängige ver[illegible] zu betrachten, und um denselben zu [illegible]

$$dx = qdx$$
$$ddx = dqdy$$
$$ds = dy\cdot\sqrt{1+qq},$$

[illegible] dieser Werthe wird die Gleichung

$$-\frac{dy^3}{ds^3}\cdot\frac{ddx}{ds}=\frac{dn}{n}\cdot\frac{dx}{ds}$$

[illegible] übergehen

$$-\frac{dq}{q\cdot(1+qq)}=\frac{dn}{n},$$

welche Gleichung man auch so schreiben kann:

$$\frac{dq}{q}-\frac{qdq}{1+qq}=-\frac{dn}{n}.$$

Hiervon ist das Integral

$$\log q-\tfrac{1}{2}\cdot\log(1+qq)=-\log n+\text{Const.}$$

Zur Bestimmung der Constante sey für $q=q'$, $n=n'$, so ist auch

$$\log q'-\tfrac{1}{2}\cdot\log(1+q'q')=-\log n'+\text{Const.}$$

Zieht man diese Gleichung von der ersten ab, und geht von den Logarithmen zu den Zahlen über, so kommt

$$\frac{q\cdot\sqrt{1+q'q'}}{q'\cdot\sqrt{1+qq}}=\frac{n'}{n}$$

$$\frac{q}{\sqrt{1+qq}}=\frac{n'}{n}\cdot\frac{q'}{\sqrt{1+q'q'}}.$$

Da die Gröſsen $\frac{q}{\sqrt{1+qq}}$, $\frac{q'}{\sqrt{1+q'q'}}$, die Sinus der Einfallswinkel oder Brechungswinkel in irgend zwei

Schichten bedeuten, so sieht man hieraus, daſs diese Sinus sich immer umgekehrt wie die Brechungsverhältnisse in diesen beiden Schichten verhalten.

§. 580.

Restituirt man den Werth von $q = \frac{dx}{dy}$, so giebt vorige Gleichung

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{n'}{n} \cdot \frac{q'}{\sqrt{1 + q'q'}},$$

welcher Ausdruck sich aber nicht weiter integriren läſst, wenn man die Relation zwischen n, x, y nicht kennt. Löst man diese Gleichung nach dx auf, nnd setzt der Kürze wegen

$$\frac{q'}{\sqrt{1 + q'q'}} = \sin \mu,$$

so ergiebt sich

$$dx = \pm \frac{dy \cdot \frac{n'}{n} \cdot \sin \mu}{\sqrt{1 - \frac{n'n'}{nn} \cdot \sin \mu^2}}$$

Nun ist in §. 331. gezeigt worden, daſs, wenn $\frac{4N}{cc}$ die absolute Brechungskraft eines Körpers bedeutet, die bei einerlei Materie sich nicht mit der Dichtigkeit ändert, so hat man die Gleichung, wenn wir der Kürze wegen $\frac{4N}{cc} = \alpha$ setzen,

$$\alpha = \frac{nn - 1}{\varrho},$$

wo ϱ die dem Brechungsverhältniſs n entsprechende Dichtigkeit bedeutet. Hieraus folgt

$$nn = 1 + \alpha\varrho,$$
$$n'n' = 1 + \alpha\varrho'.$$

Es wird also auch

$$dx = \pm \frac{dy \cdot \sqrt{\frac{1 + \alpha\varrho'}{1 + \alpha\varrho}} \cdot \sin \mu}{\sqrt{1 - \frac{1 + \alpha\varrho'}{1 + \alpha\varrho} \cdot \sin \mu^2}}.$$

§. 581.

Um den Werth von α für die atmosphärische Luft zu bestimmen, nehmen wir diejenige Dichtigkeit als Einheit an, welche dann Statt findet, wenn die Barometerhöhe 0,76 Meter und die Temperatur Null beträgt. Dann hat man durch Versuche das Brechungsverhältnifs

$$n' = 1{,}000294$$

gefunden, und vermöge der Gleichung $n'n' = 1 + \alpha$, weil $\varrho' = 1$ genommen wird, erhält man

$$\alpha = 0{,}000588.$$

Allgemein hat man, wenn p den Barometerstand und t die Temperatur nach Graden der Centesimalscale bedeutet,

$$p = k\varrho.(1 + 0{,}00375.t),$$

wo k einen constanten Coefficienten bedeutet, der sich vermittelst der Gleichung $0{,}76 = k$ eliminiren läfst; indem man in voriger Gleichung $p = 0{,}76$, $\varrho = 1$, $t = o$ setzt. Es wird hierdurch

$$\varrho = \frac{p}{0{,}76.(1 + 0{,}00375.t)},$$

wo natürlicherweise, um richtige Resultate zu erlangen, p in Metern ausgedrückt werden mufs.

§. 582.

Nimmt man an, dafs x und y entweder zugleich zunehmen oder zugleich abnehmen, so mufs man in der Gleichung für dx bei Ausziehung der Quadratwurzel das positive Vorzeichen nehmen, und die Gleichung zwischen dx und dy läfst sich so schreiben:

$$dx = \frac{dy.\sqrt{1 + \alpha\varrho'.\sin\mu}}{\sqrt{\cos\mu^2 + \alpha\varrho - \alpha\varrho'.\sin\mu^2}}.$$

In vorliegendem Falle, wo die Schichten von gleicher Dichtigkeit alle senkrecht auf der Axe der y stehen, wird ϱ blofs als Function von y zu betrachten seyn. Nehmen wir z. B. an, die Relation zwischen ϱ und y sey so beschaffen, dafs

$$\varrho = \varrho'.e^{-y},$$

so ergiebt sich

$$dx = \frac{dy \cdot \sqrt{1 + \alpha\varrho'} \cdot \sin\mu}{\sqrt{\cos\mu^2 + \alpha\varrho' \cdot e^{-y} - \alpha\varrho' \cdot \sin\mu^2}},$$

wobei vorausgesetzt wird, ϱ' sey die Dichtigkeit der Atmosphäre an der Erdoberfläche, für welche $y = o$. Man setze

$$\cos\mu^2 + \alpha\varrho' \cdot e^{-y} - \alpha\varrho' \cdot \sin\mu^2 = uu$$

$$\frac{\cos\mu^2 - uu}{\alpha\varrho'} - \sin\mu^2 = -e^{-y}$$

$$\frac{2udu}{\cos\mu^2 - uu - \alpha\varrho' \cdot \sin\mu^2} = -dy,$$

so giebt vorige Gleichung

$$dx = \frac{2du \cdot \sqrt{1 + \alpha\varrho'} \cdot \sin\mu}{uu - \cos\mu^2 + \alpha\varrho' \cdot \sin\mu^2}.$$

Hiervon ist das Integral

$$x = -\frac{\sqrt{1 + \alpha\varrho'} \cdot \sin\mu}{\sqrt{\cos\mu^2 - \alpha\varrho' \cdot \sin\mu^2}} \cdot \log\frac{\sqrt{\cos\mu^2 - \alpha\varrho' \cdot \sin\mu^2} + u}{\sqrt{\cos\mu^2 - \alpha\varrho' \cdot \sin\mu^2} - u} + C.$$

Soll nun für $x = o$ auch $y = o$ seyn, so erhält man die Constante

$$C = \frac{\sqrt{1 + \alpha\varrho'} \cdot \sin\mu}{\sqrt{\cos\mu^2 - \alpha\varrho' \cdot \sin\mu^2}} \cdot \log\frac{\sqrt{\cos\mu^2 - \alpha\varrho' \cdot \sin\mu^2} + \cos\mu \cdot \sqrt{1 + \alpha\varrho'}}{\sqrt{\cos\mu^2 - \alpha\varrho' \cdot \sin\mu^2} - \cos\mu \cdot \sqrt{1 + \alpha\varrho'}}.$$

§. 583.

Wenn die Entfernungen der Gegenstände nicht gar zu grofs sind, und diese auch nicht in zu hohen Gegenden der Atmosphäre liegen, so kann man den Theil der Atmosphäre, in welchem das Auge und der gesehene Gegenstand sich befinden, als aus Schichten bestehend ansehen, wie wir sie im Vorigen betrachtet haben. Auch wird die Dichtigkeit dieser Schichten sich innerhalb der besagten Gränzen nur wenig ändern. Nehmen wir daher an, ϱ' sey die Dichtigkeit der Luft an der Stelle des Gegenstandes, und μ der Winkel, den der aus dem Gegenstande ausfahrende Strahl mit dem an

dieser Schicht errichteten Einfallsloth macht, so kann man

$$\varrho = \varrho' + \nu$$

setzen, wo ν eine Function von y bedeutet, die immer sehr klein bleibt. Den Anfangspunkt der Coordinaten legen wir in das Auge, und nehmen für den Normalfall an, dafs sich das Auge dem Erdboden näher befinde, als der Gegenstand. Man hat nun die Gleichung

$$dx = \frac{dy \cdot \sqrt{1 + \alpha\varrho'} \cdot \sin \mu}{\sqrt{\cos \mu^2 + \alpha\varrho - \alpha\varrho' \cdot \sin \mu^2}},$$

also, wenn man hierin den angenommenen Werth von ϱ substituirt,

$$dx = \frac{dy \cdot \sqrt{1 + \alpha\varrho'} \cdot \sin \mu}{\sqrt{\cos \mu^2 \cdot (1 + \alpha\varrho') + \alpha\nu}},$$

oder, wenn man den Nenner des Bruchs in eine Reihe entwickelt, und sich, der Kleinheit von ν wegen, auf die erste Potenz dieser Gröfse beschränkt,

$$dx = dy \cdot \operatorname{tang} \mu - \frac{\alpha\nu \cdot \sin \mu}{2 \cdot \cos \mu^2 \cdot (1 + \alpha\varrho')} \cdot dy.$$

§. 384.

Unter der Gröfse der Strahlenbrechung in der [illegible] versteht man die Ablenkung, welche ein [illegible] erleidet, während er vom Punkt seines Aus[illegible] zu einem gewissen Punkt seiner Bahn ge[illegible] Diese Ablenkung ist nichts anders, als der [illegible] den jenen in die besagten Punkte gelegten [illegible] mit einander bilden. Bezeichnet man [illegible] Ablenkung oder die der Strahlenbrechung [illegible] den Winkel, den die Berührungslinie am Punkte [illegible] des Lichts mit der Axe der x mach[illegible] Einfallsebene, da die Schichten parallel [illegible] durch φ den Winkel der Berüh[illegible] in einem beliebigen Punkte der Bahn mit der [illegible] durch φ, so hat man die Gleichung:

$$\iota = \varphi - \varphi',$$

[illegible] die Sonne des Lichtstrahls als gegen die Hori-

zontalebene concav betrachten. Hieraus folgt

$$\text{tang}\,\theta = \text{tang}\,(\varphi - \varphi') = \frac{\text{tang}\,\varphi - \text{tang}\,\varphi'}{1 + \text{tang}\,\varphi \,.\, \text{tang}\,\varphi'}.$$

Nun hat man aber $\varphi' = 90 - \mu$, $\text{tang}\,\varphi = \frac{dy}{dx}$, also auch

$$\text{tang}\,\theta = \frac{\frac{dy}{dx} - \cot\mu}{1 + \frac{dy}{dx} \cdot \cot\mu},$$

oder da

$$dx = dy \,.\, \text{tang}\,\mu - \frac{\alpha\nu \,.\, \sin\mu}{2 \,.\, \cos\mu^2 \,.\, (1 + \alpha\varrho')} \cdot dy$$

$$\frac{dy}{dx} = \cot\mu + \frac{\alpha\nu}{2 \,.\, \sin\mu \,.\, (1 + \alpha\varrho')},$$

so wird auch

$$\text{tang}\,\theta = \frac{\alpha\nu \,.\, \sin\mu}{2 \,.\, \sqrt{1 + \alpha\varrho'}},$$

wodurch die gesuchte Gröfse der Strahlenbrechung bestimmt ist, sobald man die Function ν durch y ausgedrückt kennt. In zwei Fällen wird $\theta = o$, wenn nämlich $\nu = o$ oder $\mu = o$, d. h. entweder wenn die Dichtigkeit der Schichten zwischen dem Auge und dem Gegenstand constant ist; oder wenn der ausgehende Lichtstrahl die Schichten von gleicher Dichtigkeit senkrecht durchschneidet.

§. 585.

In der Lehre vom Gleichgewicht der elastischen Flüssigkeiten wird gezeigt, dafs, wenn p den Druck der Luft, ϱ ihre Dichtigkeit bedeutet, und g die Kraft der Schwere an der Erdoberfläche anzeigt, für geringe Höhen die Gleichung

$$dp = -\varrho g dy$$

gilt. Bezeichnet aufserdem t die Temperatur, so hat man die zweite Gleichung

$$p = k\varrho \,.\, (1 + 0{,}00375 \,.\, t),$$

und hieraus folgt

$$\frac{k}{g}\cdot\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{1 + 0{,}00375\,.\,t}.$$

Nimmt man nun an, dafs die Temperatur in arithmetischem Verhältnifs abnimmt, während die Höhe zunimmt, und bezeichnet die Temperatur an der Erdoberfläche durch t', so wird man

$$t = t' - \frac{y}{b}$$

setzen können, wo b die Höhe andeutet, um welche man sich erheben mufs, damit das Thermometer um einen Grad falle. Man erhält dann

$$\frac{k}{g}\cdot\frac{dp}{p} = -\frac{dy}{1 + \lambda t' - \lambda\cdot\frac{y}{b}},$$

indem man der Kürze wegen $0{,}00375 = \lambda$ setzt. Hiervon ist das Integral

$$\frac{k}{g}\cdot\log p = \frac{b}{\lambda}\cdot\log\left(1 + \lambda t' - \lambda\cdot\frac{y}{b}\right) + \text{Const.}$$

An der Oberfläche der Erde, wo $y = o$, sey $p = p^0$, so ist

$$\frac{k}{g}\cdot\log p^0 = \frac{b}{\lambda}\cdot\log\,(1 + \lambda t') + \text{Const},$$

also, wenn man die Constante eliminirt

$$\frac{k}{g}\cdot\log\frac{p^0}{p} = \frac{b}{\lambda}\cdot\log\frac{b\,.\,(1 + \lambda t')}{b\,.\,(1 + \lambda t') - \lambda y}.$$

Man setze der Kürze wegen $\frac{bg}{k\lambda} = m$, so ergiebt sich, indem man von den Logarithmen zu den Zahlen übergeht,

$$\frac{p^0}{p} = \left(\frac{b\,.\,(1 + \lambda t')}{b\,.\,(1 + \lambda t') - \lambda y}\right)^m.$$

Bezeichnet man die dem Druck p^0 zugehörige Dichtigkeit ϱ durch ϱ^0, so hat man die Gleichungen

$$\begin{aligned} p^0 &= k\varrho^0\,.\,(1 + \lambda t') \\ p &= k\varrho\,.\,(1 + \lambda t) \\ \frac{p^0}{p} &= \frac{\varrho^0}{\varrho}\cdot\frac{1 + \lambda t'}{1 + \lambda t} \\ &= \frac{\varrho^0}{\varrho}\cdot\frac{b\,.\,(1 + \lambda t')}{b\,.\,(1 + \lambda t') - \lambda y}, \end{aligned}$$

wenn man diesen Werth von $\frac{p^0}{p}$ in vorige Gleichung stituirt, so bleibt

$$\frac{\varrho^0}{\varrho} = \left(\frac{b.(1+\lambda t')}{b.(1+\lambda t') - \lambda y}\right)^{m-1}.$$

nun für geringe Höhen λy gegen $b.(1+\lambda t')$ ier klein bleibt, so kann man vorigen Ausdruck in Reihe entwickeln, wobei man sich blofs auf die e Potenz des Verhältnisses

$$\frac{\lambda y}{b.(1+\lambda t')}$$

beschränken braucht; man erhält alsdann

$$\frac{\varrho^0}{\varrho} = 1 + \frac{(m-1).\lambda y}{b.(1+\lambda t')}.$$

der Gegenstand die Höhe $y = y'$ über der Oberhe der Erde, und ist, wie früher, ϱ' die daselbst tt findende Dichtigkeit, so wird ebenfalls

$$\frac{\varrho^0}{\varrho'} = 1 + \frac{(m-1).\lambda y'}{b.(1+\lambda t')}$$

$$\frac{\varrho}{\varrho'} = \frac{1 + \frac{(m-1).\lambda y'}{b.(1+\lambda t')}}{1 + \frac{(m-1).\lambda y}{b.(1+\lambda t')}}$$

$$= 1 + \frac{(m-1).\lambda}{b.(1+\lambda t')} \cdot (y' - y)$$

$$\varrho = \varrho' + \frac{(m-1).\lambda\varrho'}{b.(1+\lambda t')} \cdot (y' - y).$$

gleicht man diesen Ausdruck mit dem früher angemenen

$$\varrho = \varrho' + v,$$

sieht man, dafs unter den besagten Zuständen der osphäre die unbekannte Function

$$v = \frac{(m-1).\lambda\varrho'}{b.(1+\lambda t')} \cdot (y' - y)$$

l.

Der Werth von $m - 1$ kann sehr nahe $= 5$ angenommen werden. Substituirt man den so eben gefundenen Werth von ν in den Ausdruck

$$\text{tang}\,\theta = \frac{\alpha\nu \,.\, \sin\mu}{2\,.\,(1 + \alpha\varrho')},$$

so erhält man

$$\text{tang}\,\theta = \frac{\alpha\,.\,(m-1)\,.\,\lambda\varrho'}{b\,.\,(1+\lambda t')} \cdot \frac{\sin\mu}{2\,.\,(1+\alpha\varrho')} \cdot (y' - y),$$

und wenn man die ganze Gröfse der Strahlenbrechung bis an die Oberfläche der Erde haben will, so mufs $y = o$ gesetzt werden; dann bleibt

$$\text{tang}\,\theta' = \frac{\alpha\,.\,(m-1)\,.\,\lambda\varrho'}{b\,.\,(1-\lambda t')} \cdot \frac{\sin\mu}{2\,.\,(1+\alpha\varrho')} \cdot y'.$$

Da die Winkel θ und θ' sehr klein sind, so kann man ohne Weiteres statt der Tangenten die Winkel setzen, und es ergiebt sich

$$\frac{\theta'}{\theta} = \frac{y'}{y' - y}.$$

§. 586.

Substituirt man den Werth der Function ν ebenfalls in die Gleichung der Bahn, welche das Licht beschreibt,

$$dx = dy\,.\,\text{tang}\,\mu - \frac{\alpha\nu \,.\, \sin\mu}{2\,.\,\cos\mu^2\,.\,(1+\alpha\varrho')} \cdot dy,$$

so erhält man, wenn der Kürze wegen

$$\frac{(m-1)\,.\,\lambda\varrho'}{b\,.\,(1+\lambda t')} \cdot \frac{\alpha}{2\,.\,(1+\alpha\varrho')} = k$$

gesetzt wird, den Ausdruck

$$dx = dy\,.\,\text{tang}\,\mu - \frac{\sin\mu}{\cos\mu^2} \cdot k dy\,.\,(y' - y),$$

oder wenn man integrirt

$$x = y\,.\,\text{tang}\,\mu - \frac{\sin\mu}{\cos\mu^2} \cdot ky\,.\,(y' - \tfrac{1}{2}\,.\,y) + C.$$

Da wir nun angenommen haben, dafs für $y = y'$, $x = x'$ seyn soll, so ist

$$x' = y'\,.\,\text{tang}\,\mu - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin\mu}{\cos\mu^2} \cdot ky'y' +$$

d wenn man diese Gleichung von der obern abzieht

$$- x') = (y - y') . \tang \mu + \frac{\sin \mu}{\cos \mu^2} \cdot \frac{k}{2} \cdot (y - y')^2.$$

er Coefficient k ist immer sehr klein, die Curve wird her sehr wenig von der graden Linie abweichen.

§. 587.

Die in den vorigen Paragraphen betrachtete Dichgkeit der Luft findet sich jedoch nur höchst selten, dem die Annahme der in arithmetische Proportion mit nehmender Höhe abnehmende Temperatur, wohl erst einiger Entfernung von der Erdoberfläche sich regeläfsig zeigt, während von der Erdoberfläche an bis dieser Höhe die mannigfachsten Gesetze der Dichgkeit Statt finden können, und sehr häufig die gröfste ichtigkeit sich nicht an der Erdoberfläche, sondern rst in gröfserer Höhe zeigt, auch sogar periodische bnahmen und Zunahmen der Dichtigkeit vorhanden yn können, vorzüglich wenn bei heiterm Himmel die onne die Temperatur der dem Erdboden zunächst egenden Schichten stark erhöht, wodurch die unteren chichten der Atmosphäre in beständiger Bewegung halten werden.

§. 588.

Wir wollen daher als anderes Beispiel den Fall beachten, wo

$$\varrho = \varrho' + \gamma\varrho' . (y' - y) . y$$

ngenommen wird, und γ einen kleinen Coefficienten edeutet. Differentürt man diesen Ausdruck, so kommt

$$\frac{d\varrho}{dy} = \gamma\varrho' . (y' - 2y),$$

nd dies wird Null, wenn $y = \frac{1}{2}y'$, also findet für $= \frac{1}{2}y'$ ein Maximum der Dichtigkeit Statt. Beeichnen wir dieses Maximum durch $\varrho' + \delta\varrho'$, so hat an aus der ursprünglichen Gleichung

$$\varrho = \varrho' + \gamma\varrho' . (y' - y) . y$$
$$\delta\varrho' = \tfrac{1}{4}\gamma\varrho' y' y',$$

und wenn man ϱ' eliminirt, und $\frac{\gamma}{\gamma'} = u$ setzt, so wird

$$\varrho = \varrho' + 4u.(1-u).\delta\varrho'.$$

§. 589.

Substituirt man diesen Werth in die allgemeine Gleichung

$$dx = \frac{dy.\sqrt{1+\alpha\varrho'}.\sin\mu}{\sqrt{\cos\mu^2+\alpha\varrho-\alpha\varrho'.\sin\mu^2}},$$

so erhält man, da $dy = y'du$,

$$dx = \frac{y'du.\sqrt{1+\alpha\varrho'}.\sin\mu}{\sqrt{\cos\mu^2.(1+\alpha\varrho')+4u\alpha\delta\varrho'.(1-u).u}}.$$

Der Nenner dieses Bruchs läßt sich auch so schreiben:

$$\sqrt{(\cos\mu^2.(1+\alpha\varrho')+\alpha\delta\varrho'-4u\alpha\delta\varrho'.(u-\tfrac{1}{2})^2)}.$$

Setzt man also der Kürze wegen

$$\cos\mu^2.(1+\alpha\varrho')+\alpha\delta\varrho' = kk$$
$$u-\tfrac{1}{2} = v, \quad du = dv,$$

so wird

$$dx = \frac{y'dv.\sqrt{1+\alpha\varrho'}.\sin\mu}{\sqrt{kk-4\alpha\delta\varrho'.vv}}.$$

Hiervon ist das Integral

$$x = \frac{y'.\sqrt{1+\alpha\varrho'}.\sin\mu}{2.\sqrt{\alpha\delta\varrho'}}\cdot\mathrm{Arc.sin}\left(\frac{2v.\sqrt{\alpha\delta\varrho'}}{k}\right)+C.$$

§. 590.

Für $x = x'$ ist $y = y'$, $u = 1$, $v = \frac{1}{2}$, folglich bestimmt sich die Constante durch die Gleichung

$$x' = \frac{y'.\sqrt{1+\alpha\varrho'}.\sin\mu}{2.\sqrt{\alpha\delta\varrho'}}\cdot\mathrm{Arc.sin}\left(\frac{\sqrt{\alpha\delta\varrho'}}{k}\right)+C,$$

und es wird dann

$$x-x' = \frac{y'.\sqrt{1+\alpha\varrho'}.\sin\mu}{2.\sqrt{\alpha\delta\varrho'}}\cdot\mathrm{Arc.sin}\left(\frac{2v.\sqrt{\alpha\delta\varrho'}}{k}\right)$$
$$-\frac{y'.\sqrt{1+\alpha\varrho'}.\sin\mu}{2.\sqrt{\alpha\delta\varrho'}}\cdot\mathrm{Arc.sin}\left(\frac{\sqrt{\alpha\delta\varrho'}}{k}\right).$$

Zieht man die beiden hinter dem Gleichheitszeichen stehenden Bogen in einen einzigen zusammen, und restituirt den Werth von k, so erhält man

$$\frac{2.\sqrt{\alpha\delta\varrho'}}{y'.\sqrt{1+\alpha\varrho'}}.(x-x') =$$

$$\sin\mu.\text{Arc.sin} =$$

$$\left(\frac{2\nu.\cos\mu.\sqrt{1+\alpha\varrho'}-\sqrt{\cos\mu^2.(1+\alpha\varrho')+\alpha\delta\varrho'.(1-4\nu\nu)}}{\cos\mu^2.(1+\alpha\varrho')+\alpha\delta\varrho'}.\sqrt{\alpha\delta\varrho'}\right).$$

§. 591.

Geht aus dem leuchtenden Punkt ein zweiter Strahl aus, der unter dem Winkel μ' gegen das Einfallsloth geneigt ist, so gilt für dieses die Gleichung

$$\frac{2.\sqrt{\alpha\delta\varrho'}}{y'.\sqrt{1+\alpha\varrho'}}.(x-x') =$$

$$\sin\mu'.\text{Arc.sin} =$$

$$\left(\frac{2\nu.\cos\mu'.\sqrt{1+\alpha\varrho'}-\sqrt{\cos\mu'^2.(1+\alpha\varrho')+\alpha\delta\varrho'.(1-4\nu\nu)}}{\cos\mu'^2.(1+\alpha\varrho')+\alpha\delta\varrho'}.\sqrt{\alpha\delta\varrho'}\right).$$

Sollen nun beide Bahnen sich in einen Punkt schneiden, so ist für beide Bahnen in dem Durchschnittspunkt x, y dasselbe, man mufs also die hinter dem Gleichheitszeichen befindlichen Ausdrücke in beiden Gleichungen einander gleich setzen, und den Werth von ν aus der so gebildeten Gleichung ableiten. Nun ist aber zu bemerken, dafs die Winkel μ, μ' bei der terrestrischen Strahlenbrechung, wo die Gegenstände doch immer nur geringe Höhen über der Erdoberfläche besitzen, sehr nahe 90 Grad betragen. Man kann daher die Factoren $\sin\mu$, $\sin\mu'$ ohne Weiteres der Einheit gleich setzen. Nimmt man ferner

$$\mu = 90^0 - \lambda, \quad \mu' = 90^0 - \lambda',$$

so wird ohne merklichen Fehler

$$\cos\mu = \lambda; \quad \cos\mu' = \lambda',$$

und aufserdem darf man noch den Factor $1 + \alpha\varrho'$, wegen der Kleinheit von α, der Einheit gleich nehmen. Dann bleibt

$$\frac{2\nu\lambda - \sqrt{\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho'.(1 - 4\nu\nu)}}{\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho'} = \frac{2\nu\lambda' - \sqrt{\lambda'\lambda' + \alpha\delta\varrho'.(1 - 4\nu\nu)}}{\lambda'\lambda' + \alpha\delta\varrho'},$$

oder, wenn man mit dem Nenner multiplicirt,

$$\begin{aligned} &2\nu\lambda.(\lambda'\lambda' + \alpha\delta\varrho') - 2\nu\lambda'.(\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho') \\ &= (\lambda'\lambda' + \alpha\delta\varrho').\sqrt{\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho'.(1 - 4\nu\nu)} \\ &- (\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho').\sqrt{\lambda'\lambda' + \alpha\delta\varrho'.(1 - 4\nu\nu)}. \end{aligned}$$

§. 592.

Quadrirt man diese Gleichung, so läfst sich jedes Glied durch

$$(\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho').(\lambda'\lambda' + \alpha\delta\varrho')$$

dividiren, und man erhält

$$\begin{aligned} &4\nu\nu.(\lambda'\lambda' + \alpha\delta\varrho') + 4\nu\nu.(\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho') \\ &- 8\nu\nu\lambda\lambda' - (\lambda'\lambda' + \alpha\delta\varrho') - (\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho') \\ &= -2.\sqrt{\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho'.(1 - 4\nu\nu)}.\sqrt{\lambda'\lambda' + \alpha\delta\varrho'.(1 - 4\nu\nu)}, \end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned} &2\nu\nu.[(\lambda - \lambda')^2 + 2\alpha\delta\varrho'] \\ &- \tfrac{1}{2}.(\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho') - \tfrac{1}{2}.(\lambda'\lambda' + \alpha\delta\varrho') \\ &= -\sqrt{\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho'.(1 - 4\nu\nu)}.\sqrt{\lambda'\lambda' + \alpha\delta\varrho'.(1 - 4\nu\nu)}. \end{aligned}$$

Quadrirt man von neuem, so ergiebt sich nach den gehörigen Reductionen

$$\begin{aligned} &4\nu^4.[(\lambda - \lambda')^4 + 4\alpha\delta\varrho'.(\lambda - \lambda')^2] \\ &- 2\nu\nu.(\lambda - \lambda')^2.(\lambda\lambda + \lambda'\lambda' + 2\alpha\delta\varrho') \\ &= -\tfrac{1}{4}.(\lambda - \lambda')^2.(\lambda + \lambda')^2, \end{aligned}$$

oder

$$\nu^4 - \tfrac{1}{2}\nu\nu.\frac{\lambda\lambda + \lambda'\lambda' + 2\alpha\delta\varrho'}{(\lambda - \lambda')^2 + 4\alpha\delta\varrho'} = -\tfrac{1}{16}.\frac{(\lambda + \lambda')^2}{(\lambda - \lambda')^2 + 4\alpha\delta\varrho'}.$$

Durch Auflösung dieser Gleichung erhält man

$$4\nu\nu = \frac{\lambda\lambda + \lambda'\lambda' + 2\alpha\delta\varrho' \mp (2\lambda\lambda' - 2\alpha\delta\varrho')}{(\lambda - \lambda')^2 + 4\alpha\delta\varrho'},$$

entweder

$$4\nu\nu = 1,$$

$$2\nu = \pm \frac{\lambda + \lambda'}{\sqrt{(\lambda - \lambda')^2 + 4\alpha\delta\varrho'}}.$$

erste Werth $4\nu\nu = 1$ bezieht sich auf den Punkt, welchem das Licht ausgeht, und den wir nicht er zu betrachten haben.

§. 593.

Was nun die Lage der Berührungslinie an dem gten Durchschnittspunkt betrifft, so hatten wir die chung

$$dx = \frac{y' d\nu . \sqrt{1 + \alpha\varrho'} . \sin\mu}{\sqrt{(kk - 4\alpha\delta\varrho'\nu\nu)}},$$

', da $y' d\nu = dy$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{kk - 4\alpha\delta\varrho'\nu\nu}}{\sin\mu . \sqrt{1 + \alpha\varrho'}},$$

der Werth von

$$kk = \cos\mu^2 . (1 + \alpha\varrho') + \alpha\delta\varrho'$$
$$= \lambda\lambda + \alpha\delta\varrho'.$$

en wir nun in voriger Gleichung

$$\sin\mu = 1, \quad \sqrt{1 + \alpha\varrho'} = 1,$$

wird

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\lambda\lambda + \alpha\delta\varrho' . (1 - 4\nu\nu)},$$

da

$$1 - 4\nu\nu = \frac{4\alpha\delta\varrho'}{(\lambda - \lambda')^2 + 4\alpha\delta\varrho'},$$

wird die Lage der Tangente an dem Durchschnitts- t der einen Bahn, wo das Licht unter dem Winkel $-\lambda$ ausfliefst, durch

$$= \frac{\sqrt{\lambda\lambda . (\lambda - \lambda')^2 + 4\lambda . (\lambda + \lambda') . \alpha\delta\varrho' + 4\alpha^2\delta\varrho'^2}}{\sqrt{(\lambda - \lambda')^2 + 4\alpha\delta\varrho'}}$$

nicht mehr als eben betrachten, sondern als Kugelschalen, welche mit der Oberfläche der Erde concentrisch sind, indem dann die Ausdehnung des in der Atmosphäre durchlaufenen Raumes zu grofs ist, als dafs man die Kugelgestalt der Erde mit der Ebene vertauschen könnte. Wir wollen daher noch unter dieser Voraussetzung die Bahn des Lichts darstellen.

§. 596.

Man thut nun hierbei am besten, die Ursache der Ablenkung des Lichts in einer Anziehung der Lufttheilchen gegen das Licht anzunehmen, und hieraus nach den Lehren der Mechanik die Bahn zu suchen. Da die Luftschichten von gleicher Dichtigkeit concentrische Kugelschalen um den Mittelpunkt der Erde bilden, und die Anziehung immer auf der Oberfläche einer solchen Schale senkrecht steht, wie auch das Gesetz der Anziehung beschaffen seyn mag, so werden die Richtungen der Anziehungen insgesammt sich im Mittelpunkt der Erde schneiden, und man kann daher die Sache so ansehen, als ob im Mittelpunkt eine anziehende Kraft vorhanden wäre, die das Lichttheilchen nach einem bestimmten Gesetz anzieht. Legen wir nun durch den Mittelpunkt der Erde zwei auf einander senkrechte Coordinatenaxen, bezeichnen die Coordinaten des Lichttheilchens zu irgend einer Zeit durch x, y, die anziehende Kraft durch V, wo V eine gewisse Function des Abstandes r des Lichttheilchens vom Mittelpunkt der Erde seyn wird, so haben wir, den Lehrsätzen der Dynamik zufolge, die beiden Differentialgleichungen der zweiten Ordnung,

$$\frac{ddx}{dt^2} = -\frac{Vx}{r}$$

$$\frac{ddy}{dt^2} = -\frac{Vy}{r},$$

wo dt das Element der Zeit bedeutet.

§. 507.

Multiplicirt man die erste Gleichung mit $2dx$, die zweite mit $2dy$, so wird

$$\frac{2dx}{dt}\cdot\frac{ddx}{dt} = -\frac{2Vx}{r}\cdot dx$$
$$\frac{2dy}{dt}\cdot\frac{ddy}{dt} = -\frac{2Vy}{r}\cdot dy,$$

und wenn man dieselben addirt

$$\frac{2dx\,.\,ddx + 2dy\,.\,ddy}{dt^2} = -\frac{2V\,.\,(xdx + ydy)}{r}.$$

Es ist aber

$$2dxddx + 2dyddy = d\,.\,(dx^2 + dy^2) = d\,.\,ds^2,$$

wo ds das Element der Bahn bedeutet. Eben so ist

$$xx + yy = rr;$$
$$xdx + ydy = rdr;$$

folglich läfst sich vorige Gleichung so schreiben:

$$d\cdot\frac{ds^2}{dt^2} = -2Vdr,$$

und beide Glieder sind integrabel, da wir vorausgesetzt haben, dafs V blofs eine Function von r sey. Folglich wird

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \text{Const} - 2\int Vdr.$$

Nun ist bekanntlich der Differentialcoefficient $\frac{ds}{dt}$ nichts anders, als die Geschwindigkeit. Bezeichnen wir dieselbe für eine bestimmte Stelle durch v, und dem daselbst Statt findenden Werth des Integrals $\int Vdr$ durch P, so hat man, um die vorige Constante zu bestimmen, die Gleichung

$$vv = \text{Const} - 2P,$$

und hierdurch ergiebt sich

$$\frac{ds^2}{dt^2} = vv + 2P - 2\int Vdr.$$

§. 598.

Um ein zweites Integral aus den beiden Fundamentalgleichungen zu erhalten, multiplicire man die erste mit y, die zweite mit x, und ziehe sie von einander ab, so fällt V ganz heraus, und es bleibt

$$\frac{ydddx - xdddy}{dt^3} = 0.$$

Hiervon ist das Integral

$$\frac{ydx}{dt} - \frac{xdy}{dt} = \text{Const.}$$

Um die hierin vorkommende Constante zu bestimmen, nehme man an, die Axe der x sey so gelegt, dafs sie durch den Punkt der Oberfläche der Erde gehe, wo der Lichtstrahl dieselbe zuletzt trifft, und die Werthe von v und P mögen für eben denselben Punkt gelten. Ist ferner der Winkel, unter welchen zuletzt die Richtung des Strahls die Axe der x schneidet, $= \theta$, so wird für diesen Punkt

$$\frac{dx}{dt} = v.\cos\theta\,; \qquad \frac{dy}{dt} = v.\sin\theta.$$

Setzt man nun den Halbmesser der Erde $= a$, so hat man zugleich $x = a$, $y = o$, also wird

$$-av.\sin\theta = \text{Const},$$

und die letzte Gleichung ist

$$\frac{ydx - xdy}{dt} = -av.\sin\theta.$$

§. 599.

Wir wollen nun statt der rechtwinkligen Coordinaten x, y die Polarcoordinaten r, φ einführen, wo φ den Winkel bedeutet, welchen der Radius r mit der Axe der x bildet, dann hat man

$$x = r.\cos\varphi, \quad y = r.\sin\varphi$$
$$ds^2 = rrd\varphi^2 + dr^2$$
$$ydx - xdy = -rrd\varphi,$$

also lassen sich die beiden Gleichungen auch so schreiben

$$\frac{-dr^2}{dt^2} = vv + 2P - 2\int V dr$$

$$\frac{rd\varphi}{dt} = av \cdot \sin 6,$$

wenn man dt eliminirt,

$$\frac{-dr^2}{rd\varphi^2} = \frac{vv + 2P - 2\int V dr}{aavv \cdot \sin 6^2}.$$

§. 600.

Es kommt jetzt blofs darauf an, die Gröfse V auszumitteln. Wenn die Lufttheilchen das Licht anziehen, so wird diese Anziehung nur auf unmerkliche Entfernungen merklich seyn. Man beschreibe um das Lichttheilchen, welches sich in der Entfernung r vom Mittelpunkt der Erde befindet, eine Kugel, deren Halbmesser der Wirkungssphäre der Lufttheilchen gleich kommt, und der Kreis $AFKBGD$ (Fig. 63.) stelle den Durchschnitt dieser Kugel vor. Der Durchmesser AB dieses Kreises sey nach dem Mittelpunkt der Erde gerichtet; er giebt also die mittlere Richtung der Anziehung aller innerhalb dieses Kreises enthaltenen Lufttheilchen an. Die Lufttheilchen von gleicher Dichtigkeit stehen ferner auf diesem Durchmesser senkrecht, und man kann innerhalb der äufserst geringen Ausdehnung der Kugel, welche die Wirkungssphäre der Anziehung ausmacht, als eben betrachten. Nun sey $CE = u$, so ist die Stärke der Anziehung der Schicht DF eine Function von u, multiplicirt in die daselbst herrschende Dichtigkeit. Wir bezeichnen diese Function durch φu, nennen die Dichtigkeit im Punkt $C = \rho$, so ist die Dichtigkeit der Schicht DF, welche den Abstand $r + u$ vom Mittelpunkt der Erde hat,

$$= \rho - \frac{d\rho}{dr} \cdot u + \frac{ddp}{dr^2} \cdot \frac{u^2}{2} + \ldots\ldots$$

folglich die Anziehung der Schicht DF

$$= \varphi u \left(\rho - \frac{d\rho}{dr} u + \frac{ddp}{dr^2} \frac{u^2}{2} + \ldots\ldots \right).$$

t nun die Schicht GK so weit unterhalb von C ent-rnt, als DF oberhalb, so wird die Anziehung dieser chicht, welche die Entfernung $r = u$ vom Mittelpunkt er Erde hat, durch

$$Udu.\left(\varrho - \frac{d\varrho}{dr}\cdot u + \frac{ddq}{dr^2}\cdot\frac{u^2}{2} - \ldots\right)$$

usgedrückt.

§. 601.

Zieht man den obern Ausdruck von dem untern , so bleibt der Ueberschufs der Anziehung beider chichten, gegen den Mittelpunkt der Erde zu, indem r die höhern Potenzen von u vernachlässigen,

$$= -2\cdot\frac{d\varrho}{dr}\cdot U.udu,$$

d integrirt man dies von $u = o$ bis $u =$ dem Werthe, elcher dem Halbmesser der Kugel gleich kommt, so giebt sich der früher durch V bezeichnete Werth der nziehung

$$V = -\frac{d\varrho}{dr}\cdot\int U.udu.$$

un ist aber das Integral eine bestimmte von der ichtigkeit der Luft unabhängige Gröfse, die wir durch bezeichnen wollen, folglich kommt

$$V = -2\cdot\frac{d\varrho}{dr}\cdot E$$

$$\int Vdr = -2\cdot E\varrho + \text{Const.}$$

m die Constante zu bestimmen, brauchen wir nur zu emerken, dafs die Gröfse $\int Vdr$ an der Oberfläche r Erde, wo $\varrho = \varrho'$ durch P bezeichnet wurde, man t also

$$P = -2E\varrho' + \text{Const}$$

$$\int Vdr - P = 2E.(\varrho' - \varrho).$$

bstituirt man diesen Werth in die Gleichung

$$\frac{rrd\varphi^2 + dr^2}{r^4d\varphi^2} = \frac{vv + 2P - 2\int Vdr}{aavv.\sin 6^2},$$

kommt

$$\frac{rrd\varphi^2 + dr^2}{r^4d\varphi^2} = \frac{vv - 4E.(\varrho' - \varrho)}{aavv.\sin 6^2}.$$

§. 602.

Man setze $r = a + y$, $ad\varphi = dx$, so läfst sich vorige Gleichung auch so schreiben:

$$\frac{(a+y)^2.dx^2 + aady^2}{(a+y)^4.dx^2} = \frac{\nu\nu - 4E.(\varrho' - \varrho)}{aa\nu\nu.\sin 6^2},$$

oder auch, wenn man Zähler und Nenner mit a^2 dividirt und multiplicirt,

$$\frac{\left(1+\frac{y}{a}\right)^2.dx^2 + dy^2}{\left(1+\frac{y}{a}\right)^4.dx^2} = \frac{\nu\nu - 4E.(\varrho' - \varrho)}{\nu\nu.\sin 6^2}.$$

Nimmt man nun a unendlich grofs, d. h. betrachtet man die Erdoberfläche als eine Ebene, so ergiebt sich

$$\frac{dx^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{\sin 6^2}{1 - \frac{4E}{\nu\nu}.(\varrho' - \varrho)}.$$

Bezeichnet man die Geschwindigkeit des Lichts im leeren Raum durch c, so hat man vermittelst der Gleichung

$$\frac{ds^2}{dt^2} = \nu\nu + 2P - 2\int V dr$$

folgenden Ausdruck, da im leeren Raum $\int V dr = o$ ist,

$$cc - 2P = \nu\nu,$$

und da aufserdem $2P = -4E\varrho'$, so kommt

$$cc + 4E\varrho' = \nu\nu.$$

Die Gleichung

$$\frac{dx^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{\sin 6^2}{1 - \frac{4E}{\nu\nu}.(\varrho' - \varrho)}$$

giebt dann, wenn man diesen Werth von $\nu\nu$ substituirt,

$$\frac{dx^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{(cc + 4E\varrho').\sin 6^2}{cc + 4E\varrho}.$$

Vergleicht man diese mit der früher entwickelten, wo die Luftschichten sogleich als eben betrachtet wurden, und welche Gleichung die Form hatte

$$\frac{dx^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{n'n'}{nn}\sin\mu^2,$$

wo μ dieselbe Bedeutung besitzt, als hier 6, so wird

$$\frac{cc + 4E\varrho'}{cc + 4E\varrho} = \frac{n'n'}{nn},$$

und da wir aufserdem fanden, dafs

$$\frac{n'n'}{nn} = \frac{1 + a\varrho'}{1 + a\varrho},$$

und so sieht man sogleich, dafs

$$\frac{4E}{cc} = a$$

werden wird. Man hat daher

$$vv = cc.(1 + a\varrho')$$
$$\frac{4E}{vv} = \frac{a}{1 + a\varrho'}.$$

§. 603.

Wir kehren nun wieder zur Differentialgleichung der Bahn des Lichts zwischen r und φ zurück. Diese war

$$\frac{rrd\varphi^2 + dr^2}{r^4 d\varphi^2} = \frac{vv - 4E.(\varrho' - \varrho)}{aavv.\sin 6'^2},$$

und wenn man hierin den Werth von $4E$ substituirt

$$4E = \frac{avv}{1 + a\varrho'},$$

so kommt

$$\frac{rrd\varphi^2 + dr^2}{r^4 d\varphi^2} = \frac{1 + a\varrho}{aa.\sin 6'^2.(1 + a\varrho')}.$$

Löst man diese Gleichung nach $d\varphi$ auf, so ergiebt sich

$$d\varphi = \frac{a.\sin 6'.\sqrt{(1 + a\varrho')}.dr}{r.\sqrt{rr.(1 + a\varrho) - aa.\sin 6'^2.(1 + a\varrho')}},$$

und um diesen Ausdruck zu integriren, mufs man die Dichtigkeit ϱ als Function des Abstandes r vom Mittelpunkt der Erde kennen.

Bei der Berechnung der astronomischen Strahlenbrechung achtet man jedoch nicht weiter auf die Natur der Bahn, welche das Licht beschreibt, sondern man sucht blofs die Ablenkung, welche der Strahl von einer gewissen Stelle an erleidet. Es sey daher C der Mittel-

punkt der Erde (Fig. 64.), CAD der verlängerte Halbmesser, der an den Punkt A gezogen ist, wo die Bahn des Lichts die Oberfläche der Erde trifft. BMA sey die Bahn des Lichts und M ein willkürlich angenommener Punkt. MP und AQ zwei Berührungslinien, die sich in R durchschneiden; so wird PRA die Strahlenbrechung oder Ablenkung des Lichts von A bis M seyn. Man setze $CMP = \psi$, und da $QAD = \delta$, $MCP = \varphi$, so wird, wenn wir den Winkel PRA durch θ bezeichnen,

$$\theta = \varphi + \psi - \delta.$$

§. 604.

Differentiirt man den letzten Ausdruck, so erhält man

$$d\theta = d\varphi + d\psi,$$

Es ist aber auch $\text{tang}\,\psi = \frac{rd\varphi}{dr}$, also

$$d\psi = \frac{dr^2 . d . \frac{rd\varphi}{dr}}{rrd\varphi^2 + dr^2},$$

und da vermöge der Gleichung des vorigen Paragraphs

$$rrd\varphi^2 + dr^2 = \frac{r^4 d\varphi^2 . (1 + \alpha\varrho)}{aa . \sin \delta^2 . (1 + \alpha\varrho')},$$

so kommt auch

$$d\psi = \frac{dr^2 . d . \frac{rd\varphi}{dr} . aa . \sin \delta^2 . (1 + \alpha\varrho')}{r^4 d\varphi^2 . (1 + \alpha\varrho)},$$

Man hat aber

$$\frac{rd\varphi}{dr} = \frac{a . \sin \delta . \sqrt{1 + \alpha\varrho'}}{\sqrt{rr . (1 + \alpha\varrho) - aa . \sin \delta^2 . (1 + \alpha\varrho')}}$$

$$d . \frac{rd\varphi}{dr} = -\frac{a . \sin \delta . \sqrt{1 + \alpha\varrho' . [r . (1 + \alpha\varrho) . dr + \frac{1}{2} . \alpha rrd\varrho]}}{\sqrt{(rr . (1 + \alpha\varrho) - aa . \sin \delta^2 . (1 + \alpha\varrho'))^3}},$$

folglich ergiebt sich

$$d\psi = -\frac{a . \sin \delta . \sqrt{1 + \alpha\varrho' . dr}}{r . \sqrt{rr . (1 + \alpha\varrho) - aa . \sin \delta^2 . (1 + \alpha\varrho')}}$$

$$- \frac{a . \sin \delta . \sqrt{(1 + \alpha\varrho') . \alpha d\varrho}}{2 . (1 + \alpha\varrho) . \sqrt{rr . (1 + \alpha\varrho) - aa . \sin \delta^2 . (1 +}}$$

Addirt man hierzu den Werth von $d\varphi$, welcher, wie man leicht sieht, dem ersten Gliede dieses Ausdrucks gleich ist, so kommt

$$d\theta = -\frac{a.\sin 6.\sqrt{1+a\varrho'}.ad\varrho}{2.(1+a\varrho).\sqrt{rr.(1+a\varrho)-aa.\sin 6^2.(1+a\varrho')}},$$

welches der verlangte Ausdruck für die Strahlenbrechung bei den als kugelförmig angenommenen Luftschichten ist.

§. 605.

Den Divisor $1+a\varrho$, welcher immer zwischen den sehr nahen Gränzen $1+a$ und 1 enthalten ist, pflegt man gewöhnlich als von der Einheit sehr wenig verschieden, zu vernachlässigen, und dasselbe kann auch mit den Factor $\sqrt{1+a\varrho'}$ im Zähler geschehen. Setzt man aufserdem

$$r = a.(1+u)$$

so erhält man den abgekürzten Ausdruck

$$d\theta = -\frac{\sin 6.ad\varrho}{2.\sqrt{(1+u)^2.(1+a\varrho)-\sin 6^2.(1+a\varrho')}}.$$

Da nun die Dichtigkeit der Luft mit der Höhe äufserst schnell abnimmt, so wird für die gröfste Höhe, in welcher die Luft noch eine merkliche brechende Kraft besitzt, u doch immer eine sehr kleine Zahl bleiben, so dafs man die Quadrate von u und die Producte aus u in a vernachlässigen kann. Hierdurch wird der Nenner des vorigen Bruchs

$$\sqrt{\cos 6^2+a\varrho+2u-a.\sin 6^2\varrho'},$$

also erhält man

$$d\theta = -\frac{a.\sin 6d\varrho}{2.\sqrt{\cos 6^2+a\varrho+2u-a.\sin 6^2\varrho'}}.$$

Ist der Winkel 6, welcher in der Astronomie die scheinbare Zenithdistanz des Gestirns genannt wird, klein genug, dafs die höhern Potenzen des Bruchs

$$\frac{a\varrho+2u-a\varrho'.\sin 6^2}{\cos 6^2}$$

vernachlässigt werden können, so kann man vorigen

Nenner in eine Reihe entwickeln, und wirklich integriren. Es kommt nämlich

$$d\theta = -\tfrac{1}{2}.\alpha.\tang\beta.d\varrho + \tfrac{3}{4}.\alpha\alpha.\tang\beta.\frac{\varrho d\varrho}{\cos\beta^2} + \tfrac{1}{2}.\alpha.\tang\beta.\frac{u d\varrho}{\cos\beta^2} - \tfrac{3}{4}.\alpha\alpha.\tang\beta^3.\varrho' d\varrho,$$

also wenn man integrirt

$$\theta + \text{Const} = -\tfrac{1}{2}.\alpha.\tang\beta.\varrho + \tfrac{3}{8}.\alpha\alpha.\tang\beta.\frac{\varrho\varrho}{\cos\beta^2} + \tfrac{1}{2}.\alpha.\tang\beta.\frac{u\varrho}{\cos\beta^2} - \tfrac{3}{4}.\alpha\alpha.\tang\beta^3.\varrho'\varrho' - \tfrac{1}{2}.\alpha.\tang\beta.\int\frac{\varrho du}{\cos\beta^2}.$$

Um die Constante zu bestimmen, bemerken wir, daß an der Oberfläche der Erde $\theta = 0$, $\varrho = \varrho'$, $u = o$ ist, und das unbekannte Integral $\int\varrho du$ lassen wir an derselben Stelle seinen Anfang nehmen. Dann erhält man

$$\text{Const} = -\tfrac{1}{2}.\alpha.\tang\beta.\varrho' + \tfrac{3}{8}.\alpha\alpha.\tang\beta.\frac{\varrho'\varrho'}{\cos\beta^2}.(1 - 2.\sin\beta^2).$$

Es wird also

$$\theta = \tfrac{1}{2}.\alpha.\tang\beta.(\varrho' - \varrho) + \tfrac{3}{8}.\alpha\alpha.\tang\beta.\frac{\varrho\varrho - \varrho'\varrho'}{\cos\beta^2} + \tfrac{1}{2}.\alpha.\tang\beta.\frac{u\varrho}{\cos\beta^2} - \tfrac{3}{4}.\alpha\alpha.\tang\beta.\frac{\varrho'\varrho}{\cos\beta^2} + \tfrac{3}{4}.\alpha\alpha.\tang\beta^3.\varrho'\varrho' - \tfrac{1}{2}.\alpha.\tang\beta.\int\frac{\varrho du}{\cos\beta^2}.$$

Dehnen wir dies Integral bis an die Gränze der Atmosphäre aus, wo $\varrho = o$ ist, und bezeichnen den daselbst

Statt findenden Werth von θ durch θ', und den Werth des Integrals $\int \varrho du$ durch U, so kommt

$$\theta' = \tfrac{1}{2}.\alpha\varrho'.\tang 6$$
$$- \tfrac{1}{3}.\alpha\alpha\varrho'\varrho'.\frac{\tang 6}{\cos 6^2} + \tfrac{1}{4}.\alpha\alpha.\tang 6^3.\varrho'\varrho'$$
$$- \tfrac{1}{2}.\alpha.\frac{\tang 6}{\cos 6^2}.U.$$

§. 606.

Es bleibt jetzt blofs noch übrig, den Werth des Integrals $\int \varrho du$ anzugeben. Bezeichnet man durch p die Elasticität der Luft in der Höhe z über der Erdoberfläche, die Dichtigkeit durch ϱ, die daselbst Statt findende anziehende Kraft der Erde durch m, so hat man, den Lehren des Gleichgewichts der elastischen Flüssigkeiten zufolge, die Gleichung

$$dp = - m\varrho dz.$$

Ist nun g die Schwere an der Oberfläche der Erde, so wird, da die Kraft der Anziehung sich umgekehrt wie das Quadrat der Entfernung vom Mittelpunkt der Erde verhält,

$$m = \frac{aag}{(a+z)^2},$$

also auch

$$dp = - \frac{aag\varrho dz}{(a+z)^2}.$$

Man hat aber

$$z = r - a$$
$$= a.(1+u) - a = au,$$

und durch Substitution dieses Werthes von z in vorige Formel erhält man

$$dp = - ag.\frac{\varrho du}{(1+u)^2}.$$

Da aber u eine kleine Gröfse ist, so kann man hier statt $1+u$ ohne merklichen Fehler die Einheit selbst setzen, und dann erhält man

$$p = - ag.\int \varrho du + C.$$

An der Oberfläche der Erde sey $p = p'$, und da wir aufserdem angenommen haben, dafs daselbst $\int \varrho du$ Null seyn soll, so wird $C = p'$, folglich

$$\frac{p' - p}{ag} = \int \varrho du.$$

An der Gränze der Atmosphäre hat man $p = o$, $\int \varrho du = U$, also wird

$$U = \frac{p'}{ag}.$$

Vermöge des Mariottischen Gesetzes ist aber auch $p' = k\varrho'$, folglich

$$U = \frac{k}{ag} \cdot \varrho',$$

wo der Werth der Constante $\frac{k}{ag} = 0{,}001262$ beträgt. Man erhält also

$$\theta' = \tfrac{1}{2} \cdot \alpha\varrho' \cdot \tan 6 \cdot \left(1 - \frac{0{,}001262}{\cos 6^2} - \tfrac{1}{4} \cdot \frac{\alpha\varrho'}{\cos 6^2} + \tfrac{1}{2} \cdot \alpha\varrho' \cdot \tan 6^2\right).$$

Nimmt man nun

$$\alpha\varrho' = 0{,}000588,$$

so kommt, wenn man θ' gleich in Secunden erhalten will,

$$\theta' = 60'',64 \cdot \tan 6 \cdot \left(1 - \frac{0{,}001409}{\cos 6^2} + 0{,}000294 \cdot \tan 6^2\right).$$

Die hieraus berechnete Refraction gilt aber blofs für den Fall, wo der Barometerstand 0,76 Meter, und die Temperatur Null Grad beträgt. Für einen andern Barometerstand p und Temperatur t mufs dieser Ausdruck, wie schon früher gezeigt ist, mit

$$\frac{p}{0{,}76 \cdot (1 + 0{,}00375 \cdot t)}$$

multiplicirt werden, wo die Temperatur nach dem Centerimalthermometer angegeben seyn mufs. Uebrigens läfst sich vorige Formel höchstens bis zu $6 = 70°$ gebrauchen. Für gröfsere Werthe von 6, und vorzüglich für die Bestimmung der sogenannten Horizontalrefraction, wo $6 = 90°$ ist, müssen die Entwickelungen viel genauer vorgenommen werden, wozu mancherlei analyti-

sche Kunstgriffe erforderlich sind, und doch die Rechnungen äufserst weitläufig werden. Wir verweisen daher den Leser, der diesen Gegenstand genauer betrachten will, auf unsere Theorie der astronomischen Strahlenbrechung.

§. 607.

Wir haben aus §. 603. die Gleichung

$$\frac{rrd\varphi^2 + dr^2}{r^4 d\varphi^2} = \frac{1 + \alpha\varrho}{aa \cdot \sin 6'^2 \cdot (1 + \alpha\varrho')},$$

und da die Gröfse $rrd\varphi^2 + dr^2$ nichts anders als das Quadrat des Elements der Bahn des Lichts in der Atmosphäre ist, so kommt, wenn wir dieses Element durch ds bezeichnen,

$$ds^2 = \frac{(1 + \alpha\varrho) \cdot r^4 d\varphi^2}{aa \cdot \sin 6'^2 \cdot (1 + \alpha\varrho')}.$$

In demselben Paragraph hat man aber die Gleichung

$$d\varphi = \frac{a \cdot \sin 6' \cdot \sqrt{1 + \alpha\varrho'} \cdot dr}{r \cdot \sqrt{rr \cdot (1 + \alpha\varrho) - aa \cdot \sin 6'^2 \cdot (1 + \alpha\varrho')}},$$

folglich, wenn man diesen Werth substituirt, so kommt das Element der Bahn

$$ds = \frac{rdr \cdot \sqrt{1 + \alpha\varrho}}{\sqrt{[rr \cdot (1 + \alpha\varrho) - aa \cdot \sin 6' \cdot (1 + \alpha\varrho')]}}.$$

§. 608.

Setzt man hierin nach §. 605. $r = a \cdot (1 + u)$, und vernachlässigt die Producte au, so wie die Potenzen von u, so kommt, wenn man bemerkt, dafs man ohne merklichen Fehler den Factor $\sqrt{1 + \alpha\varrho}$ im Zähler der Einheit gleich setzen und die höhern Potenzen von u vernachlässigen kann,

$$ds = \frac{adu}{\sqrt{[\cos 6'^2 + 2u + \alpha\varrho - \alpha\varrho' \cdot \sin 6'^2]}}.$$

Wenn nun an irgend einer Stelle der Atmosphäre die Dichtigkeit des Lichts $= M$ ist, so ist der Verlust, den es erleidet, indem es den Raum ds der Luft von

der Dichtigkeit ϱ durchläuft, der Gröfse $M\varrho ds$ proportional. Wir haben daher die Gleichung

$$dM = -\mu M\varrho ds,$$

wo μ ein constanter Coefficient ist, der von der lichtverschluckenden Kraft der atmosphärischen Luft abhängt. Man erhält durch Integration

$$\frac{1}{\mu}\cdot\log M = \text{Const} - \int\varrho ds.$$

An der Oberfläche der Erde sey $M = M'$, $\int\varrho ds = 0$, so wird

$$\frac{1}{\mu}\cdot\log\frac{M}{M'} = -\int\varrho ds,$$

und wir haben uns also, um den Werth von M zu erhalten, mit der Integration der Formel $\int\varrho ds$ zu beschäftigen.

§. 609.

Substituirt man hierin den Werth von ds aus vorigen Paragraph, so kommt

$$\varrho ds = \frac{a\varrho du}{\sqrt{[\cos 6^2 + 2u + a\varrho - a\varrho'.\sin 6^2]}}.$$

Entwickelt man den Nenner in eine Reihe, indem man voraussetzt, dafs das Glied $\cos 6^2$ gegen die übrigen als bedeutend zu betrachten ist, so kommt

$$\int\varrho ds = \frac{a}{\cos 6}\cdot\int\varrho du - \frac{a}{\cos 6^3}\cdot\int\varrho u du$$
$$- \tfrac{1}{2}\cdot\frac{aa}{\cos 6^3}\cdot\int\varrho\varrho du + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{aa\varrho'.\sin 6^2}{\cos 6^3}\cdot\int\varrho du.$$

Den Werth des Integrals $\int\varrho du$, welchen wir §. 605. durch U bezeichneten, haben wir schon §. 606. entwickelt, und selbigen gleich $\frac{k}{ag}\cdot\varrho'$ gefunden, wofür wir $\nu\varrho'$ setzen. Es ist also

$$\int\varrho ds = \frac{a}{\cos 6}\cdot\nu\varrho'.(1 + \tfrac{1}{2}.a\varrho'.\tang 6^2)$$
$$- \frac{a}{\cos 6^3}\cdot\int\varrho u du - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{aa}{\cos 6^3}\cdot\int\varrho\varrho du.$$

§. 610.

Um nun die übrigen Integrale zu finden, bezeichne man den gröfsten Werth von u durch u', so kann man

$$u'^5\varrho = \varrho'.(u' - u)^5$$

setzen. Hieraus folgt

$$u = u' - u'.\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$du = -\tfrac{1}{5}.\frac{d\varrho}{\varrho'}.u'.\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^{-\frac{4}{5}}$$

$$\int\varrho u du = \tfrac{1}{5}.u'u'\int\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^{\frac{2}{5}}.d\varrho - \tfrac{1}{5}.u'u'\int\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^{\frac{1}{5}}.d\varrho$$

$$= \tfrac{1}{7}.u'^2\varrho'.\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^{\frac{7}{5}} - \tfrac{1}{6}.u'^2\varrho'.\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^{\frac{6}{5}} + \text{Const.}$$

Das Integral soll an der Oberfläche der Erde Null werden, wo $\varrho = \varrho'$ ist, also hat man zur Bestimmung der Constante

$$o = \tfrac{1}{7}.u'^2\varrho' - \tfrac{1}{6}.u'^2\varrho' + \text{Const},$$

und wird das Integral bis an die Gränze der Atmosphäre ausgedehnt, wo $\varrho = o$ ist, so bleibt

$$\int\varrho u du = \tfrac{1}{42}.u'u'\varrho'.$$

Was ferner das Integral $\int\varrho\varrho du$ anbelangt, so hat man

$$\int\varrho\varrho du = -\tfrac{1}{5}.\varrho'u'\int\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^{\frac{6}{5}}.d\varrho$$

$$= -\tfrac{1}{11}.\varrho'\varrho'u'.\left(\frac{\varrho}{\varrho'}\right)^{\frac{11}{5}} + \text{Const},$$

und wird dies Integral von der Oberfläche der Erde bis an die Gränzen der Atmosphäre ausgedehnt, so kommt

$$\int\varrho\varrho du = \tfrac{1}{11}.\varrho'\varrho'u'.$$

Man hat daher

$$\int\varrho ds = \frac{a\nu\varrho'}{\cos 6'}.(1 + \tfrac{1}{2}.a\varrho'.\tang 6'^2)$$

$$- \frac{a\varrho'}{\cos 6'^3}.\frac{u'u'}{42} - \frac{1}{22}.\frac{a\varrho'}{\cos 6'^3}.\varrho'u'\alpha,$$

folglich auch

$$\frac{1}{\mu a\varrho'}.\log\frac{M}{M'} = \frac{\nu}{\cos 6'}.(1 + \tfrac{1}{2}.a\varrho'.\tang 6'^2)$$

$$- \frac{u'u'}{42}.\frac{1}{\cos 6'^3} - \frac{u'}{22}.\frac{a\varrho'}{\cos 6'^3}.$$

[illegible] vorkommenden constan-
[illegible]

$$[illegible] = [illegible]$$
$$[illegible] = [illegible]$$
$$[illegible] = [illegible].$$

[illegible] in der Gränze der Atmosphäre [illegible].

§. 611.

[illegible] die hier angegebenen Zahlenwerthe [illegible], so kommt

$$\frac{1}{\mu\alpha\varrho} \log \frac{M}{M'} = 0{,}00126162 \cdot \frac{1}{\cos \theta}$$
$$- 0{,}00000125 \cdot \frac{1}{\cos \theta^3}.$$

Nach Lambert (Photometria) soll das Licht im Verhältniſs von 5 : 3 vermindert werden, wenn es senkrecht durch die Atmosphäre einfällt; wir haben also zur Bestimmung von $\mu\alpha\varrho'$ die Gleichung, da für senkrecht einfallendes Licht $\theta = o$ ist,

$$\frac{1}{\mu\alpha\varrho'} \cdot \log \frac{5}{3} = 0{,}00126037$$
$$\frac{1}{\mu\alpha\varrho'} = 0{,}002467334.$$

Hieraus ergiebt sich also endlich

$$\log \frac{M}{M'} = 0{,}51136 \cdot \frac{1}{\cos \theta}$$
$$- 0{,}000507 \cdot \frac{1}{\cos \theta^3}.$$

Da in dieser Formel vorkommenden Logarithmen sind natürliche, sollen sie briggische bedeuten, so muſs durch 2.3025851 dividirt werden, und wir erhalten

$$\log M' = 0.22218 \cdot \frac{1}{\cos \theta} - 0.000220 \cdot \frac{1}{\cos \theta^3}.$$

Man kann aber diese Formel nicht wohl weiter als bis [illegible] $\theta = 70^0$ brauchen.

Von den Höfen und Nebensonnen.

§. 612.

Bei der Erklärung dieser merkwürdigen optischen rscheinungen werden wir die Theorie befolgen, welche raunhofer von denselben in dem dritten Hefte der on Schumacher herausgegebenen astronomischen bhandlungen dargelegt hat. Was zuerst die Höfe um onne oder Mond betrifft, bei deren Erscheinung der limmel mit einem schwachen Ueberzug von dünnen olken bedeckt ist, so mufs man zwei Hauptarten der- elben unterscheiden. Erstens kann der Fall eintreten, afs der Himmelskörper von drei oder mehrern con- entrischen Farbenringen umgeben ist, die sowohl unter ch als mit dem leuchtenden Körper selbst verbunden nd, und bei denen die rothe Farbe nach Aufsen ge- ehrt ist. Diese werden wir mit Fraunhofer Höfe einer Art nennen. Die andere Art besteht in einem eifsen oder farbigen Ringe, der den Himmelskörper ngiebt, und ungefähr $22\frac{1}{2}$ Grad von demselben ent- rnt ist. Bei diesem liegt die rothe Farbe nach Innen. efters bemerkt man auch noch um diesen ersten Ring nen zweiten, welcher einen doppelt so grofsen Durch- esser als der erste besitzt. Diese nennt Fraunhofer öfe grofser Art. Wir werden zuerst die Erklärung r letztern Art vornehmen, da die der erstern auf ner Eigenschaft des Lichts beruht, von der wir bisher ch nicht gesprochen haben.

§. 613.

Wenn das Licht durch ein Prisma geht, dessen echender Winkel $= p$, und bei welchem das Bre-

chungsverhältnifs durch n ausgedrückt wird, so findet sich der Winkel γ, unter welchem der einfallende und der ausfahrende Strahl sich schneiden, für den Fall, wo γ ein Minimum ist, nach §. 359.,

$$\sin\gamma = 2n \cdot \sin\tfrac{1}{2}p \cdot \cos p \cdot \sqrt{1 - nn \cdot \sin\tfrac{1}{2}p^2} - \sin p \cdot (1 - 2nn \cdot \sin\tfrac{1}{2}p^2),$$

und man weifs aus der Theorie des Maximum und Minimum, dafs sich in diesem Fall der Einfallswinkel merklich ändern kann, ohne dafs hierdurch der Winkel γ eine merkliche Aenderung erleidet. Nimmt man nun an, die Luft sey mit kleinen Eiskrystallen angefüllt, die aus dreiseitigen Prismen bestehen, und das Licht der Sonne oder des Mondes werde durch dieselben gebrochen, so wird grade bei diesem Winkel γ das gebrochene Licht sich am hellsten zeigen, und ein heller Kreis vom Halbmesser γ um den Himmelskörper erscheinen. Nimmt man nun für rothe Strahlen $n = 1{,}32$, und für den brechenden Winkel des Prisma $p = 60^0$, so findet sich $\gamma = 22^0 36'$, welches sehr genau mit den Beobachtungen übereintrifft.

§. 614.

Setzt man in voriger Gleichung $n + \delta n$ statt n, und $\gamma + \delta\gamma$ statt γ, so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned}\delta\gamma \cdot \cos\gamma &= 2\delta n \cdot \sin\tfrac{1}{2}p \cdot \cos p \cdot \sqrt{1 - nn \cdot \sin\tfrac{1}{2}p^2} \\ &\quad + 4n\delta n \cdot \sin p \cdot \sin\tfrac{1}{2}p^2 \\ &\quad - 2nn \cdot \sin\tfrac{1}{2}p \cdot \cos p \cdot \frac{\delta n \cdot \sin\tfrac{1}{2}p^2}{\sqrt{1 - nn \cdot \sin\tfrac{1}{2}p^2}} \\ &= 4n\delta n \cdot \sin p \cdot \sin\tfrac{1}{2}p^2 \\ &\quad + 2 \cdot \sin\tfrac{1}{2}p \cdot \cos p \cdot \frac{1 - 2nn \cdot \sin\tfrac{1}{2}p^2}{\sqrt{1 - nn \cdot \sin\tfrac{1}{2}p^2}} \cdot \delta n.\end{aligned}$$

Da nun im vorliegenden Fall $2nn \cdot \sin\tfrac{1}{2}p^2$ kleiner als die Einheit ist, so werden die mehr brechbaren Strahlen einen gröfsern Werth für γ geben, als die weniger brechbaren, und hieraus folgt, dafs die rothe Farbe des Kreises nach Innen, die violette Farbe nach Aufsen

egt, grade so wie er die Beobachtung bei den Höfen roſser Art zeigt.

§. 615.

Statt der dreiseitigen Prismen, welche die Eisrystalle bilden, kann man auch sechsseitige annehmen, hne dafs dadurch die Rechnung geändert wird. Denn s sey $ABCDEF$ ein solches sechsseitiges reguläres risma, LM ein Strahl, dessen Einfallswinkel dem inimum von γ entspricht, so mufs nach §. 358. der rechungswinkel im Innern des Prisma dem halben brehenden Winkel des Prisma gleich werden. Wollte man so BAF als das Prisma annehmen, so wäre der rechende Winkel desselben $BAF = 120^0$, folglich der rechungswinkel im Innern $= 60$ Grad. Ein solcher rechungswinkel kann aber nicht Statt finden, da der röfste Werth des Sinus desselben $\frac{1}{n} = \frac{1}{1,32} = 0,7575$ t, und der entspechende Winkel nur $49^0\ 15'$ beträgt. ie gebrochenen Strahlen werden also durch die zweite eite EF gehen, was uns auf das dreiseitige Prisma rückführt, da die Seiten AB, EF einen Winkel von) Grad mit einander bilden. Auf die Strahlen, welche rch ED gehen, haben wir keine Rücksicht zu nehen, da dieselben mit den einfallenden Strahlen parallel erden, sich also mit dem directen Licht der Himmelsörper mischen.

§. 616.

Nehmen wir an, dafs die sechsseitigen prismatischen rystalle an ihren Grundflächen durch sechsseitige Pymiden geschlossen werden, so haben wir hier vertittelst der einander gegenüberliegenden Seiten der yramiden, neue Prismen, durch welche das Licht ebrochen werden kann, und es fragt sich, welchen Verth wir dem Neigungswinkel dieser Flächen gegen inander beilegen müssen, um daraus den zweiten Hof

von 45° Halbmesser zu erklären. Man findet durch einige Versuche aus der Formel

$$\sin\gamma = 2n\,.\,\sin\tfrac{1}{2}p\,.\,\cos p\,.\,\sqrt{1 - nn\,.\,\sin\tfrac{1}{2}p^2} - \sin p\,.\,(1 - 2nn\,.\,\sin\tfrac{1}{2}p^2),$$

indem in derselben $\gamma = 45°$, $n = 1{,}32$ gesetzt wird, dafs $p = 88$ Grad genommen werden mufs, um der Gleichung Genüge zu leisten. Der Neigungswinkel zweier einander gegenüberliegender Flächen der Schlufspyramide beträgt daher 88 Grad, was mit der bekannten Krystallisationsform des Eises sehr gut übereinstimmt. Berechnet man sich mit dem Werthe $p = 88°$ nach der §. 614. angegebenen Formel dy, so findet man dasselbe positiv, voraus hervorgeht, dafs die stärker gebrochenen Strahlen einen gröfseren scheinbaren Abstand von der Sonne haben, so dafs das Roth dieses zweiten Ringes der Sonne zugekehrt ist, was ebenfalls mit der Erfahrung übereinstimmt. Da nun die Flächen dieser Pyramiden viel kleiner sind, als die Seitenflächen der Prismen, so wird schon aus diesem Grunde der zweite äufsere Ring viel schwächer erscheinen, als der innere. Aufserdem ist im zweiten Fall der Brechungswinkel gröfser, und auch dies trägt zur Schwächung bei, indem je schiefer das Licht auffällt, desto mehr wird von demselben reflectirt.

§. 617.

Ein einziges Mal ist auch noch ein dritter Kreis von 90° Halbmesser beobachtet worden, nämlich von Hevel in Danzig am 20. Februar 1661; er erschien freilich äufserst schwach. Dieser läfst sich aus der Zurückwerfung des Lichts im Innern des Prisma folgendermafsen erklären. Es sey LM der einfallende Strahl, MN der gebrochene (Fig. 65.), der Einfallswinkel $= \varepsilon$, der Brechungswinkel $= G$, so ist

$$\sin\varepsilon = n\,.\,\sin G.$$

Ist der Neigungswinkel der beiden Flächen AB, EF gegen einander $= p$, so hat man

$$p + AMN + FNM = 180°.$$

Zieht man das Einfallsloth NG und setzt $MNG = q$, so ist

$$AMN = 90^0 - \delta;$$
$$FNM = 90^0 - q;$$

folglich, wenn man diese Werthe in obige Gleichung substituirt,

$$p - \delta - q = o, \quad q = p - \delta.$$

In N werde der Strahl nach NO reflectirt, so findet sich, da die Seiten FE, CD den Winkel p mit einander bilden, der Winkel NOD aus der Gleichung

$$p + ONE + NOD = 180^0.$$

Errichtet man das Einfallsloth OH, so ist auch, da $ONE = 90^0 - q$,

$$p - q - HON = o,$$

und vergleicht man dies mit der Gleichung $p - \delta - q = o$, so folgt, dafs $HON = \delta$ wird. Ist also OP der ausfahrende Strahl, OK das Einfallsloth, so wird $POK = \varepsilon$ seyn müssen. Man verlängere den einfallenden und ausfahrenden Strahl bis sie sich in Q schneiden, und bezeichne den Winkel MQO durch γ, so erhält man in dem Viereck $QMNO$, da der Winkel $QMN = QON = \varepsilon - \delta$, und der überstumpfe Winkel $MNO = 360^0 - 2q$,

$$360^0 = 360^0 - 2q + 2\varepsilon - 2\delta + \gamma$$
$$\tfrac{1}{2}\gamma = -\varepsilon + \delta + q.$$

§. 618.

Wir haben also folgende Gleichungen erhalten

$$\sin\varepsilon = n \cdot \sin\delta;$$
$$q = p - \delta;$$
$$\tfrac{1}{2}\gamma = \delta - \varepsilon + q.$$

Die zweite Gleichung giebt

$$\sin\delta = \sin(p - q),$$

und aus der dritten erhält man

$$\sin\delta = \sin(\tfrac{1}{2}\gamma + \varepsilon - q),$$

folglich, wenn man hierin den Werth von $\sin\delta$ aus der ersten Gleichung substituirt,

$$\sin\varepsilon = n \cdot \sin(p - q)$$
$$\sin\varepsilon = n \cdot \sin(\tfrac{1}{2}\gamma + \varepsilon - q).$$

Der gebrochene Strahl MN wird im Innern vollständig reflectirt, sobald $\sin q > \frac{1}{n}$, nehmen wir also den Grenzwerth $\sin q = \frac{1}{n}$, so lassen sich die vorigen beiden Gleichungen auch so schreiben, indem man $\frac{\sqrt{nn-1}}{n}$ statt $\cos q$ setzt,

$$\sin \varepsilon = \sin p \,.\, \sqrt{nn-1} - \cos p$$
$$\sin \varepsilon = \sin (\tfrac{1}{2}\gamma + \varepsilon) \,.\, \sqrt{nn-1} - \cos (\tfrac{1}{2}\gamma + \varepsilon).$$

§. 619.

Die zweite Gleichung giebt, wenn sie entwickelt wird,

$$\begin{aligned}\sin \varepsilon = {} & \sin \tfrac{1}{2}\gamma \,.\, \cos \varepsilon \,.\, \sqrt{nn-1} \\ & + \cos \tfrac{1}{2}\gamma \,.\, \sin \varepsilon \,.\, \sqrt{nn-1} \\ & - \cos \tfrac{1}{2}\gamma \,.\, \cos \varepsilon + \sin \tfrac{1}{2}\gamma \,.\, \sin \varepsilon.\end{aligned}$$

Nimmt man die Glieder zusammen, welche in $\sin \frac{1}{2}\gamma$, und diejenigen, welche in $\cos \frac{1}{2}\gamma$ multiplicirt sind, so läßt sich die Gleichung so ausdrücken

$$\begin{aligned}\sin \varepsilon - {} & \sin \tfrac{1}{2}\gamma \,.\, [\cos \varepsilon \,.\, \sqrt{n^2-1} + \sin \varepsilon] \\ = {} & \cos \tfrac{1}{2}\gamma \,.\, [\sin \varepsilon \,.\, \sqrt{n^2-1} - \cos \varepsilon],\end{aligned}$$

und wenn man quadrirt, und $1 - \sin \frac{1}{2}\gamma^2$ statt $\cos \frac{1}{2}\gamma^2$ setzt,

$$\begin{aligned}\sin \varepsilon^2 - {} & 2 \,.\, \sin \varepsilon \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\gamma \,.\, [\cos \varepsilon \,.\, \sqrt{nn-1} + \sin \varepsilon] \\ & + \sin \tfrac{1}{2}\gamma^2 \,.\, [\cos \varepsilon \,.\, \sqrt{nn-1} + \sin \varepsilon]^2 \\ = {} & [\sin \varepsilon \,.\, \sqrt{nn-1} - \cos \varepsilon]^2 \\ & - \sin \tfrac{1}{2}\gamma^2 \,.\, [\sin \varepsilon \,.\, \sqrt{nn-1} - \cos \varepsilon]^2.\end{aligned}$$

Nach den gehörigen Reductionen kommt

$$\begin{aligned}\sin \tfrac{1}{2}\gamma^2 - {} & 2 \,.\, \sin \tfrac{1}{2}\gamma \cdot \frac{\sin \varepsilon}{nn} \cdot [\cos \varepsilon \,.\, \sqrt{nn-1} + \sin \varepsilon] \\ = {} & \frac{[\sin \varepsilon \,.\, \sqrt{nn-1} - \cos \varepsilon]^2 - \sin \varepsilon^2}{nn},\end{aligned}$$

und hieraus ergiebt sich

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\varepsilon}{nn}\cdot[\cos\varepsilon\,.\,\sqrt{nn-1} + \sin\varepsilon]$$

$$\pm\frac{1}{nn}\cdot\sqrt{\left[\begin{array}{l} nn\,.\,[\sin\varepsilon\,.\,\sqrt{nn-1} - \cos\varepsilon]^2 - nn\,.\,\sin\varepsilon^2 \\ +\sin\varepsilon^2\,.\,[\cos\varepsilon\,.\,\sqrt{nn-1} + \sin\varepsilon]^2 \end{array}\right]}.$$

Die Gröfse unter dem Wurzelzeichen läfst sich auch so schreiben:

$$\begin{array}{l} +(nn-\sin\varepsilon^2)\,.\,\sin\varepsilon^2\,.\,(nn-1) \\ -2\,.\,(nn-\sin\varepsilon^2)\,.\,\sin\varepsilon\,.\,\cos\varepsilon\,.\,\sqrt{nn-1} \\ +(nn-\sin\varepsilon^2)\,.\,\cos\varepsilon^2 \end{array}$$

$$= (nn-\sin\varepsilon^2)\,.\,[\sin\varepsilon\,.\,\sqrt{nn-1} - \cos\varepsilon]^2.$$

Es wird daher

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\varepsilon}{nn}\cdot[\cos\varepsilon\,.\,\sqrt{nn-1} + \sin\varepsilon]$$

$$\pm\frac{\sqrt{nn-\sin\varepsilon^2}}{nn}\cdot[\sin\varepsilon\,.\,\sqrt{nn-1} - \cos\varepsilon].$$

§. 620.

Jetzt haben wir nur noch den Werth von ε durch p ausgedrückt in dieser Gleichung zu substituiren. Wir haben gefunden, dafs

$$\begin{array}{rl} \sin\varepsilon = & \sin p\,.\,\sqrt{nn-1} - \cos p \\ nn-\sin\varepsilon^2 = & nn - \sin p^2\,.\,(nn-1) - \cos p^2 \\ & +2\,.\,\sin p\,.\,\cos p\,.\,\sqrt{nn-1} \\ = & nn - \sin p^2\,.\,(nn-1) - 1 + \sin p^2 \\ & +2\,.\,\sin p\,.\,\cos p\,.\,\sqrt{nn-1} \\ = & (nn-1)\,.\,\cos p^2 + \sin p^2 \\ & +2\,.\,\sin p\,.\,\cos p\,.\,\sqrt{nn-1} \\ = & [\cos p\,.\,\sqrt{nn-1} + \sin p]^2. \end{array}$$

Nimmt man in der obern Gleichung für $\sin\frac{1}{2}\gamma$ das negative Vorzeichen bei der Wurzel, so erhält man auch

$$\sin\tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\cos\varepsilon}{nn}\cdot[\sin\varepsilon\,.\,\sqrt{nn-1} + \sqrt{nn-\sin\varepsilon^2}]$$

$$+\frac{\sin\varepsilon}{nn}\cdot[\sin\varepsilon - \sqrt{nn-\sin\varepsilon^2}\,.\,\sqrt{nn-1}].$$

sehen, wie sich die Beobachtungen mit dieser Hypothese vereinigen lassen. Nach den Versuchen über die Beugung des Lichts, welche Fraunhofer im achten Band der Denkschriften der königlichen baierischen Akademie beschrieben hat, finden folgende Gleichungen Statt, wenn γ der Durchmesser des beugenden Körpers, hier des Dunstkügelchens, in pariser Zollen ausgedrückt, und L', L'', L''' u. s. w. die in Bogen ausgedrückten Winkelabweichungen des letzten rothen Strahls in den verschiedenen Farbenfolgen angiebt,

$$L' = \frac{0{,}0000257}{\gamma}$$

$$L'' = \frac{0{,}0000257}{\gamma} + \frac{0{,}0000214}{\gamma}$$

$$L''' = \frac{0{,}0000257}{\gamma} + 2 \cdot \frac{0{,}0000214}{\gamma}$$

u. s. w. Wir dürfen nun aber hierbei nicht die beobachteten Halbmesser der farbigen Kreise nehmen, sondern müssen dieselben um den Halbmesser des Himmelskörpers vermindern, weil um diese Gröfse der Durchmesser bei einem leuchtenden Kreise gröfser erscheint, als bei einem leuchtenden Punkte. Dann hat man aus der ersten Jordanschen Beobachtung, wenn man die Winkel in Bogen ausdrückt,

$$0{,}013090 = \frac{0{,}0000257}{\gamma}$$

$$0{,}024580 = \frac{0{,}0000257}{\gamma} + \frac{0{,}0000214}{\gamma}.$$

Dies giebt

$$\gamma = 0{,}00196 \; ; \; \gamma = 0{,}00192.$$

Aus der zweiten Jordanschen Beobachtung erhalten wir

$$0{,}044360 = \frac{0{,}0000257}{\gamma}$$

$$0{,}081594 = \frac{0{,}0000257}{\gamma} + \frac{0{,}0000214}{\gamma},$$

und aus diesen Gleichungen folgt

$$\gamma = 0{,}000579 \; ; \; \gamma = 0{,}000577.$$

Man sieht hieraus, wie genau die Durchmesser der Dunstkügelchen, die aus jeder Beobachtung abgeleitet sind, mit einander übereinstimmen. Der Durchmesser des Mondes ist hierbei zu 31 Minuten angenommen.

Was nun Newton's Beobachtung anbetrifft, so erhalten wir folgende Gleichungen, indem wir den Halbmesser der Sonne zu 16 Minuten annehmen,

$$0{,}043824 = \frac{0{,}0000257}{\gamma}$$

$$0{,}076794 = \frac{0{,}0000257}{\gamma} + \frac{0{,}0000214}{\gamma}$$

$$0{,}100065 = \frac{0{,}0000257}{\gamma} + 2 \cdot \frac{0{,}0000214}{\gamma}.$$

Hieraus erhalten wir folgende Werthe für γ:

$$\gamma = 0{,}000585;$$
$$\gamma = 0{,}000613;$$
$$\gamma = 0{,}000684.$$

Diese Werthe des Durchmessers der Dunstkügelchen weichen nun freilich sehr von einander ab, allein man kann sich auch blofs auf den mittlern Ring verlassen, da die beiden andern ganz oberflächlich geschätzt sind. Rechnet man mit dem Werthe von γ, der sich aus dem zweiten Ringe ergiebt, zurück, so findet man, dafs der Halbmesser des ersten Kreises $5^0\,20'$, der des dritten $13^0\,20'$ hätte betragen müssen.

§. 625.

Die Nebensonnen zerfallen ebenfalls in zwei verschiedene Arten, in verticale und horizontale. Rothmann in Cassel beobachtete am 2ten Januar 1586 eine Erscheinung der ersten Art. Ehe die Sonne bei reinem Horizont aufging, erschien vertical eine Säule von der Breite des scheinbaren Sonnendurchmessers; kurz darauf ging in dieser Säule ein Sonnenbild auf. Von diesem Bilde befand sich kaum noch ein Zoll unter dem Horizont, so ging in derselben Säule die wahre Sonne auf, der noch ein anderes gleiches Bild folgte; die

iule blieb mit ihren drei an einander hängenden Sonnen mer vertical. Die ganze Erscheinung dauerte eine unde, wo dann eine vom Scheitel herkommende dun-le Wolke das Ganze verdeckte.

Auch Cassini beobachtete am 31sten Januar 1693 ne gleiche Erscheinung von zwei Nebensonnen, die ch aber nicht ganz berührten; die vorher erwähnten rticalen Lichtströme waren auch hier zu sehen. Ue-igens sind die Erscheinungen der verticalen Neben-nnen sehr selten.

§. 626.

Man kann dieses Phänomen der verticalen Neben-nnen durch einen Versuch hervorbringen, indem man ie aufgehende Sonne durch ein Gitter beobachtet, elches aus parallelen horizontalen Fäden besteht, in elchen die Entfernung der Mitte je zweier Fäden im anzen Gitter gleich grofs ist, und ungefähr 0,0022 ariser Zoll beträgt. Vermittelst dieses Gitters sieht an zu beiden Seiten der Sonne in verticaler Richtung ine Nebensonne, welche gegen die wahre Sonne zu äufsch, nach aufsen roth, in der Mitte weifs ist. Haben ie Fäden nicht gleichen Abstand, so erkennt man die arben der Nebensonnen weniger. Von den Neben-nnen geht ein dem Durchmesser der Sonne an Breite leicher Lichtstreifen aus, der bei gleicher Entfernung er Fäden etwas farbig erscheint; bei ungleicher Ent-rnung verschwinden aber die Farben mehr. Bei einem itter, wo die Entfernung der Fäden von einander = 0,0020 Pariser Zoll beträgt, treten die Nebenson-en ungefähr einen Zoll in die wahre Sonne hinein, ie dies bei Rothmann's Beobachtung der Fall war. st ε kleiner, so treten die Sonnen weiter aus einander. ei diesem Versuche kann man sich auch einer Glas-latte bedienen, die mit Blattgold belegt ist, in welches eine Linien in gleichen Abständen radirt sind. Zieht an auf dieser Platte ein anderes System von Linien,

welches das erste senkrecht durchschneidet, deren Entfernung aber bedeutend gröfser ist, z. B. = 0,02 Par. Zoll, so wird hierdurch das Phänomen nicht geändert, weil die dadurch entsprechenden horizontalen Nebensonnen mit der wahren fast ganz zusammenfallen.

§. 627.

Nachdem diese Versuche dargestellt sind, durch welche sich die verticalen Nebensonnen zeigen, kommt man leicht auf die Idee, dafs diese Erscheinung in der Natur durch die Beugung des Lichts an den in der Atmosphäre befindlichen Dunstkügelchen hervorgebracht werde. Es sey ABC die Oberfläche der Erde (Fig. 66.), DF ein Schicht Dunstkügelchen, die von einander die gleiche Entfernung η besitzen; BFH die nach der aufgehenden Sonne gezogene Linie, welche die Dunstschicht in F schneidet. Die scheinbare verticale Entfernung der Dunstkügelchen von einander ist dann $\eta . \sin BFG$, während die horizontale Entfernung derselben von einander immer $= \eta$ bleibt; da nun der Winkel BFG bei geringer Höhe der Sonne sehr klein ist, so kann die horizontale Entfernung der Dunstkügelchen von einander sehr bedeutend seyn, und doch die verticale sehr klein werden. Nimmt man Rothmann's Beobachtung, und setzt den Halbmesser der Sonne 16′ 20″, so war der Durchmesser der gleichen Nebensonne = 32′ 40″; also, wenn die Sonnen sich berührt hätten, wäre die Entfernung vom Mittelpunkt der wahren Sonne bis zum Ende der äufsersten Nebensonne 49′ gewesen; sie griffen aber einen Zoll in einander ein, folglich mufs man den zwölften Theil des Durchmessers abziehen; dann bleibt 46′ 15″. Da ferner die Sonne in der Rechnung als Punkt angesehen werden mufs, so mufs man hiervon den Halbmesser der Sonne abziehen; also ist die eigentliche Entfernung bis zum äufsersten Roth = 29′ 55″ = 0,0087023. Substituirt man dies in die Gleichung

$$L' = \frac{0{,}0000257}{\gamma},$$

so erhält man $\gamma = 0{,}00295$. Dies ist nun im vorliegenden Falle nichts anders, als die verticale Distanz der Dunsttheilchen. Es ist also

$$\eta . \sin BFG = 0{,}00295.$$

Ferner sey die Höhe der Dunstschicht über der Erdoberfläche $= h$, der Halbmesser der Erde $= r$, so wird

$$\frac{r}{r+h} = \cos BFG,$$

oder abgekürzt

$$\sin \tfrac{1}{2} . BFG = \sqrt{\frac{h}{2r}},$$

da h gegen r immer sehr klein ist. Dies giebt, wenn man $h = \frac{1}{4}$ Meile nimmt,

$$BFG = 1^{\circ}\,12'\,54''$$
$$\sin BFG = 0{,}02116.$$

Man findet dann den horizontalen oder eigentlichen Abstand der Dunstkügelchen

$$\eta = 0{,}139 \text{ Par. Zoll.}$$

Wenn die Dunstkügelchen keine so regelmäfsige Entfernungen von einander haben, so werden keine verticalen Nebensonnen erscheinen, sondern sich blofs senkrechte Lichtsäulen zu beiden Seiten der Sonne zeigen. Uebrigens sieht man leicht, dafs die Erscheinung der Nebensonne nur in sehr geringen Höhen sichtbar seyn kann, weil, sobald $\eta . \sin BFG = 0{,}02$ wird, das Bild mit der Sonne selbst zusammenfällt. Nimmt man nun den hier für η gegebenen Werth an, so hat man, um die Gränze von BFG zu bestimmen, die Gleichung

$$\sin BFG = \frac{0{,}02}{0{,}139} = 0{,}1439$$
$$= 8^{\circ}\,17'.$$

Behält man die Bezeichnungen h, r bei, und setzt die Höhe der Sonne, welche diesem Werthe des Winkels BFG entspricht, $= H$, so findet man leicht folgende Proport

$$\cos BFG : r,$$

und da das Verhältnifs $\frac{r}{h+r}$ der Einheit so nahe kommt, so darf man ohne merklichen Fehler $H = BFC = 8^0\,17'$ setzen. In dieser Höhe der Sonne würde also das Phänomen von selbst aufgehört haben.

§. 628.

Auch der horizontale Kreisbogen, der öfters in gleicher Breite mit dem Himmelskörper durch selbigen geht, läfst sich aus der Beugung des Lichts erklären, und indem derselbe den Hof grofser Art durchschneidet, mufs sich im Durchschnittspunkt eine bedeutend hellere Stelle zeigen, welche als horizontale Nebensonne erscheint. Man kann durch einen Versuch diesen horizontalen Lichtstreifen leicht darstellen; bestreicht man nämlich die Hand mit etwas Fett, und fährt dann einigemal in paralleler Richtung über eine Glasplatte weg, so wird diese ebenfalls mit Fett bestrichen, und man sieht durch ein Microscop, dafs sich in dieser Fettlage Linien befinden, die zwar ungleiche Entfernung von einander haben, aber doch merklich parallel sind, und in denen sich das Glas frei von Fett zeigt. Bringt man nun diese Glastafel so vor das Auge, dafs diese Streifen eine verticale Lage haben, und betrachtet einen leuchtenden Körper, so sieht man einen Lichtstreifen, der in horizontaler Lage bis an die Enden der Glastafel geht. Der ungleichen Entfernung der Streifen wegen, werden die verschiedenen Farbenspectra, welche in jeder Linie entstehen, sich decken, und daher der Lichtstreifen weifse Farbe besitzen.

§. 629.

Da es bei der Beugung des Lichts ganz gleichgültig ist, was für Körper diese Wirkung hervorbringen, so können wir uns in der Atmosphäre eine Schicht von Eiskrystallen oder Dunstkügelchen vorstellen. Es sey nun η der Abstand der Mittelpunkte zweier Dunst-

kügelchen von einander, der Winkel BFG (Fig. 66.) $= \varphi$, so ist der verticale Abstand der Mittelpunkte derselben $= \eta . \sin \varphi$, und bezeichnet man den Durchmesser der Dunstkügelchen durch δ, so ist der scheinbare leere Zwischenraum

$$= \eta . \sin \varphi - \delta.$$

Es kann nun sehr leicht der Fall eintreten, dafs diese Gröfse $\eta . \sin \varphi - \delta$ Null oder gar negativ wird, so dafs also in verticaler Richtung gar kein Licht durch die Zwischenräume hindurch gehen kann, und blofs in horizontaler Richtung sind Zwischenräume vorhanden, von der Breite $\eta - \delta$. Wir haben also hier ganz den Fall des im vorigen Paragraphen beschriebenen Versuchs, indem die verticalen Dunstkugelreihen die mit Fett beschmutzten Stellen des Glases vorstellen, und die in verticaler Lage zwischen ihnen befindlichen leeren Stellen, die auf der Glasplatte von Fett entblöfsten Stellen angeben. Es wird sich also bei dieser Anordnung der Dunstkügelchenschicht ein Lichtstreifen zeigen, der in horizontaler Richtung durch den Himmelskörper geht, wie es auch der vorige Versuch angab.

§. 630.

In §. 628. ist schon angegeben worden, dafs die horizontalen Nebensonnen durch den Durchschnitt eines Hofes grofser Art und den durch den Himmelskörper gehenden horizontalen Kreis gebildet werden können; es können dann diese beiden Kreise, einzeln genommen, so lichtschwach seyn, dafs sie dem Auge verschwinden, und doch kann im Durchschnittspunkt die Summe der Lichtmassen stark genug seyn, um als Nebensonnen zu erscheinen. Allein horizontale Nebensonnen können auch durch eine ganz andere Ursache gebildet werden, nämlich wie die Höfe grofser Art durch die Brechung in Eiskrystallen. Haben nämlich die in der Atmosphäre befindlichen Krystalle gegenseitig eine solche Stellung, dafs sie sich für des Beobachters Auge einer parallelen

Lage nähern, so sind in horizontaler Richtung die Zwischenräume am größten, und die Krystalle decken sich in dieser Richtung am wenigsten, folglich kann von dieser Stelle das meiste gebrochene Licht ins Auge gelangen, und die mit der Sonne in einerlei Horizontalebene liegenden Theile des Hofes müssen am hellsten erscheinen, und Nebensonnen zeigen.

Druckfehler.

Seite 36	Zeile 1	v. o.	statt dessen Bild oben,	lies	dessen Bild unten.
— 56	— 12	v. u.	— $2a - h$	lies	$2a + h$.
— 58	— 12	v. o.	— die	—	den.
— 81	— 1	v. u.	— γ	—	λ.
— 83	— 13	v. o.	— EO	—	EC.
— 347	— 9	v. u.	— CM	—	LM.
— 374	— 19	v. o.	— $\frac{h}{i}$	—	$\frac{h}{r}$.
— 503	— 11	v. o.	— 0.0537	—	9.0537.

Aufser diesen Druckfehlern haben sich §. 492 ff. bei der Berechnung einer achromatischen aplanatischen Linse einige Rechnungsfehler eingeschlichen. Die dort für die Krümmungshalbmesser gefundenen Werthe

$$r = +0.141864$$
$$\varrho = -0.514505$$
$$r' = +0.179768$$
$$\varrho' = -0.116413$$

entsprechen nicht genau der Forderung, dafs sich die mittleren und violetten Strahlen, die parallel der Axe sowohl unendlich nahe bei derselben als auch unter einem Winkel von 18° 30′ auf das Glas fallen, in Einem Punkte der Axe in der Entfernung 1 von der Glaslinse vereinigen sollen. Die Vereinigungsweiten jener vier Systeme von Strahlen sind bei den obigen Krümmungshalbmessern

für mittlere Axenstrahlen 0.990096
für violette Axenstrahlen 0.987284
für mittlere unter einem Winkel von 18° 30′ auffallende Strahlen 0.978137,
für violette unter einem Winkel von 18° 30′ auffallende Strahlen 0.974699,

welche Werthe noch bedeutend von einander abweichen. Leider wurden jene Fehler erst nach dem Abdrucke der Rechnungen bemerkt. Da es hier indessen weniger auf das Resultat selbst, als auf die zur Erlangung desselben angewandte Methode ankommt, so werden hoffentlich diese Rechnungsfehler nicht sehr störend seyn, und Entschuldigung finden. Die Werthe der Krümmungshalbmesser, welche gleiche Vereinigungsweiten hervorbringen, sind:

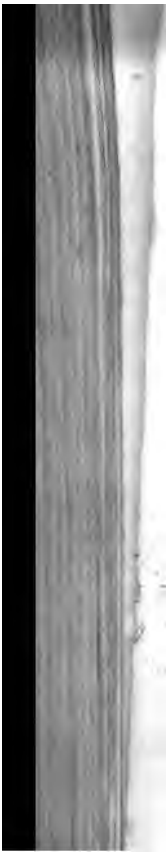
$$r = 0.142615,$$
$$\varrho = -0.579839,$$
$$r' = 0.179512,$$
$$\varrho' = -0.118555.$$

Vergl. Gehler's physicalisches Wörterbuch. Neue Aufl. Bd. 6. Pag. 420.

B
b'
b
a'
a

a
b
c

8.



THE NEW YORK PUBLIC LIBRARY
REFERENCE DEPARTMENT

This book is under no circumstances to be taken from the Building

BPA 20 1915